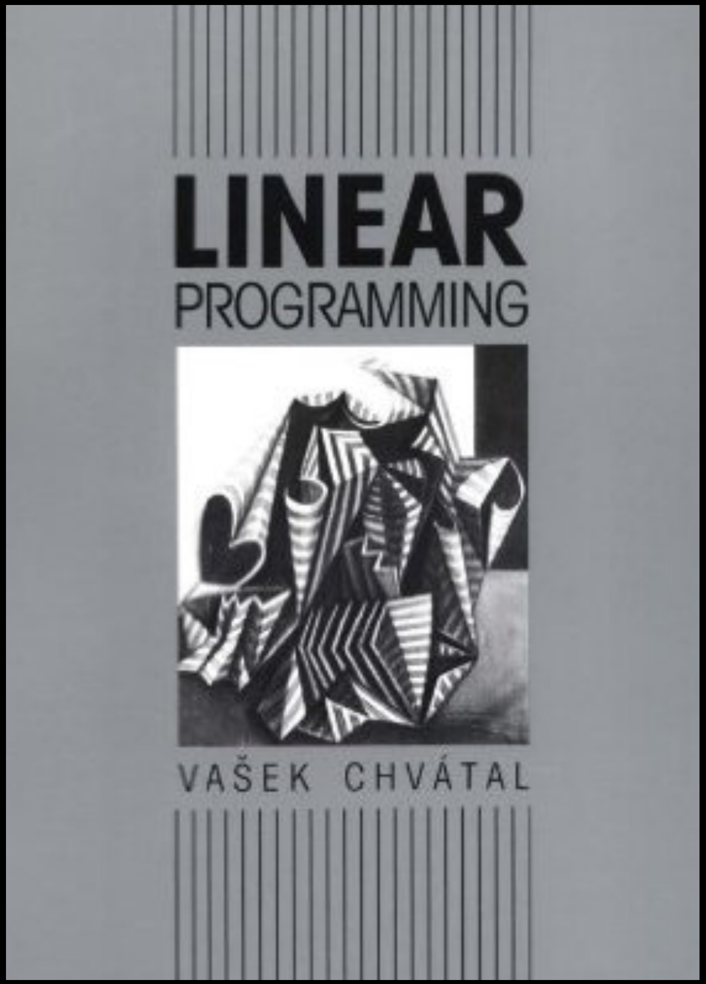


Lecture slides by Kevin Wayne

Ottimizzazione Lineare I

- *un esempio*
- *forma standard*
- *questioni fondamentali*
- *geometria*
- *algebra lineare*
- *algoritmo del simplesso*

Last updated on 5/27/24 10:13 AM

Ottimizzazione lineare [linear programming]

Ottimizzazione lineare. Ottimizzare una funzione linare sotto vincoli di disuguaglianza lineari.

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(P)} & \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
& \text{s. t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & 1 \le i \le m \\
& & x_j & \ge & 0 & 1 \le j \le n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{(P)} & \max & c^T x & & \\
& \text{s. t.} & Ax & = & b \\
& & x & \ge & 0
\end{array}
$$

Ottimizzazione lineare

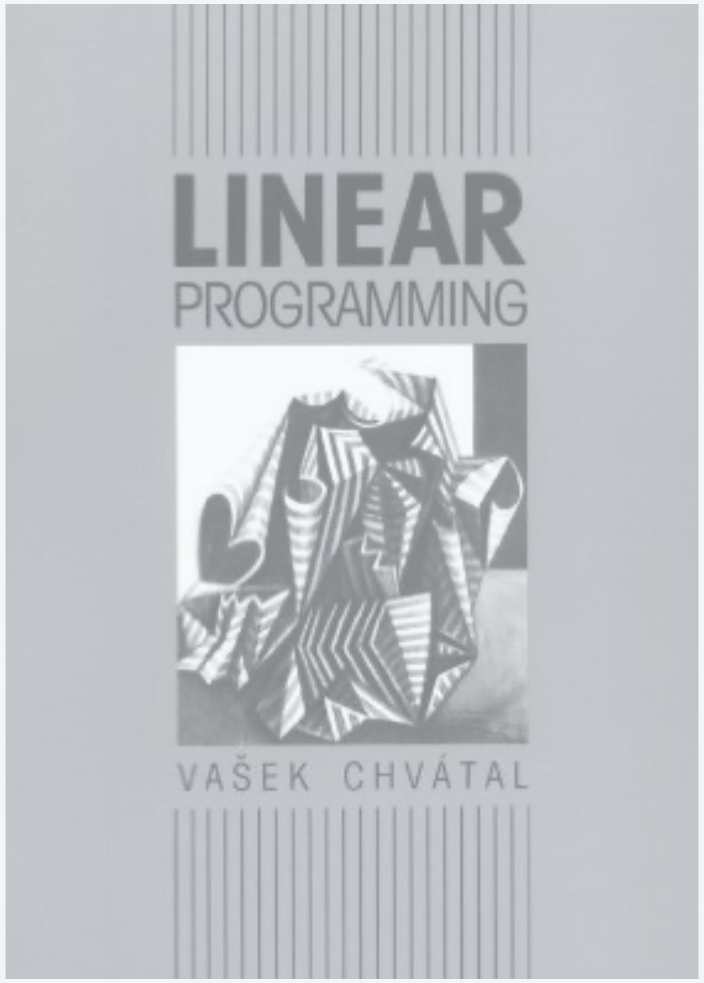
Ottimizzazione lineare. Ottimizzare una funzione lineare sotto disuguaglianze lineari.

Generalizza: $Ax = b$, giochi a somma nulla a 2 giocatori, cammini minimi, flusso massimo, problema dell'assegnazione, abbinamento massimo, flusso multi-prodotto, albero ricoprente minimo, …

Perché è un problema significativo?

- Progetto di algoritmi tempo-polinomiali.
- Progetto di algoritmi di approssimazione.
- Risoluzione di problemi NP-ardui tramite la tecnica branch-and-cut.

Considerata uno degli avanzamenti scientifici più importanti del XX secolo.



OTTIMIZZAZIONE LINEARE I

- *un esempio*
- *standard form*
- *fundamental questions*
- *geometry*
- *linear algebra*
- *simplex algorithm*

Reference: *The Allocation of Resources by Linear Programming,* Scientific American, by Bob Bland

Problema di una fabbrica di birra

Un piccolo birrificio produce birra ad alta e bassa fermentazione: "ale" e "beer" (lager).

- Produzione limitata dalla disponibilità di risorse:
  frumento [corn], luppolo [hops], malto [malt].
- Le ricette per ale e beer usano le risorse in diverse proporzioni.

Beverage	Corn (pounds)	Hops (ounces)	Malt (pounds)	Profit ($)
Ale (barrel)	5	4	35	13
Beer (barrel)	15	4	20	23
constraint	480	160	1190	

Come può massimizzare i profitti il birrificio?

