Esercitazione 9, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

28/11/2023

Considereremo spazi proiettivi su $\mathbb{R}$, a meno che venga specificato diversamente.

Problema 1. Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$.

(a) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r_1 che passa per i punti $[1, 1, -1], [2, -3, 5]$ e della retta r_2 che passa per i punti $[2, 0, 1], [0, -1, 3]$.

(b) Determinare $r_1 \cap r_2$.

Problema 2. Si consideri lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

(a) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano p_1 generato dai punti

$$[i, 0, 1, 0], [2, -1, 0, 0], [i, 0, 1, 1],$$

e del piano p_2 generato dai punti

$$[1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 0, 1].$$

(b) Determinare $p_1 \cap p_2$, sia in forma parametrica che cartesiana.

Problema 3. Determinare se i seguenti insiemi di punti in $\mathbb{P}^2$ sono linearmente indipendenti oppure no.

(a) $[1, 2, 0], [1, 0, -2], [0, 1, 1]$.

(b) $[1, 0, 7], [0, 1, 1], [2, -1, 0]$.

(c) $[1, -3, 2], [-2, 6, -4], [5, -15, 10]$.

(d) $[1, 2, 0], [1, 1, -1], [3, 0, 1], [0, 1, 2]$.

Problema 4. Dimostrare che i seguenti punti in $\mathbb{P}^2$:

$$[1,2,0],[1,1,-1],[3,0,1],[0,1,2],$$

sono in posizione generale.

Definizione. Siano P un punto e H un'iperpiano di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ tali che $P \notin H$. Per un punto $Q \in \mathbb{P}^n \setminus \{P\}$, definiamo *la proiezione da P su H del punto Q* come l'unico punto di intersezione tra il piano H e la retta $L(P,Q)$. Denotiamo questa proiezione con $\pi_{P,H}(Q)$.

Problema 5. In $\mathbb{P}^3$, considerare il punto $P=[1,1,0,0]$ e il piano $H\colon X_0-X_3=0$. Calcolare $\pi_{P,H}(Q)$ per $Q=[2,1,0,1]$.

Problema 6. Siano $R,S \subseteq \mathbb{P}^5$ sue sottospazi lineari tali che $\dim(R)=3$ e $\dim(S)=2$. Classificare i possibili sottospazi lineari $R\cap S$.

Problema 7. Mostrare che date due rette sghembe $r_1,r_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ e un punto $P \in \mathbb{R}^3 \setminus (r_1 \cup r_2)$, esiste un'unica retta r passante per P e incidente a r_1 e r_2. (L'unicità verrà discussa nel prossimo tutorato.)