

7. FLUSSI DI RETE I

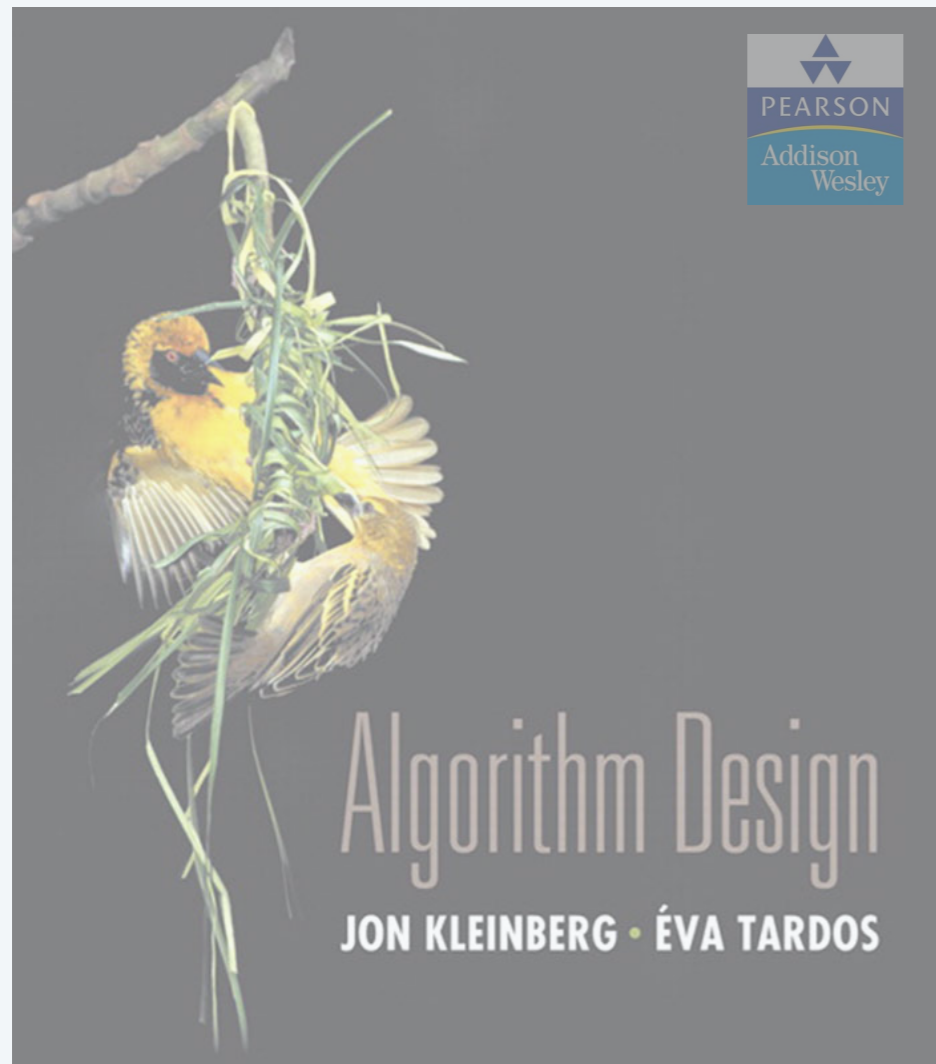
- ▶ *demo Ford–Fulkerson*
- ▶ *esempio tempo-esponenziale*
- ▶ *esempio patologico*

Traduzione e adattamento di Vincenzo Bonifaci

Lecture slides by Kevin Wayne

Copyright © 2005 Pearson–Addison Wesley

<http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos>



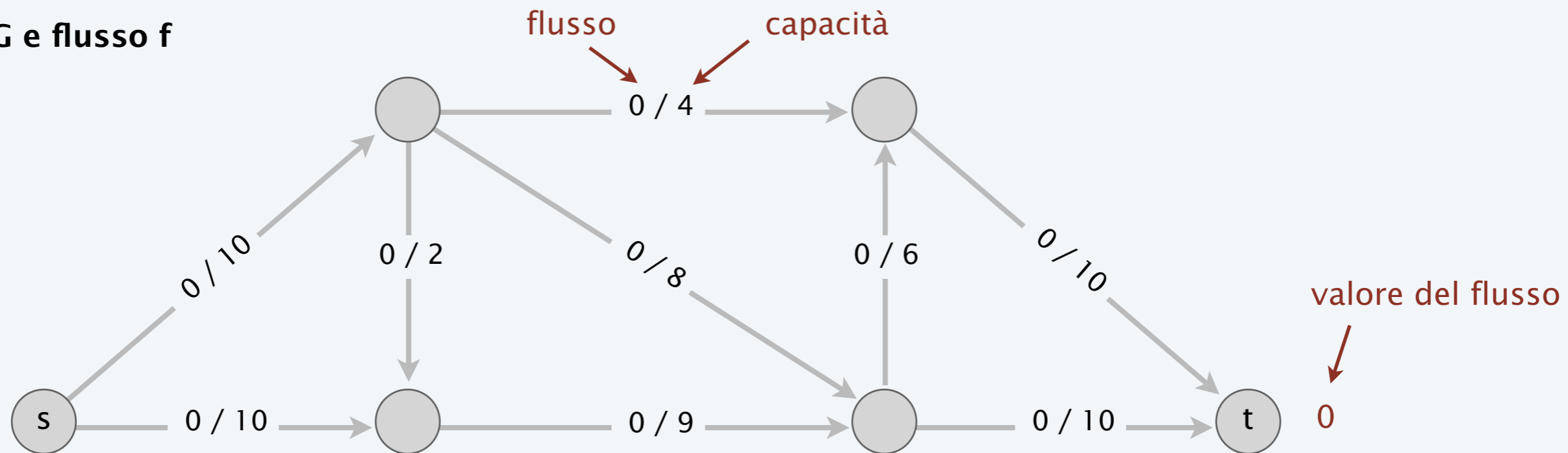
SECTION 7.1

7. FLUSSI DI RETE I

- ▶ *demo Ford–Fulkerson*
- ▶ *exponential-time example*
- ▶ *pathological example*