- Usare tutte le risorse per le ale: 34 barili di ale $\Rightarrow$ \$442
- Usare tutte le risorse per le beer: 32 barili di beer $\Rightarrow$ \$736
- 7.5 barili di ale, 29.5 barili di beer $\Rightarrow$ \$776
- 12 barili di ale, 28 barili di beer $\Rightarrow$ \$800

Problema del birrificio

funzione obiettivo

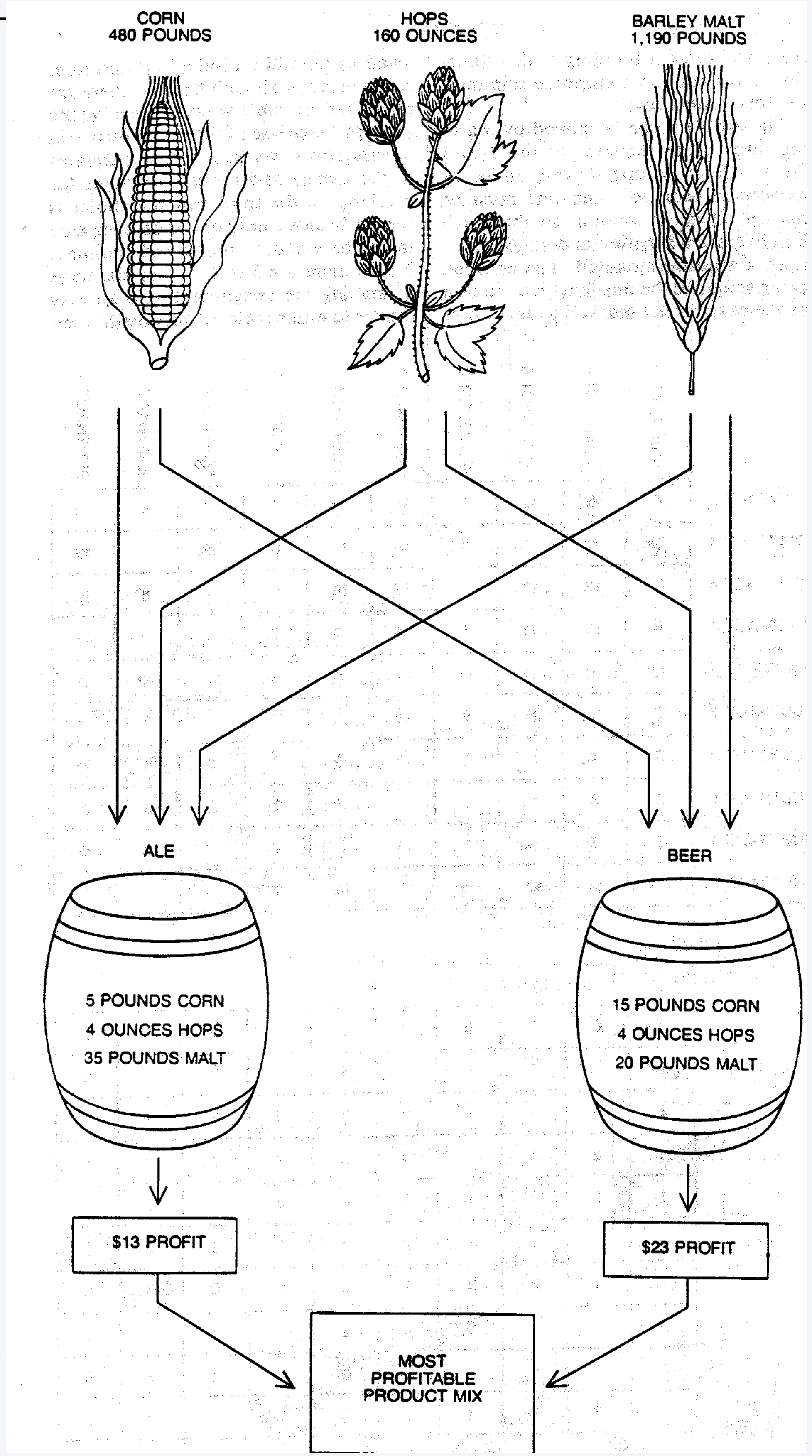
Ale Beer

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 13A & + & 23B & & \\
\text{s. t.} & 5A & + & 15B & \leq & 480 \\
 & 4A & + & 4B & \leq & 160 \\
 & 35A & + & 20B & \leq & 1190 \\
 & A & , & B & \geq & 0
\end{array}
$$

Profit
Corn
Hops
Malt

vincoli

variabile di decisione



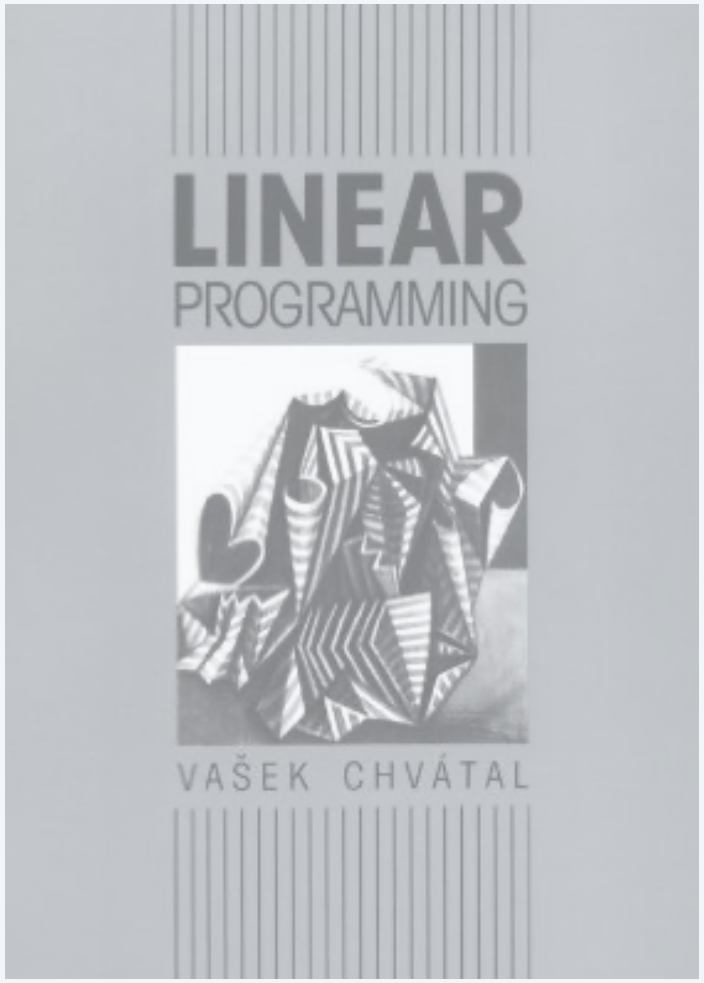
Riferimento (divulgativo)

SCIENTIFIC AMERICAN JUNE 1981

The Allocation of Resources by Linear Programming

Abstract, crystal-like structures in many geometrical dimensions can help to solve problems in planning and management. A new algorithm has set upper limits on the complexity of such problems

By Robert G. Bland



Ottimizzazione Lineare I

- *a refreshing example*
- *forma standard*
- *fundamental questions*
- *geometry*
- *linear algebra*
- *simplex algorithm*

Forma standard di un problema di programmazione lineare (PL)

“Forma standard” di una PL.

- Input: numeri reali a_{ij}, c_j, b_i.
- Output: numeri reali x_j.
- n = # variabili di decisione, m = # vincoli.
- Massimizzare una funzione obiettivo lineare sotto vincoli di *uguaglianza* lineari e vincoli di *non-negatività* delle variabili.

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(P)} & \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
 & \text{s. t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & 1 \le i \le m \\
 & & x_j & \ge & 0 & 1 \le j \le n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{(P)} & \max & c^T x & & \\
 & \text{s. t.} & Ax & = & b \\
 & & x & \ge & 0
\end{array}
$$

Lineare. Nessun termine x^2, $x\,y$, $\arccos(x)$, ecc.

Programmazione. Nel senso di "pianificazione" (non nel senso informatico).

Problema del birrificio: conversione in forma standard

Istanza originale.

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 13A & + & 23B & & \\
\text{s. t.} & 5A & + & 15B & \leq & 480 \\
& 4A & + & 4B & \leq & 160 \\
& 35A & + & 20B & \leq & 1190 \\
& A & , & B & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma standard.

- Aggiunta di una variabile di slack per ogni disuguaglianza originale.
- Il problema diventa in dimensione 5 (anziché 2).

$$
\begin{array}{lrcrcccccccr}
\max & 13A & + & 23B & & & & & & & & \\
\text{s. t.} & 5A & + & 15B & + & S_C & & & & & = & 480 \\
& 4A & + & 4B & & & + & S_H & & & = & 160 \\
& 35A & + & 20B & & & & & + & S_M & = & 1190 \\
& A & , & B & , & S_C & , & S_H & , & S_M & \geq & 0
\end{array}
$$

Forme equivalenti

La conversione alla forma standard è semplice.

