Esercitazione 2, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

03/10/2023

Problema 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini $\mathbf{v}^\perp$.

2. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare $W^\perp$.

Problema 2. Sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e siano dati due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ che sono isotropi rispetto a b. È vero che anche $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è isotropo rispetto a b? Se sì, dimostrarlo. Se no, trovare un controesempio e formulare delle condizioni necessarie e sufficienti affinché $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sia anche isotropo.

Problema 3. Si dimostri che ogni forma bilineare su un campo K di caratteristica diversa da 2 si può esprimere in maniera unica come somma di una forma bilineare simmetrica e di una antisimmetrica.

Per lo svolgimento dei problemi di cui sopra, abbiamo discusso i seguenti lemma con relativa dimostrazione.

Lemma. *Sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Sia $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base per W. Allora*

$$W^\perp = w_1^\perp \cap \ldots \cap w_m^\perp.$$

Lemma. *Sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e antisimmatrica con K campo di caratteristica diversa da 2. Allora b è la forma bilineare nulla.*