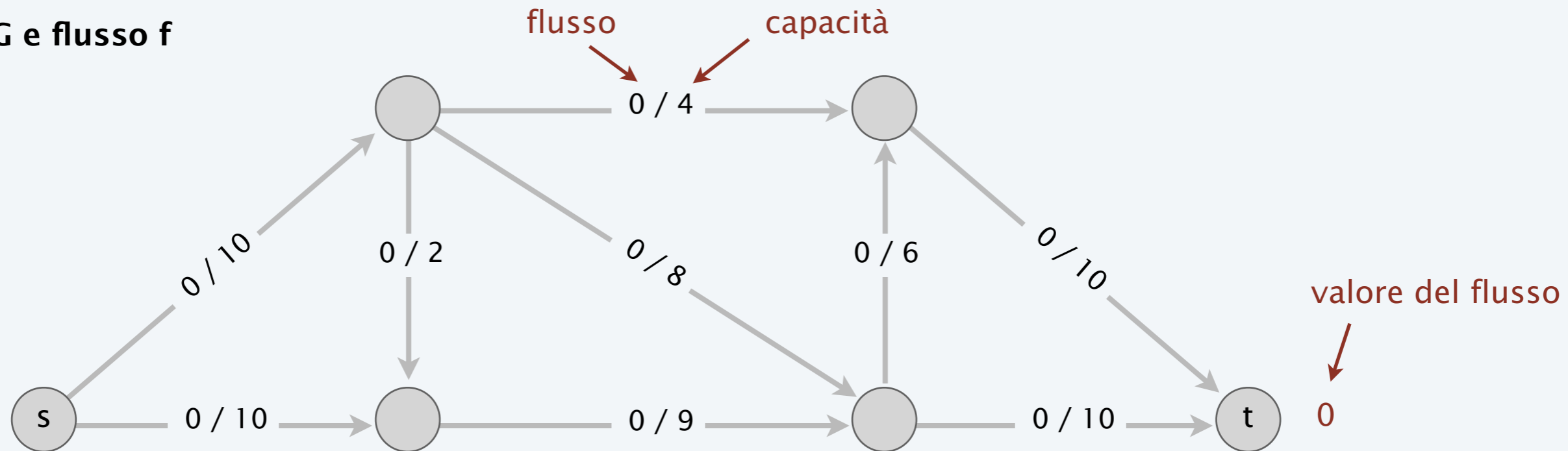
Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