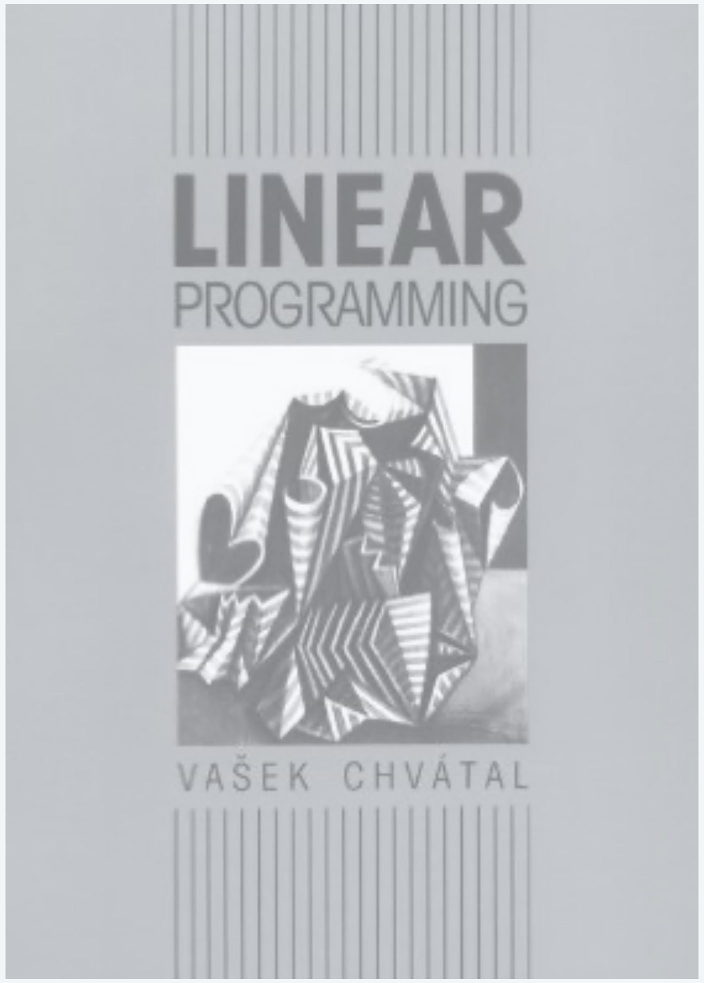
$$
\begin{array}{llrcl}
\text{(P)} & \max & c^T x & & \\
 & \text{s. t.} & Ax & = & b \\
 & & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Minore o uguale. $x + 2y - 3z \leq 17 \;\Rightarrow\; x + 2y - 3z + s = 17,\, s \geq 0$

Maggiore o uguale. $x + 2y - 3z \geq 17 \;\Rightarrow\; x + 2y - 3z - s = 17,\, s \geq 0$

Da min a max. $\min\; x + 2y - 3z \;\Rightarrow\; \max\; -x - 2y + 3z$

Da variabili svincolate a non-negative. x svincolata $\Rightarrow\; x = x^+ - x^-,\; x^+ \geq 0,\, x^- \geq 0$



LINEAR PROGRAMMING I

- *a refreshing example*
- *standard form*
- *questioni fondamentali*
- *geometry*
- *linear algebra*
- *simplex algorithm*

Questioni fondamentali

Problema LP. Per $A \in \Re^{m \times n}$, $b \in \Re^m$, $c \in \Re^n$, $\alpha \in \Re$, esiste $x \in \Re^n$ tale che:
$Ax = b,\ \ x \geq 0,\ \ c^{\mathrm{T}} x \geq \alpha$?

Q. LP è in **NP**?

Q. LP è in co-**NP**?

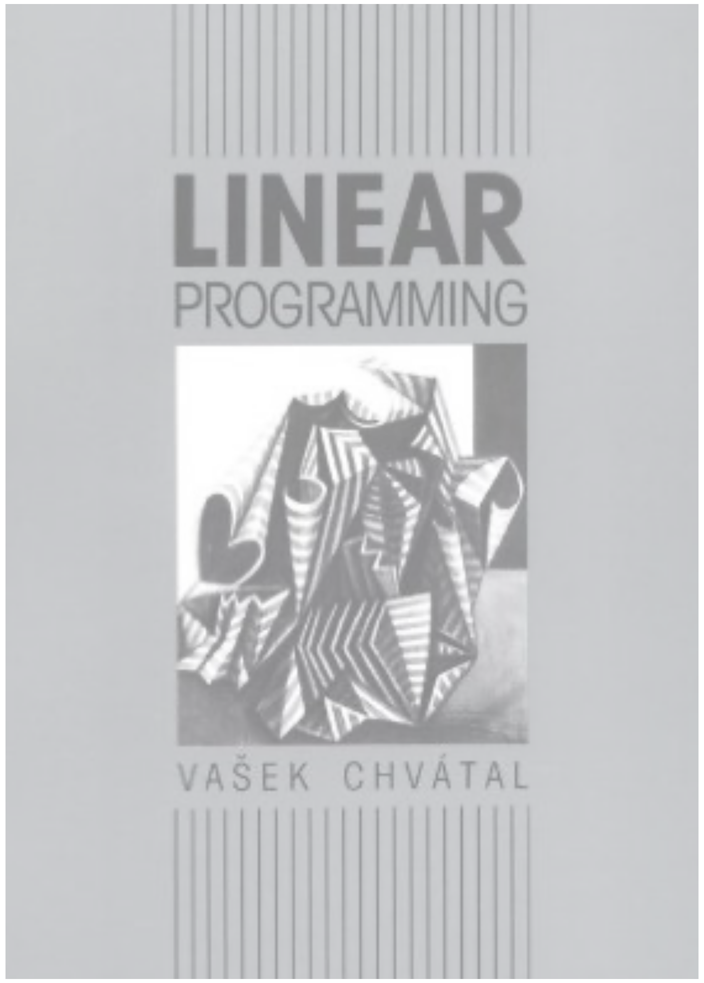
Q. LP è in **P**?

Q. LP è in $\mathbf{P}_{\Re}$?

Modello Blum–Shub–Smale

Taglia dell'input.

