Esercitazione 4, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

17/10/2023

Problema 1. Si consideri la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ che rispetto alla base canonica è data da

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_4 + 5x_2^2 + 8x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 + 5x_4^2.$$

Questa è definita positiva (non dovete verificarlo), ed induce quindi un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$. Rispetto a questo prodotto scalare, risolvere le seguenti:

(a) Ortogonalizzare il seguente insieme di vettori, scritti rispetto alla base canonica:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Ortonormalizzare lo stesso insieme di vettori in (a).

Problema 2. Considerare lo spazio vettoriale reale dei polinomi omogenei di grado 2 nelle variabili x, y:

$$V := \mathbb{R}[x, y]_2 = \{a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Si consideri la forma quadratica $q\colon V \to \mathbb{R}$ che rispetto alla base $\mathbf{p} = \{x^2, xy, y^2\}$ è data da

$$q(a_1, a_2, a_3) = 2a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2^2 + a_3^2.$$

Questa è definita positiva (non dovete verificarlo). Ortonormalizzare $\mathbf{p}$ rispetto al prodotto scalare indotto da q.

Problema 3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostrare che A è semidefinita positiva se e solo se esiste $M \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^tMM$.

Problema 4. Sia V uno spazio vettoriale reale, $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica, e $W \subseteq V$ un sottospazio. Se b è definita positiva, allora sapete che $V = W \oplus W^\perp$. Questa conclusione resta vera se b non è definita positiva?