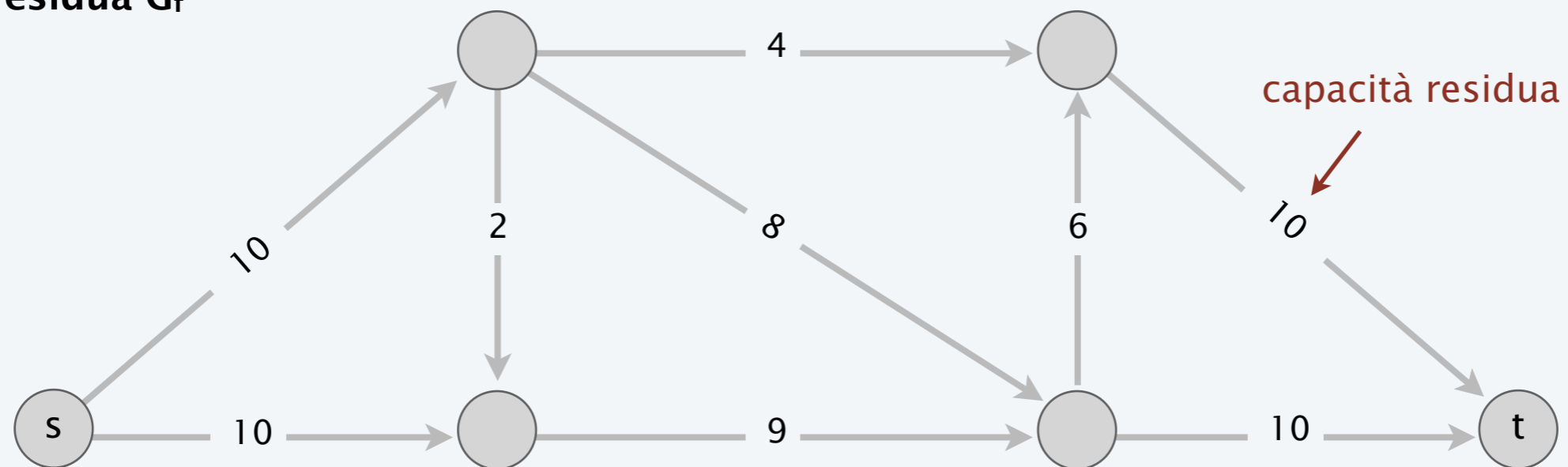


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

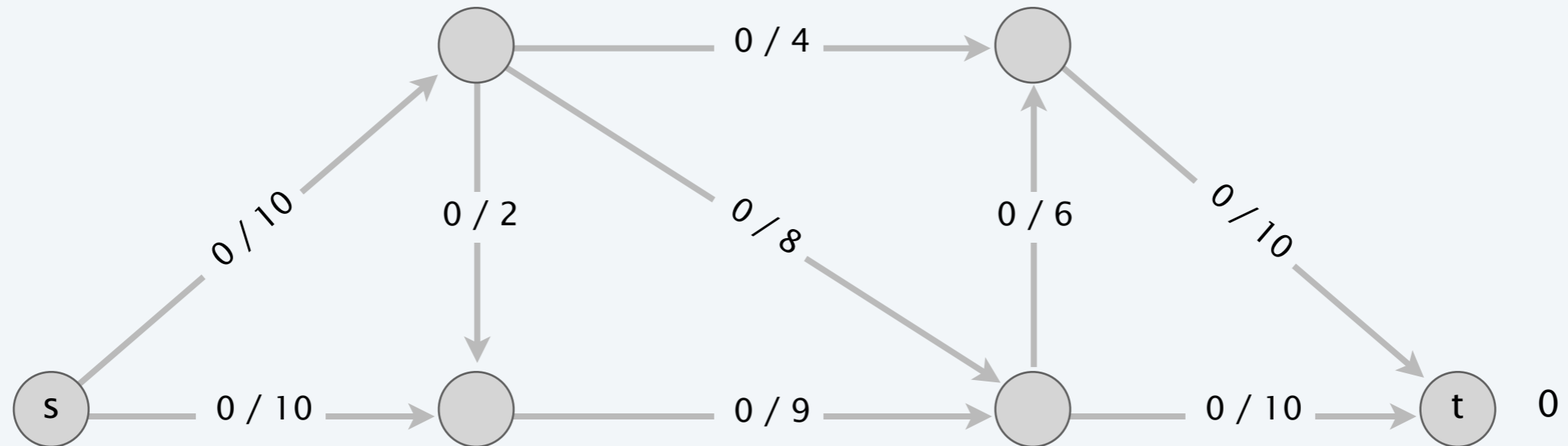


rete residua G_f

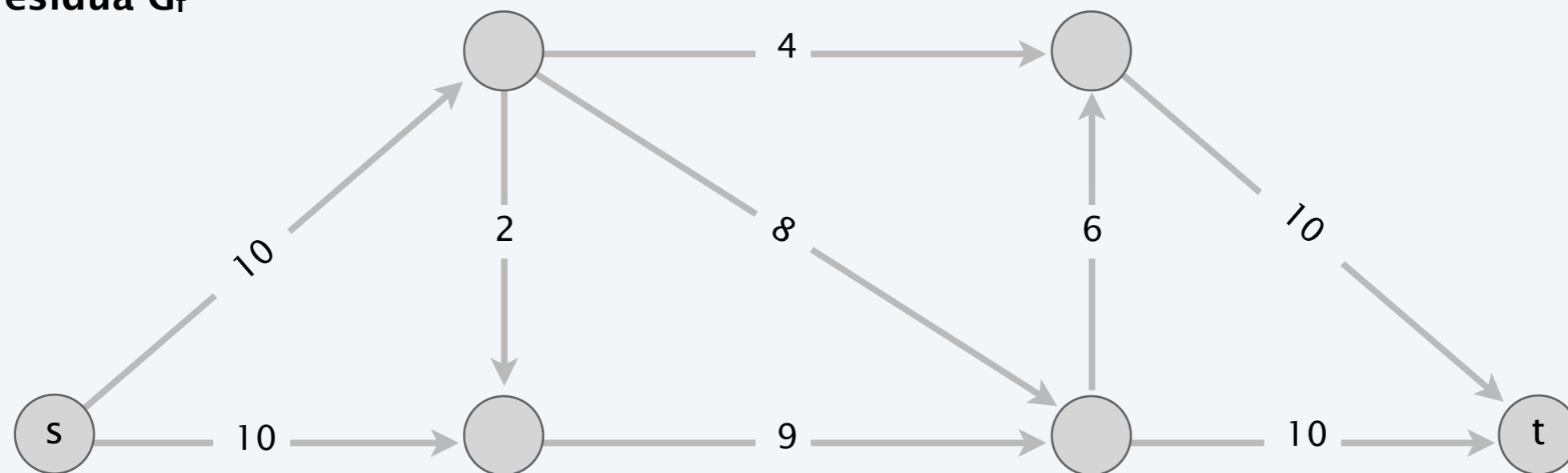