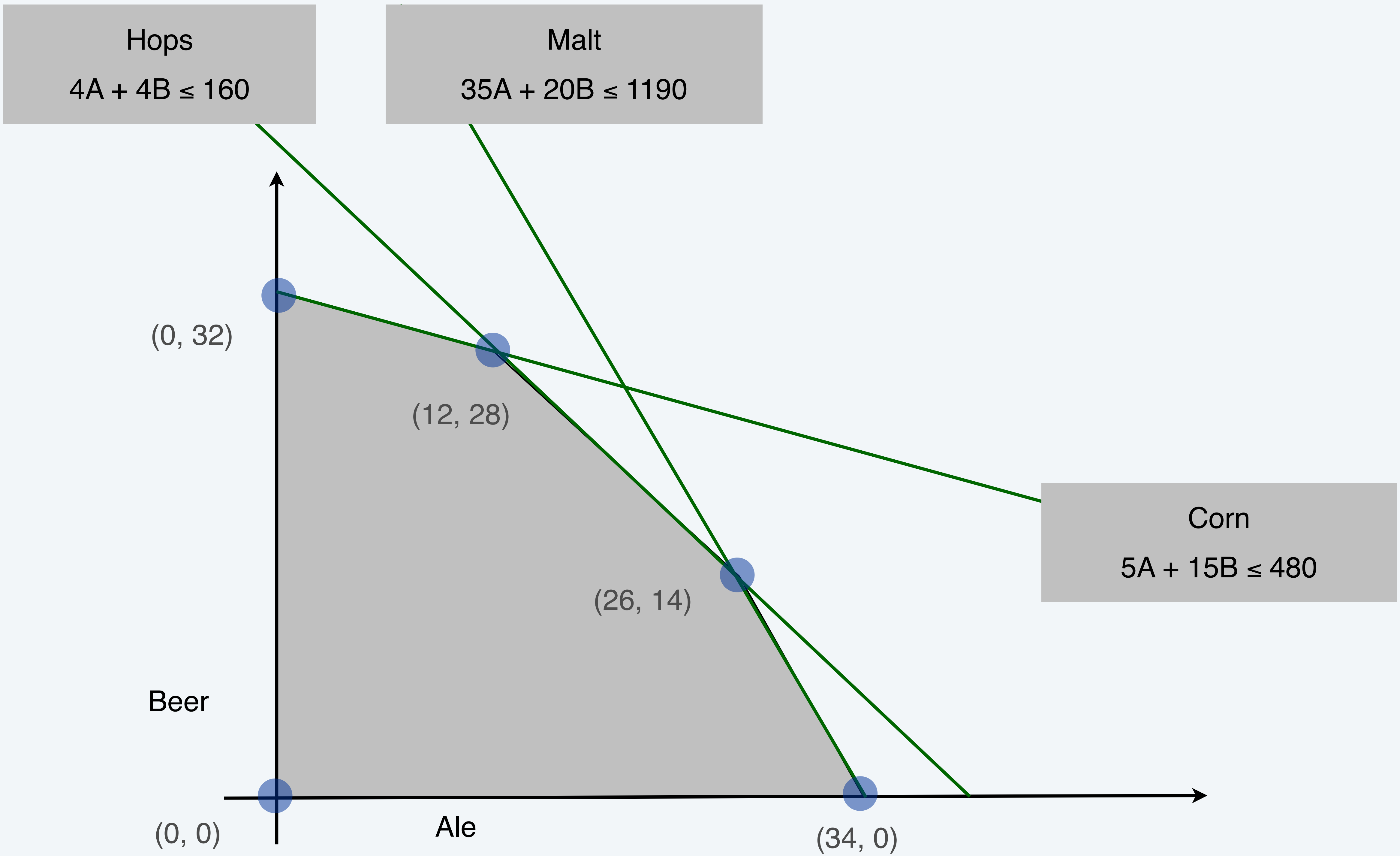
- n = numero di variabili.
- m = numero di vincoli.
- L = numero di bit usati per codificare l'istanza di input.



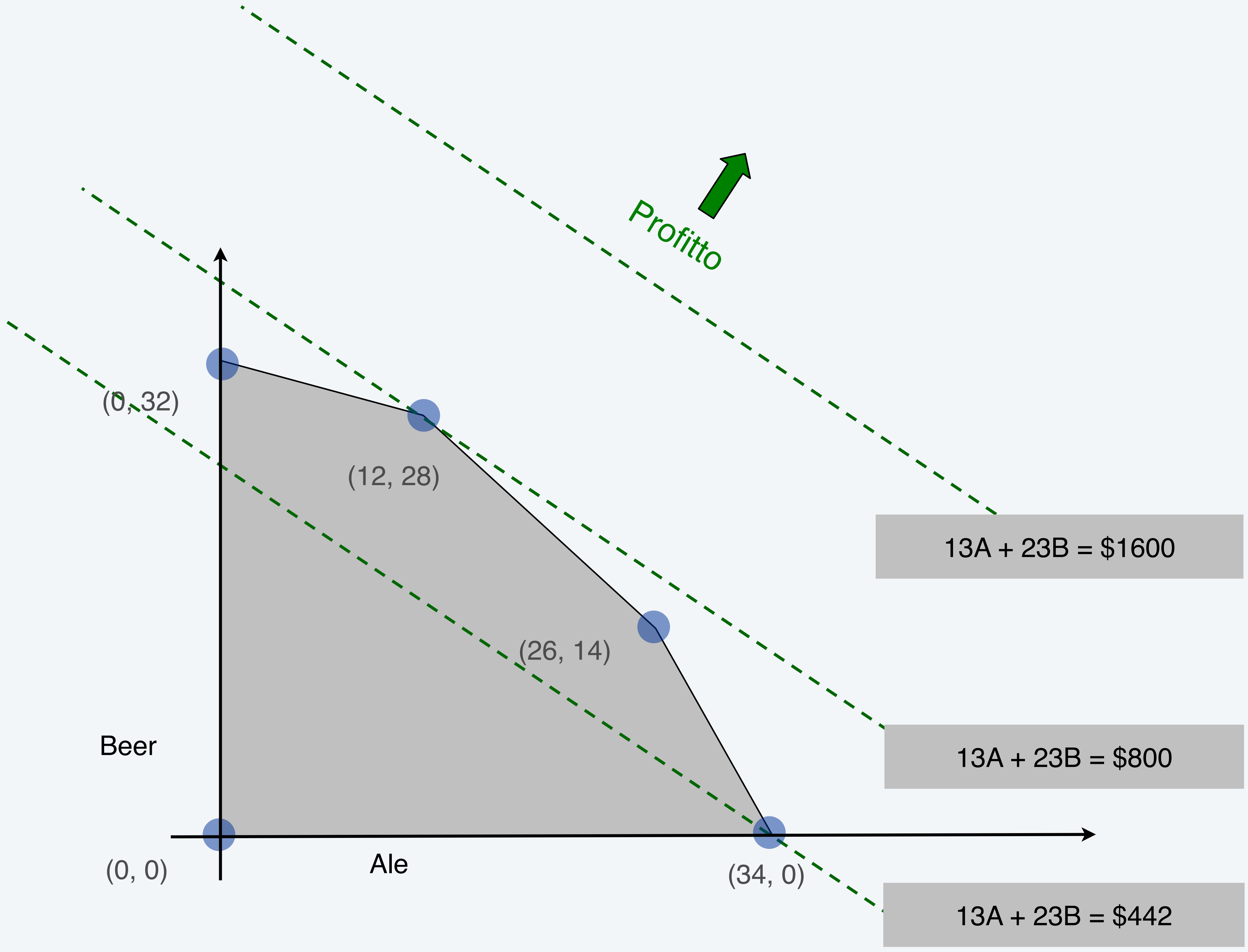
LINEAR PROGRAMMING I

- *a refreshing example*
- *standard form*
- *fundamental questions*
- *geometria*
- *linear algebra*
- *simplex algorithm*

