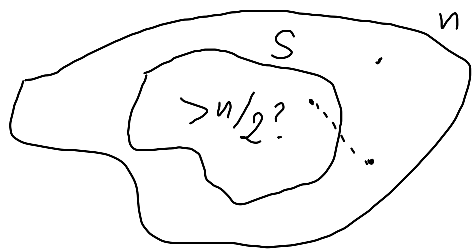
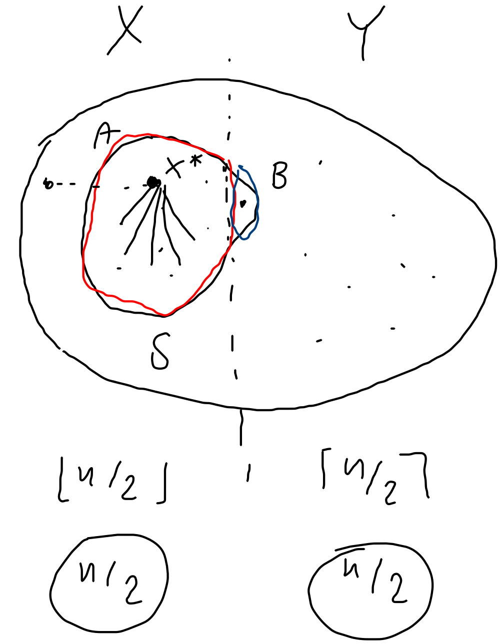
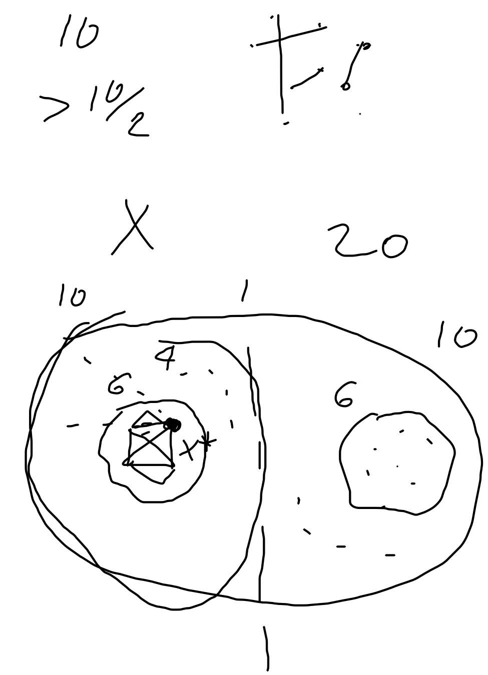
Es. 5.3 Probleme dei bancomat



Divide-et-impera





Se S è più delle metà di $X \cup Y$

allora o A o B sono più delle metà di X o Y rispettivamente

(ma non è vero il viceversa)

1. Trova ricorsivamente un elemento di maggioranza di X (x^*) e uno di Y (y^*), se esistono
2. Conta $\to n_{x^*} = |\{z \in X \cup Y : z \equiv x^*\}|$

   $\to n_{y^*} = |\{z \in X \cup Y : z \equiv y^*\}|$
3. Se $n_{x^*} > n/2$, restituisco x^*

   Se $n_{y^*} > n/2$, restituisco y^*

   Altrimenti restituisco 'None'

$T(n)$ = Numero di confronti effettuati su un'istanza di n banconote

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ T(n/2) + T(n/2) + 2n & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 2n & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

$k = \Theta(\log_2 n)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + 2\frac{n}{2}\right) + 2n$$

$$= 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + 2\frac{n}{4}\right) + 2\frac{n}{2}\right) + 2n$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \leq$$

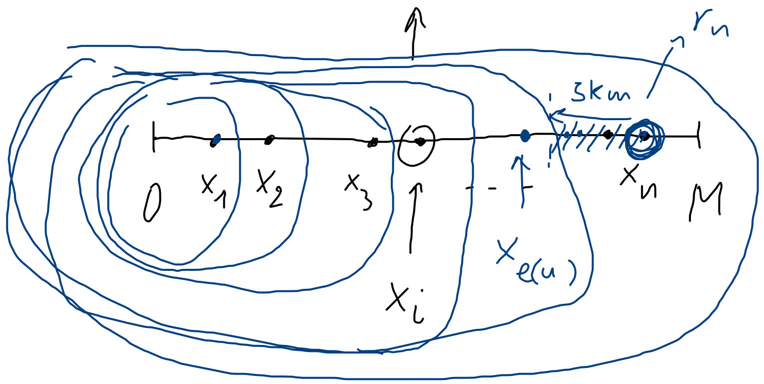
$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

$$= \dots = 2^k T(2) + 2n + n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \dots + \frac{1}{2^k}n = 2^k \cdot 1 + 2 \cdot n$$

$$= \Theta(n) + 2n$$

$$= \Theta(n).$$

KT es. risolto 6.1



↔ Schedulazione di intervalli pesati

Cartello in posizione x_i ⟶ ricavo r_i ($r_i > 0$)

Non posso piazzare 2 cartelloni a distanza minore o uguale a 5km uno dall'altro.

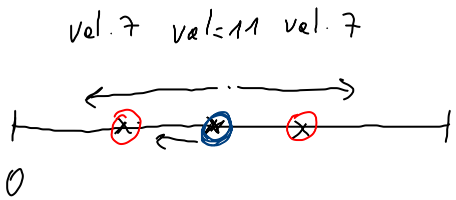
Massimizzare il ricavo totale.

Esempio: $M = 20$, $n = 4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 7, 12, 14)$

$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (5, 6, 5, 1)$

Ricavo massimo = 10 (seleziono cartelli n.1 e n.3)



11

7 + 7 > 11

$$\begin{cases} OPT(0) = 0 \\ OPT(1) = r_1 \end{cases}$$

$OPT(j)$ = valore massimo sull'istanza con
posizioni $(x_1, \dots, x_j)$
ricavi $(r_1, \dots, r_j)$

$$\boxed{OPT(n) = \max\left(r_n + OPT(e(n)),\ OPT(n-1)\right)} \Leftarrow OPT(n) = \begin{cases} r_n + OPT(e(n)) & \text{se } x_n \text{ è selezionato} \\ OPT(n-1) & \text{se } x_n \text{ non è selezionato} \end{cases}$$