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

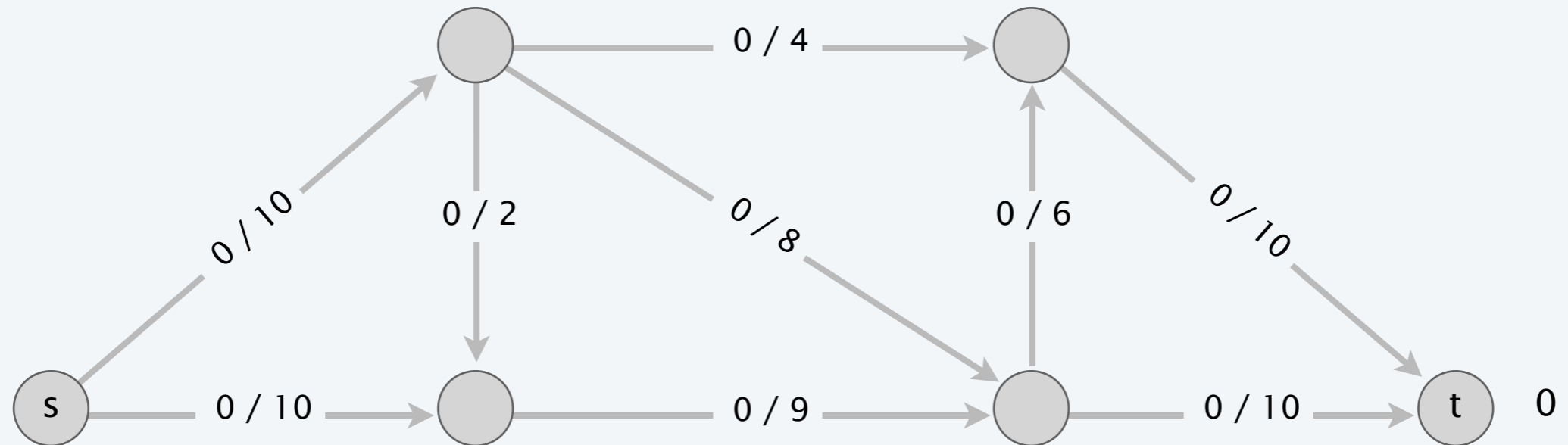


rete residua G_f

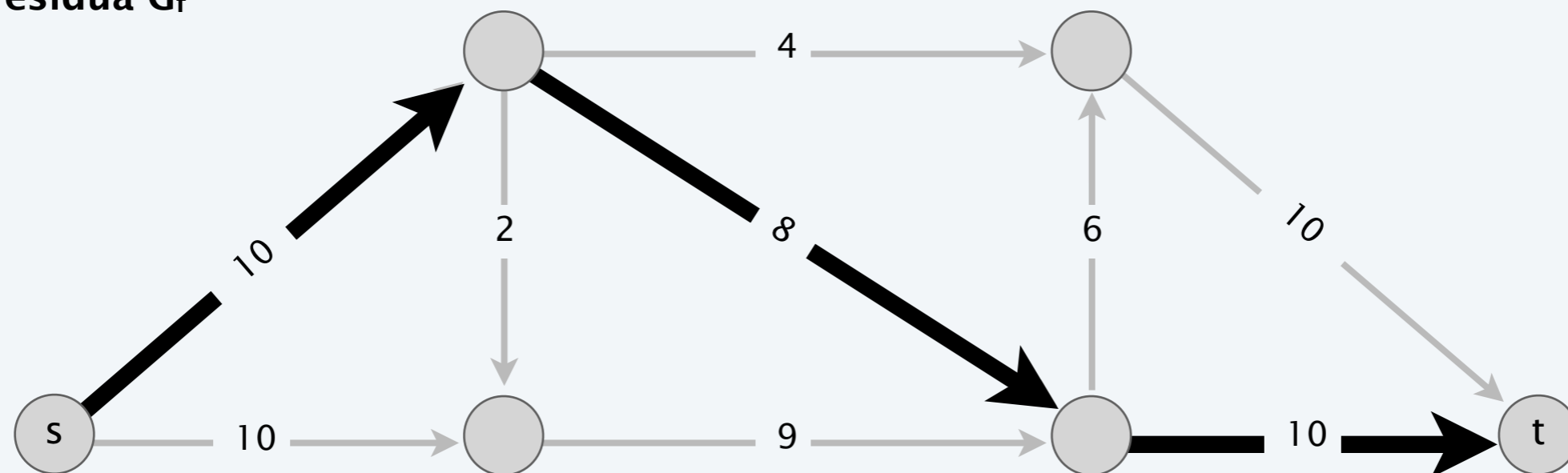


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