Problema del birrificio: regione ammissibile

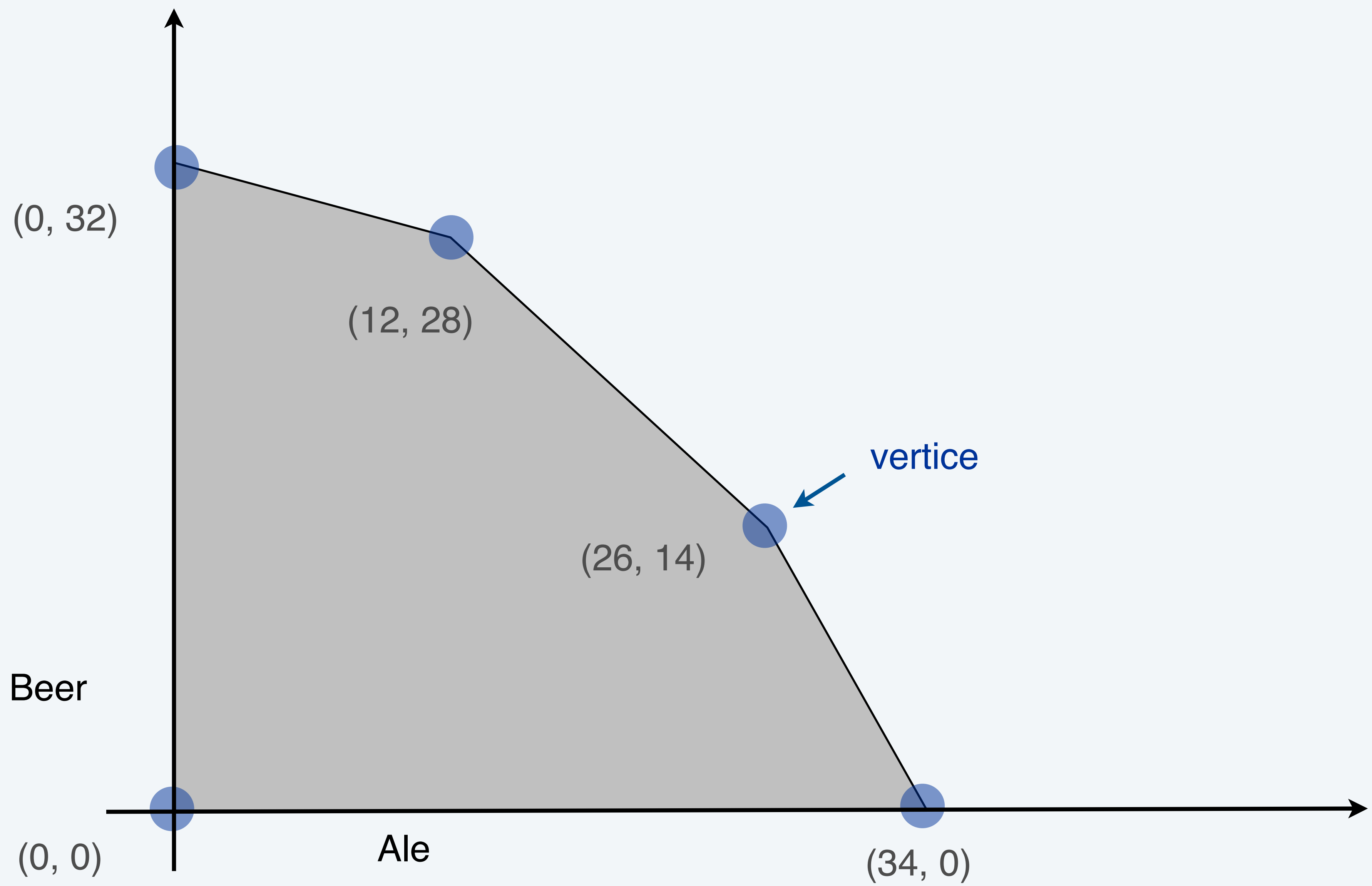


Problema del birrificio: funzione obiettivo



Problema del birrificio: geometria

Osservazione. A prescindere dai coefficienti della funzione obiettivo, vi è sempre una soluzione ottima che risiede su un vertice del poliedro.



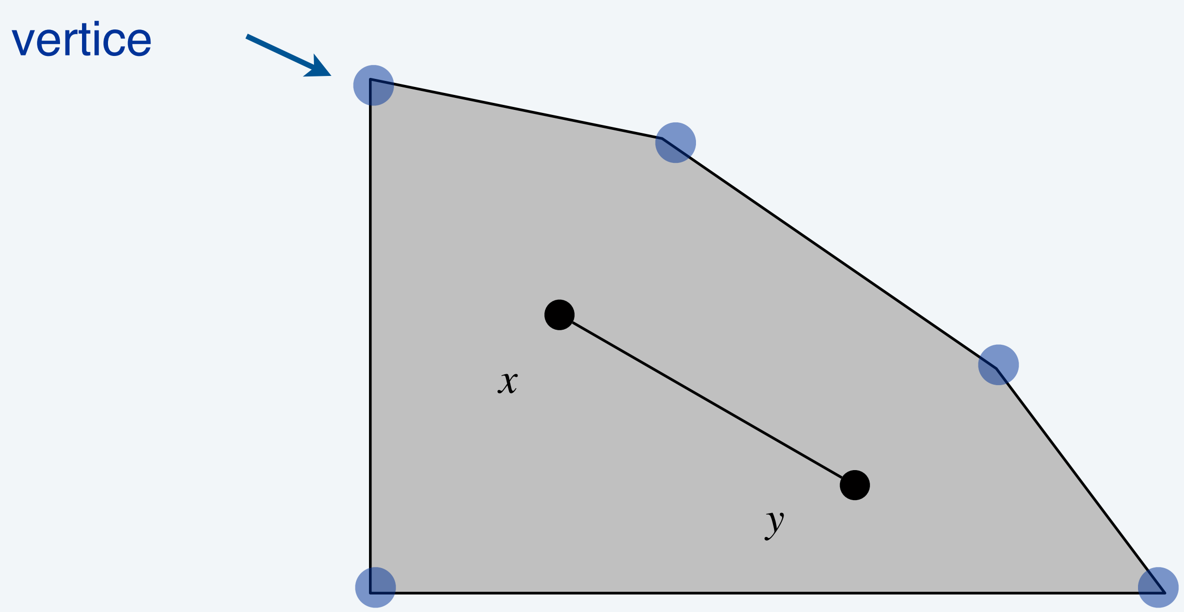
Convessità

Insieme convesso. Se due punti x e y sono nell'insieme, lo stesso vale per $\lambda x + (1-\lambda) y$ for $0 \le \lambda \le 1$.

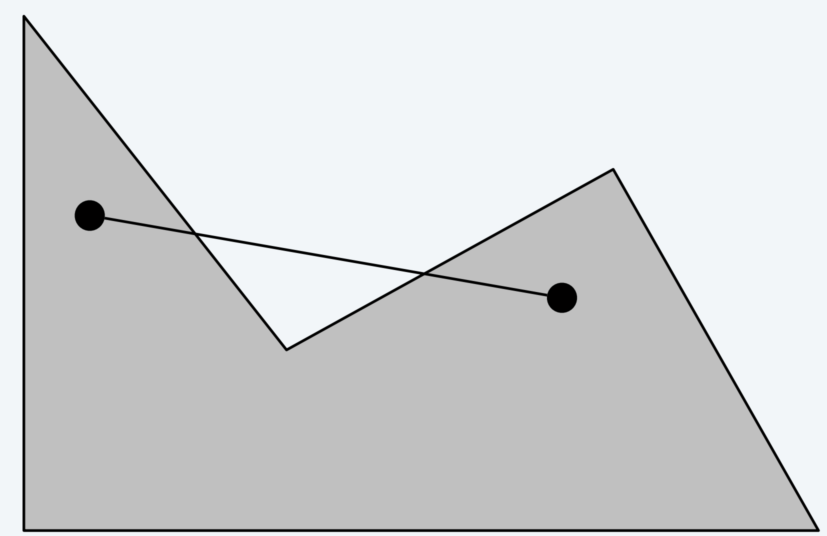
combinazione convessa

non è un vertice sse $\exists\, d \neq 0$ t.c. $x \pm d$ è nell'insieme

Vertice. Un punto x nell'insieme che non può essere scritto come combinazione convessa propria di due punti distinti dell'insieme.



convesso



non convesso

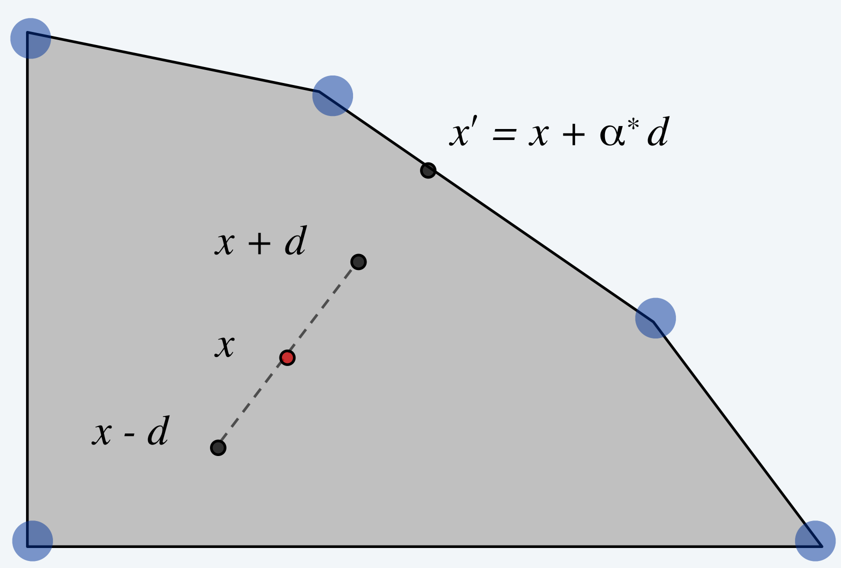
Osservazione. La regione ammissibile di un'istanza di PL è un'insieme convesso.