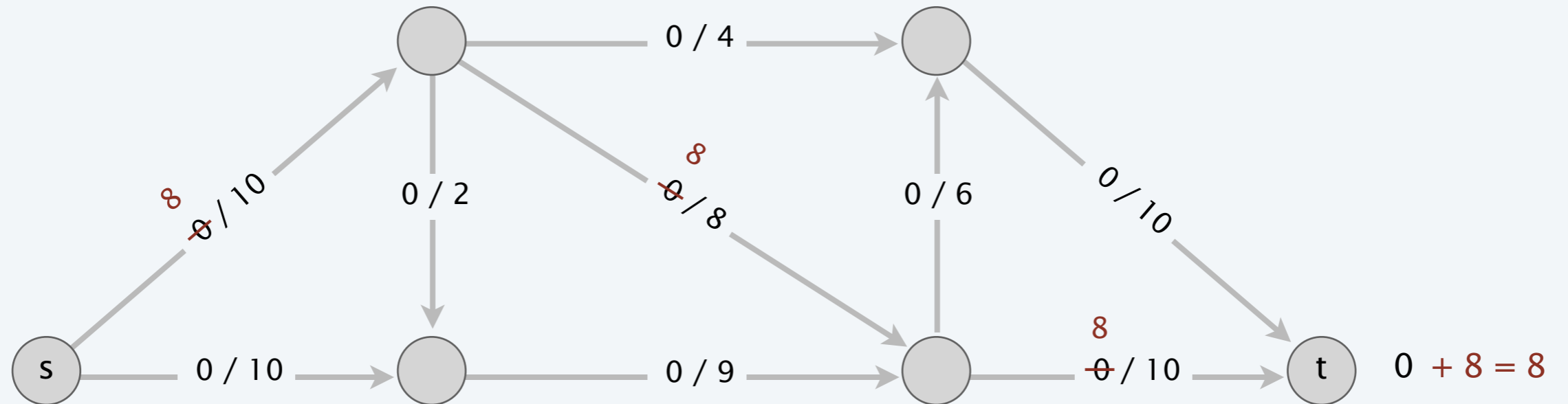


rete residua G_f

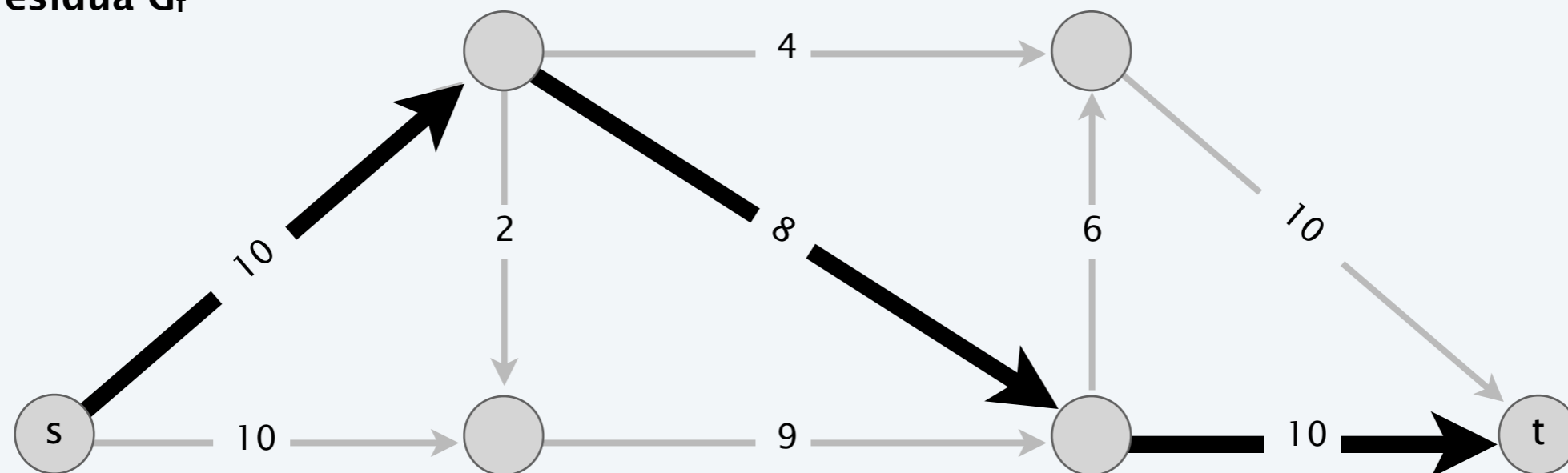


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

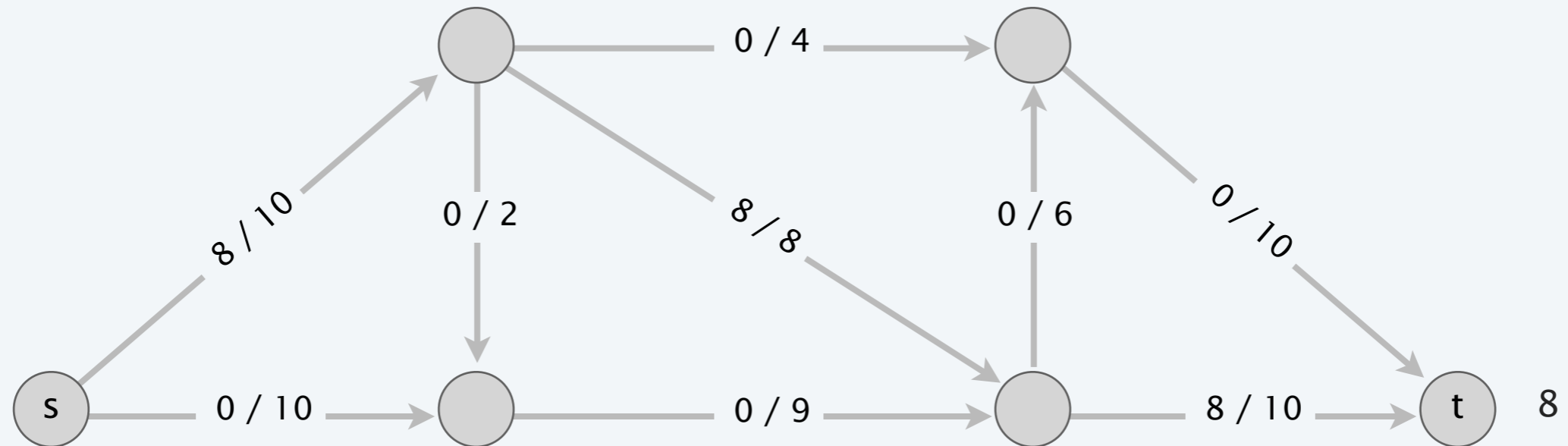


rete residua G_f

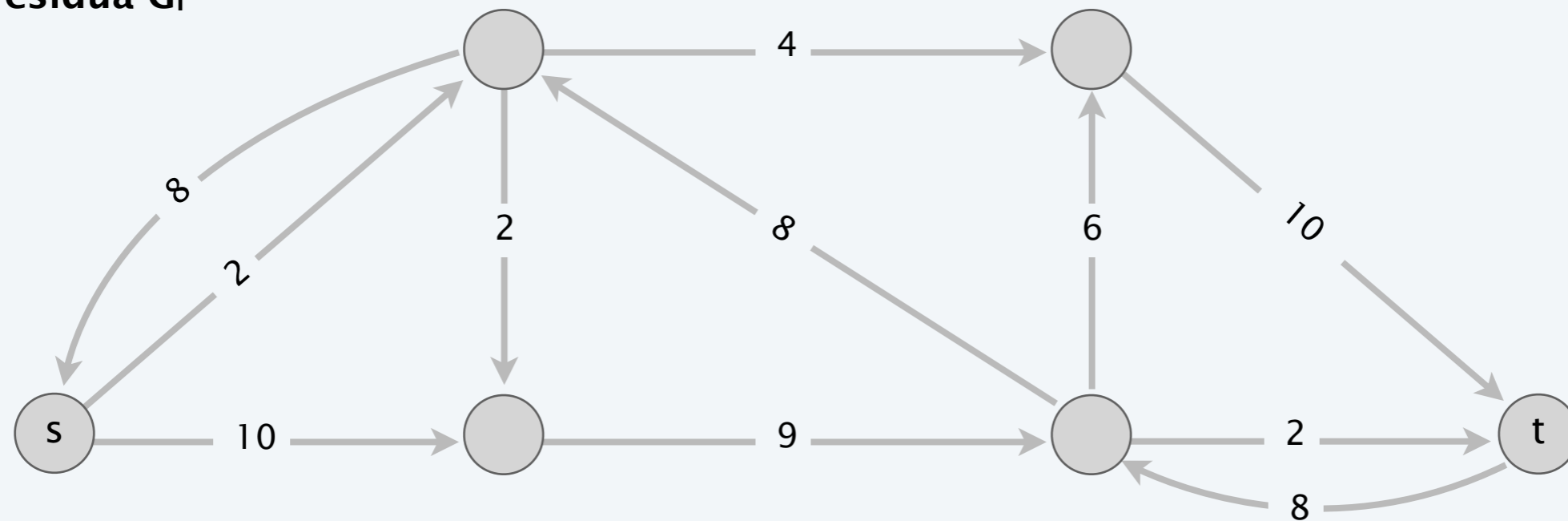


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

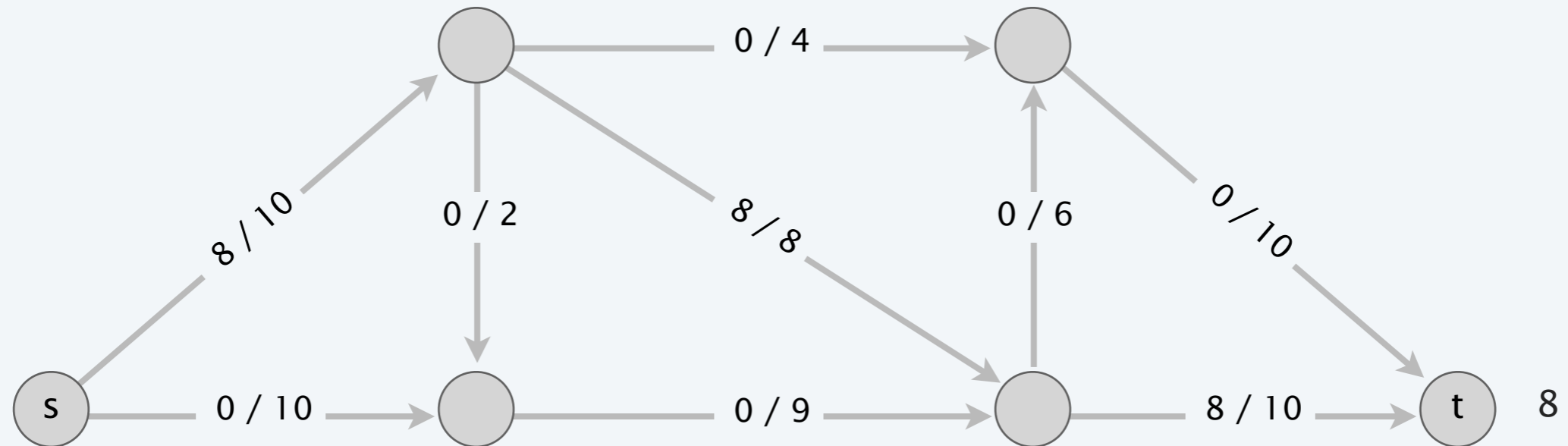


rete residua G_f

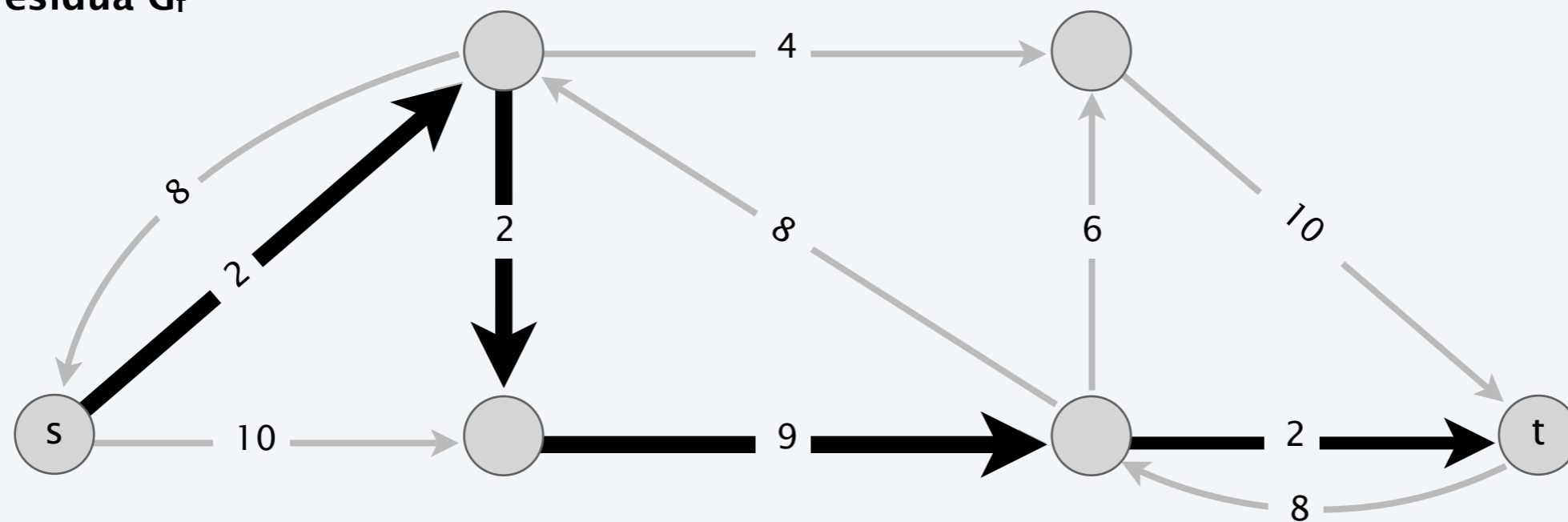