Purificazione

Teorema. Se esiste una soluzione ottima di (P), allora esiste una soluzione ottima che è un vertice.

$$
\begin{array}{llrcl}
(\mathrm{P}) & \max & c^T x & & \\
 & \text{s. t.} & Ax & = & b \\
 & & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Intuizione. Se x non è un vertice, spostati in una direzione in cui la funzione obiettivo non aumenta, finché non raggiungi un bordo. Ripeti finché possibile.



Purificazione

Teorema. Se esiste una soluzione ottima di (P), allora esiste una soluzione ottima che è un vertice.

Dim.

- Sia x una soluzione ottima che non è un vertice.
- Esiste una direzione $d \neq 0$ tale che $x \pm d \in P$.
- $A\,d = 0$ in quanto $A(x \pm d) = b$.
- Possiamo assumere $c^{\mathrm{T}} d \leq 0$ (scambiando eventualmente d con $-d$).
- Consideriamo $x + \lambda\, d,\ \ \lambda > 0$:

Caso 1. [esiste j tale che $d_j < 0$]

- Aumentiamo λ a λ^* finché una qualunque componente di $x + \lambda\, d$ diviene 0.
- $x + \lambda^* d$ è ammissibile poiché $A(x + \lambda^* d) = Ax = b$ e $x + \lambda^* y \geq 0$.
- $x + \lambda^* d$ ha una componente nulla in più di x.
- $c^{\mathrm{T}} x' = c^{\mathrm{T}} (x + \lambda^* d) = c^{\mathrm{T}} x + \lambda^* c^{\mathrm{T}} d \leq c^{\mathrm{T}} x$.

$d_k = 0$ se $x_k = 0$ poiché $x \pm d \in P$

Purificazione

Teorema. Se esiste una soluzione ottima di (P), allora esiste una soluzione ottima che è un vertice.

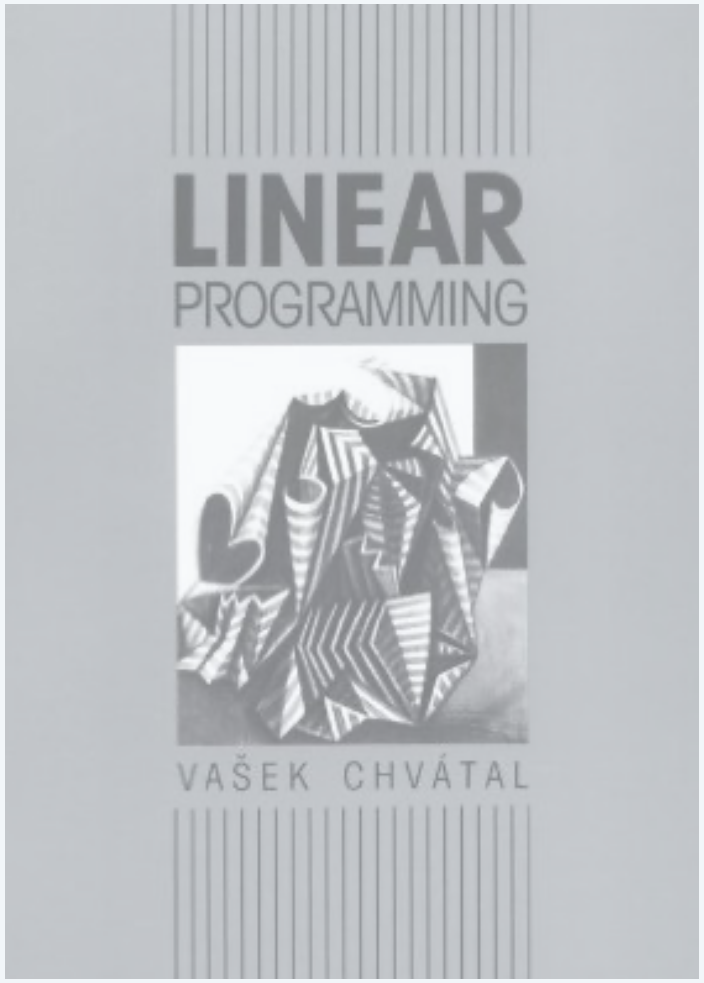
Dim.

- Sia x una soluzione ottima che non è un vertice.
- Esiste una direzione $d \neq 0$ tale che $x \pm d \in P$.
- $A\,d = 0$ in quanto $A(x \pm d) = b$.
- Possiamo assumere $c^{\mathrm{T}} d \leq 0$ (scambiando eventualmente d con $-d$).
- Consideriamo $x + \lambda\, d,\ \lambda > 0$:

Caso 2. [$d_j \geq 0$ per ogni j]

- $x + \lambda d$ è ammissibile per ogni $\lambda \geq 0$ poiché $A(x + \lambda d) = b$ e $x + \lambda d \geq x \geq 0$.
- Per $\lambda \to \infty,\ c^{\mathrm{T}}(x + \lambda d) \to \infty$ poiché $c^{\mathrm{T}} d < 0$. •

se $c^{\mathrm{T}} d = 0$, scegliamo d così che valga il caso 1

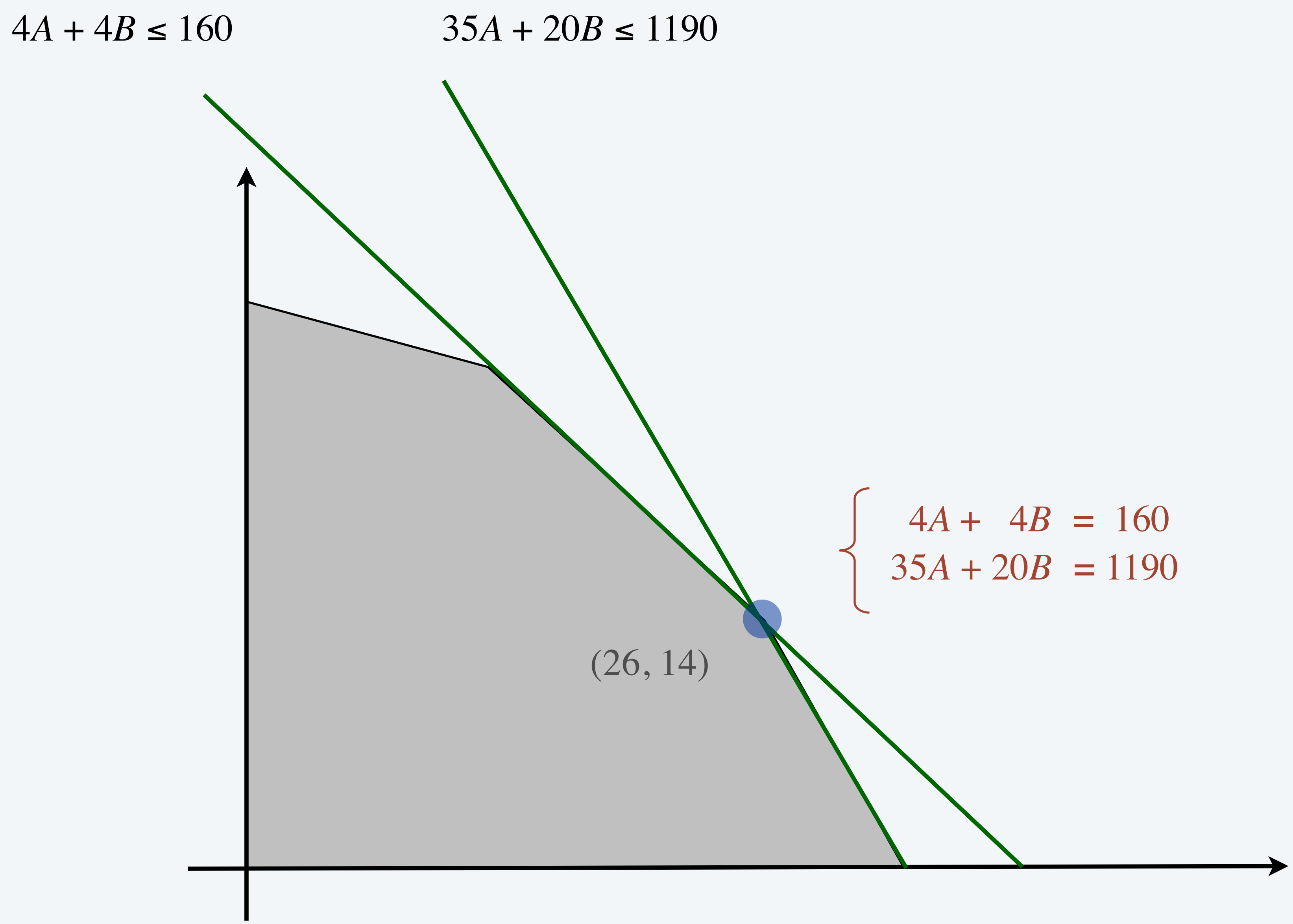


LINEAR PROGRAMMING I

- a refreshing example
- standard form
- fundamental questions
- geometry
- algebra lineare
- simplex algorithm

Intuizione

Intuizione. Un vertice in $\Re^m$ è specificato in modo univoco da m equazioni linermente indipendenti.



Soluzioni di base ammissibili [Basic feasible solutions]

Teorema. Sia $P = \{ x : Ax = b, x \geq 0 \}$. Per $x \in P$, definiamo $B = \{ j : x_j > 0 \}$.
Allora, x è un vertice sse A_B ha colonne linearmente indipendenti.

Notazione. Sia B un insieme di indici di colonna. Definiamo A_B come il sottoinsieme di colonne di A indicizzato da B.

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \{1, 3\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzioni di base ammissibili [Basic feasible solutions]

Teorema. Sia $P = \{ x : Ax = b, x \geq 0 \}$. Per $x \in P$, definiamo $B = \{ j : x_j > 0 \}$. Allora, x è un vertice sse A_B ha colonne linearmente indipendenti.

Dim. $\Leftarrow$

- Assumiamo che x non sia un vertice.
- Esiste una direzione $d \neq 0$ tale che $x \pm d \in P$.
- $A\,d = 0$ poiché $A(x \pm d) = b$.
- Definiamo $B' = \{ j : d_j \neq 0 \}$.
- $A_{B'}$ ha colonne linearmente dipendenti poiché $d \neq 0$.
- Inoltre, $d_j = 0$ ogniqualvolta $x_j = 0$ in quanto $x \pm d \geq 0$.
- Quindi $B' \subseteq B$, e $A_{B'}$ è una sottomatrice di A_B.
- Quindi, A_B ha colonne linearmente dipendenti.

Soluzioni di base ammissibili [Basic feasible solutions]

Teorema. Sia $P = \{ x : Ax = b, x \geq 0 \}$. Per $x \in P$, definiamo $B = \{ j : x_j > 0 \}$. Allora, x è un vertice sse A_B ha colonne linearmente indipendenti.

Dim. $\Rightarrow$

- Assumiamo che A_B abbia colonne linearmente dipendenti.
- Esiste $d \neq 0$ tale che $A_B\, d = 0$.
- Estendiamo d in $\Re^n$ aggiungendo eventualmente componenti pari a 0.
- Ora, $A\, d = 0$ e $d_j = 0$ ogniqualvolta $x_j = 0$.
- Per λ sufficientemente piccolo, $x \pm \lambda\, d \in P \Rightarrow x$ non è un vertice. •

Soluzioni di base ammissibili [Basic feasible solutions]

Teorema. Dato $P = \{ x : Ax = b, x \geq 0 \}$, x è un vertice sse esiste $B \subseteq \{ 1, \ldots, n \}$ tale che $| B | = m$ e:

- A_B è invertibile.
- $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$.
- $x_N = 0$.

soluzione di base ammissibile

Dim. Arricchiamo A_B con colonne linearmente indipendenti (se necessario).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

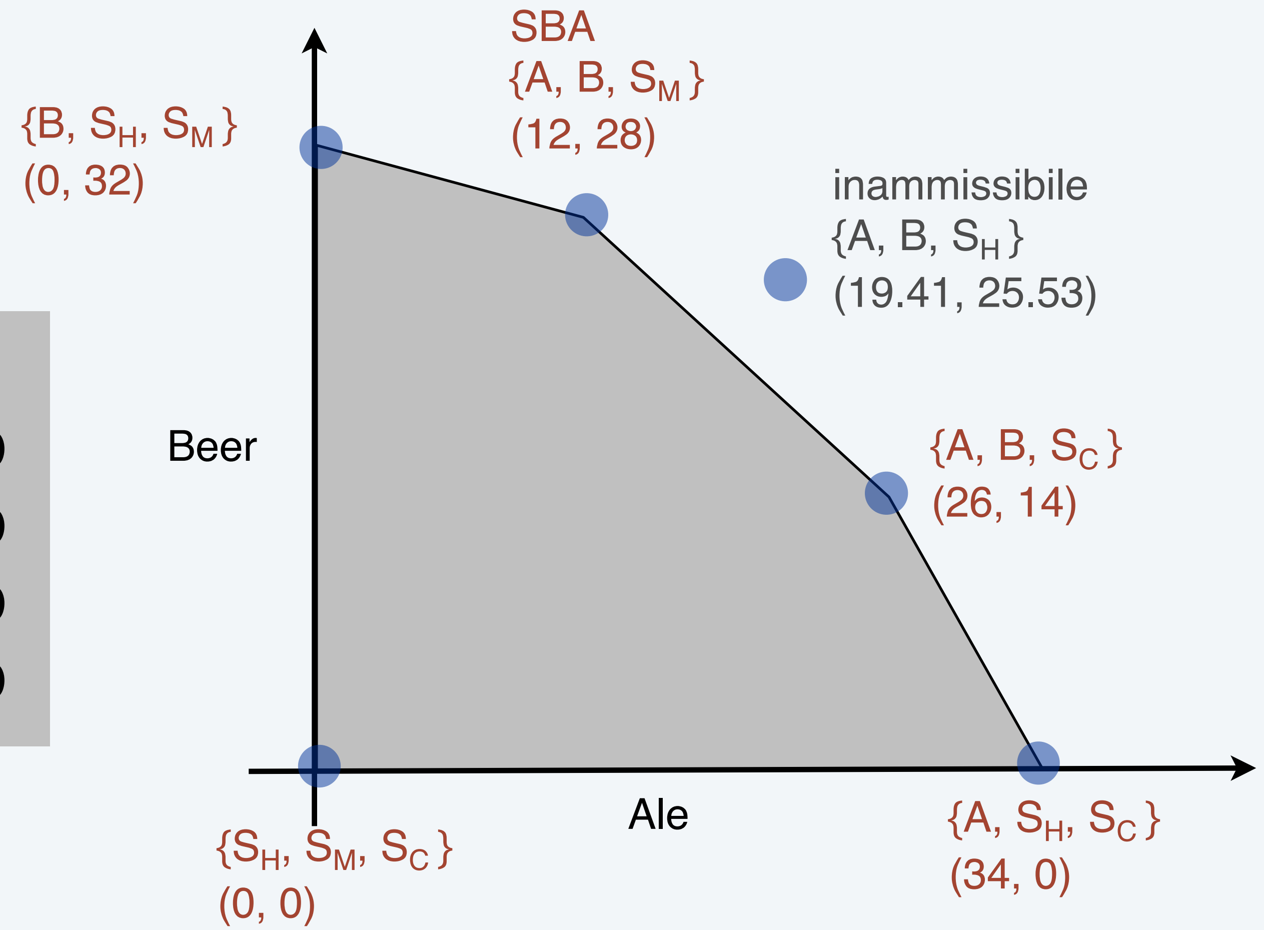
$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \{ 1, 3, 4 \}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Assunzione. $A \in \Re^{m \times n}$ ha rango pieno e pari al suo numero di righe.