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

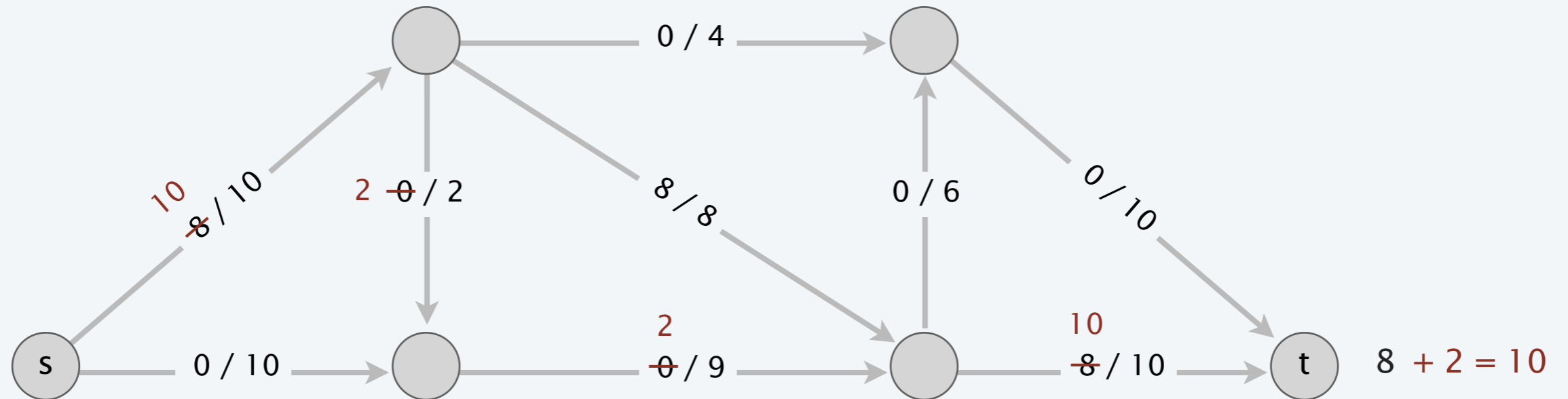


rete residua G_f

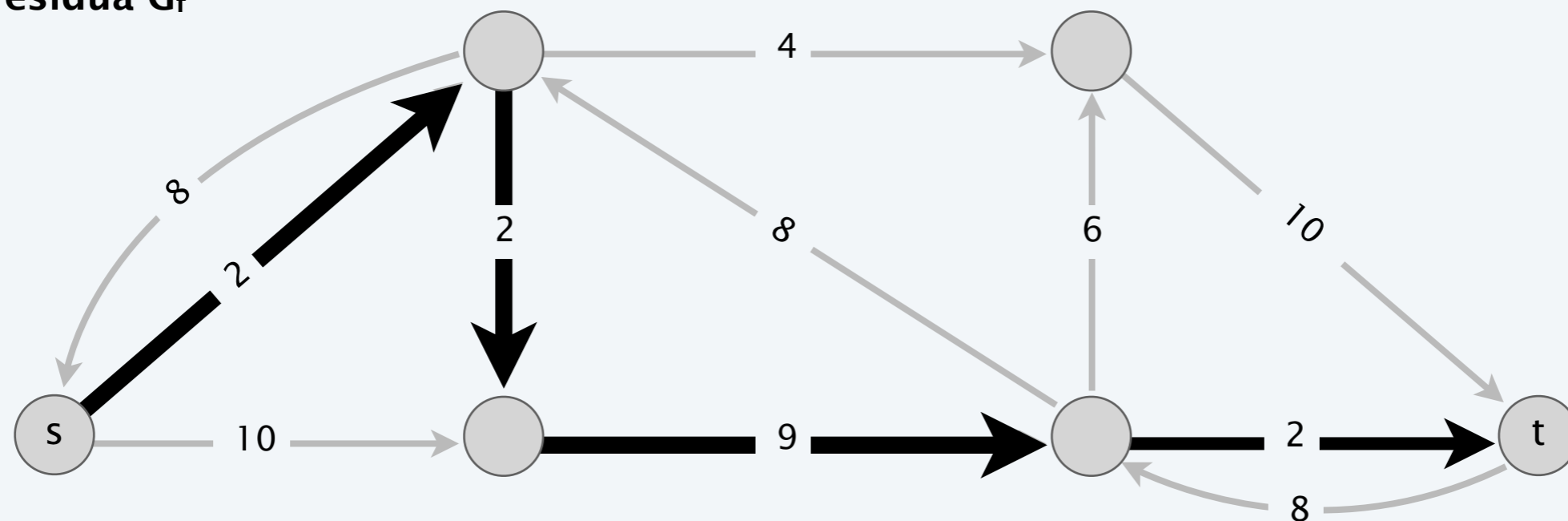


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