Soluzioni di base ammissibili: esempio

Soluzioni di base ammissibili (SBA).

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\max & 13A & + & 23B & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 5A & + & 15B & + & S_C & & & & & = & 480 \\
 & 4A & + & 4B & & & + & S_H & & & = & 160 \\
 & 35A & + & 20B & & & & & + & S_M & = & 1190 \\
 & A & , & B & , & S_C & , & S_H & , & S_M & \geq & 0
\end{array}
$$



Questioni fondamentali

LP. Per $A \in \Re^{m \times n}$, $b \in \Re^m$, $c \in \Re^n$, $\alpha \in \Re$, esiste $x \in \Re^n$ tale che: $Ax = b,\ x \ge 0,\ c^T x \ge \alpha$?

Domanda. LP è in NP?

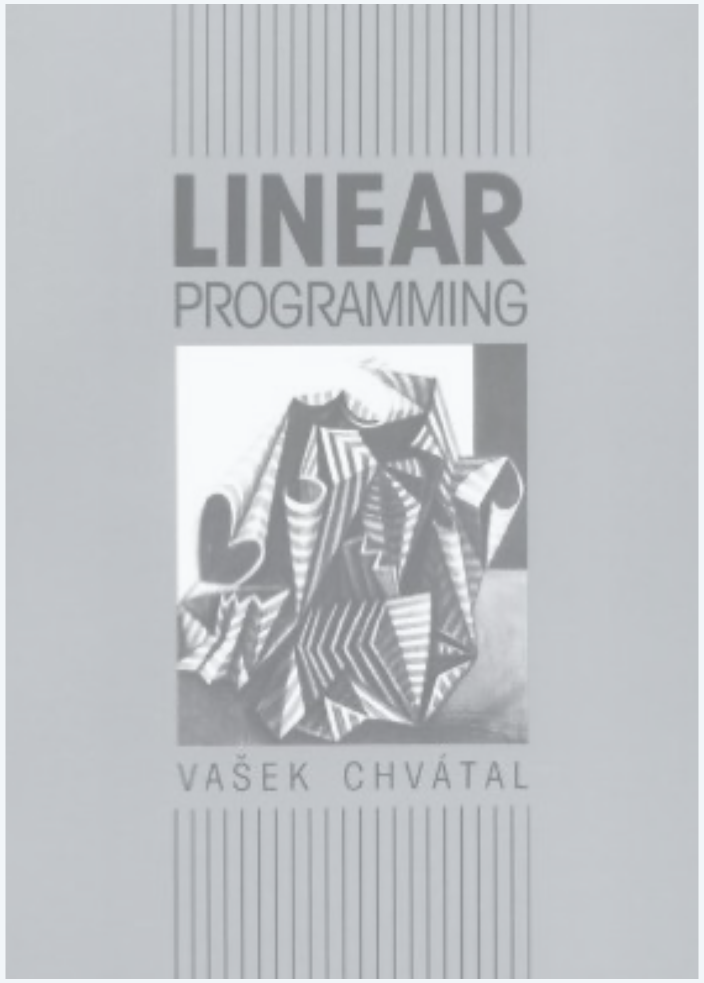
Risposta. Sì.

- Numero di vertici $\le C(n, m) = \binom{n}{m} \le n^m$.
- Regola di Cramer $\Rightarrow$ l'ammissibilità di un vertice è verificabile in tempo polinomiale.

Regola di Cramer. Per $B \in \Re^{n \times n}$ invertibile, $b \in \Re^n$, la soluzione di $Bx = b$ è data da:

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$$

la i-esima colonna di B è rimpiazzata da b



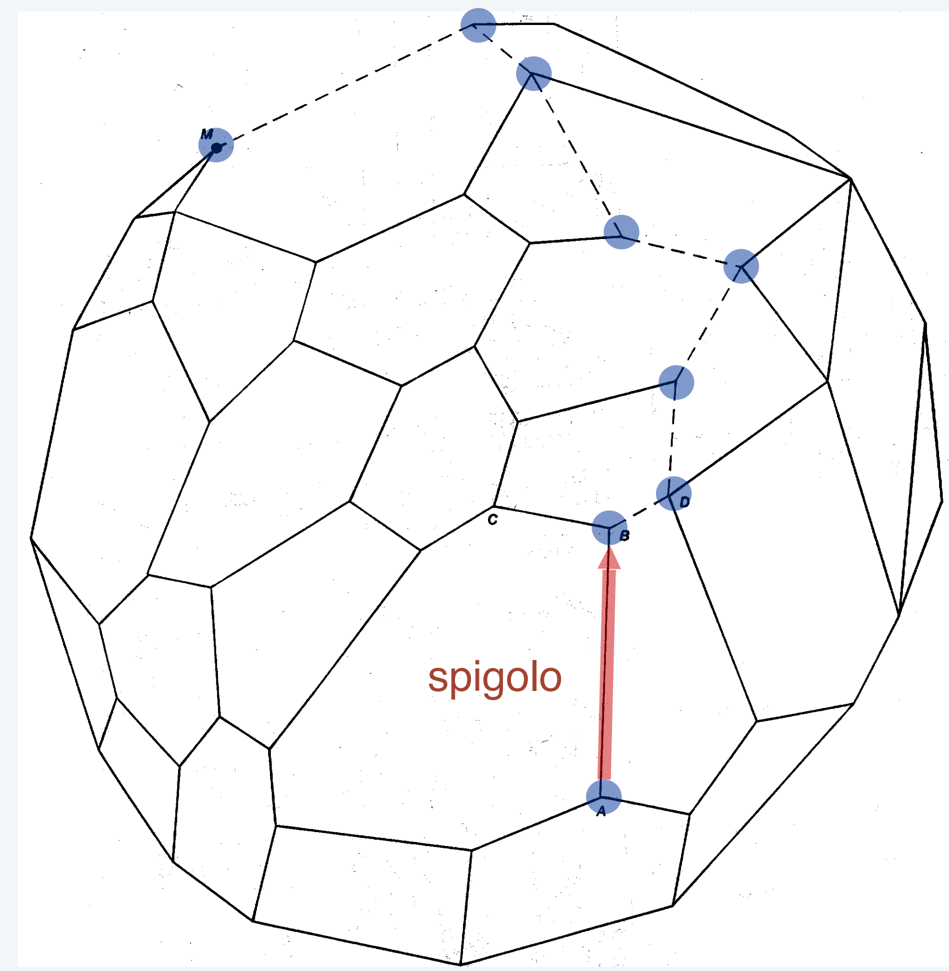
OTTIMIZZAZIONE LINEARE I

- *a refreshing example*
- *standard form*
- *fundamental questions*
- *geometry*
- *linear algebra*
- *algoritmo del simplesso*

Algoritmo del simplesso: intuizione

Algoritmo del simplesso. [George Dantzig 1947] Si sposta da una SBA ad una SBA adiacente, senza diminuire il valore della funzione obiettivo.

una variabile di base è rimpiazzata da un'altra



Proprietà avida. Una SBA è ottima sse nessuna SBA adiacente è migliore.

Problematica. Il numero di SBA può essere esponenziale!

Algoritmo del simplesso nella pratica

Proprietà rimarcabile. In pratica, l'algoritmo del simplesso sembra terminare molto spesso dopo al più $2(m+n)$ pivot (scambi di variabile nella base).

ma non è nota una regola di pivot polinomiale

Problematiche.

- Evitare stalli.
- Scelta del pivot.
- Mantenimento della sparsità delle soluzioni.
- Stabilità numerica.
- Preprocessing per eliminare variabili e vincoli.

Software solutori commerciali possono risolvere LP con milioni di variabili e decine di migliaia di vincoli.