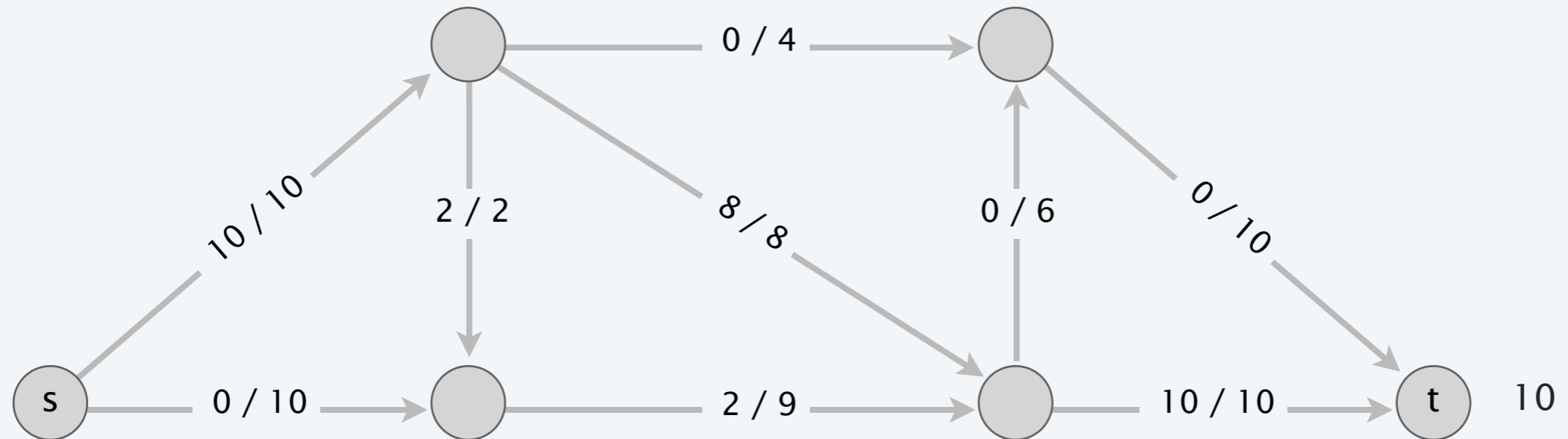


rete residua G_f

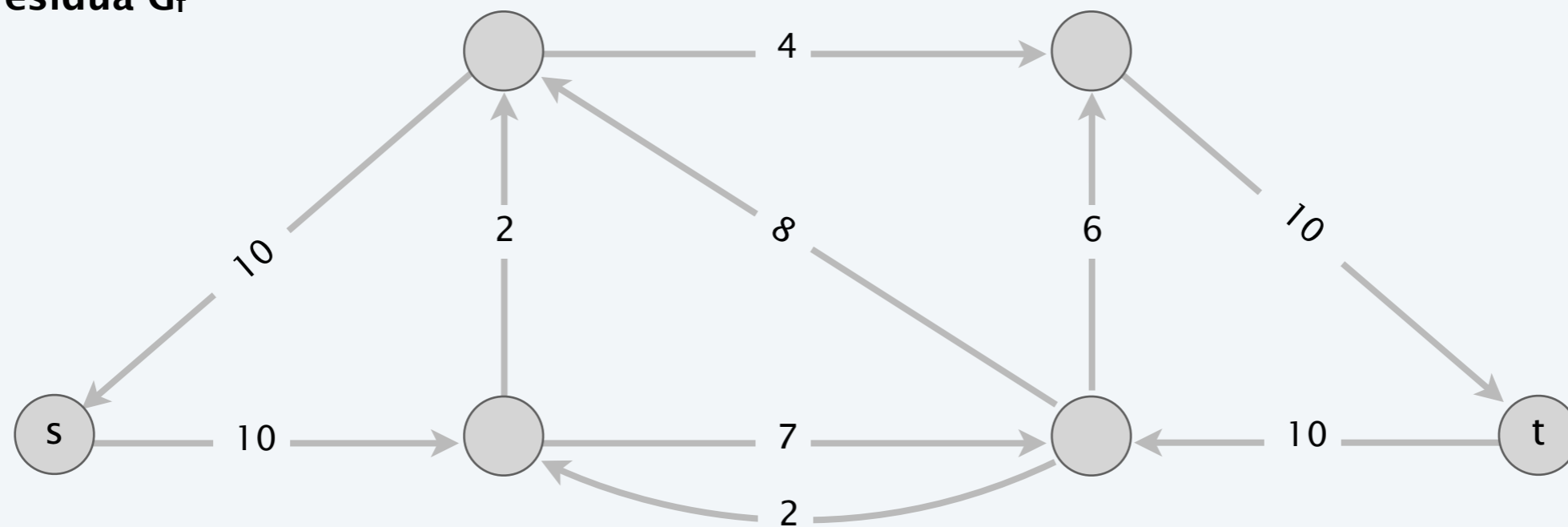


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

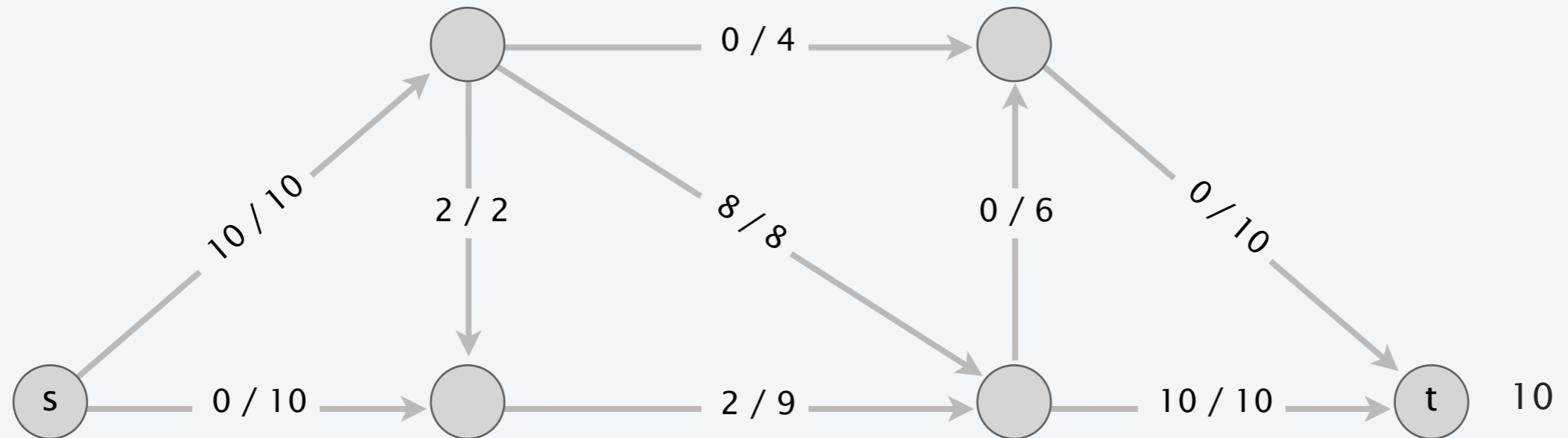


rete residua G_f

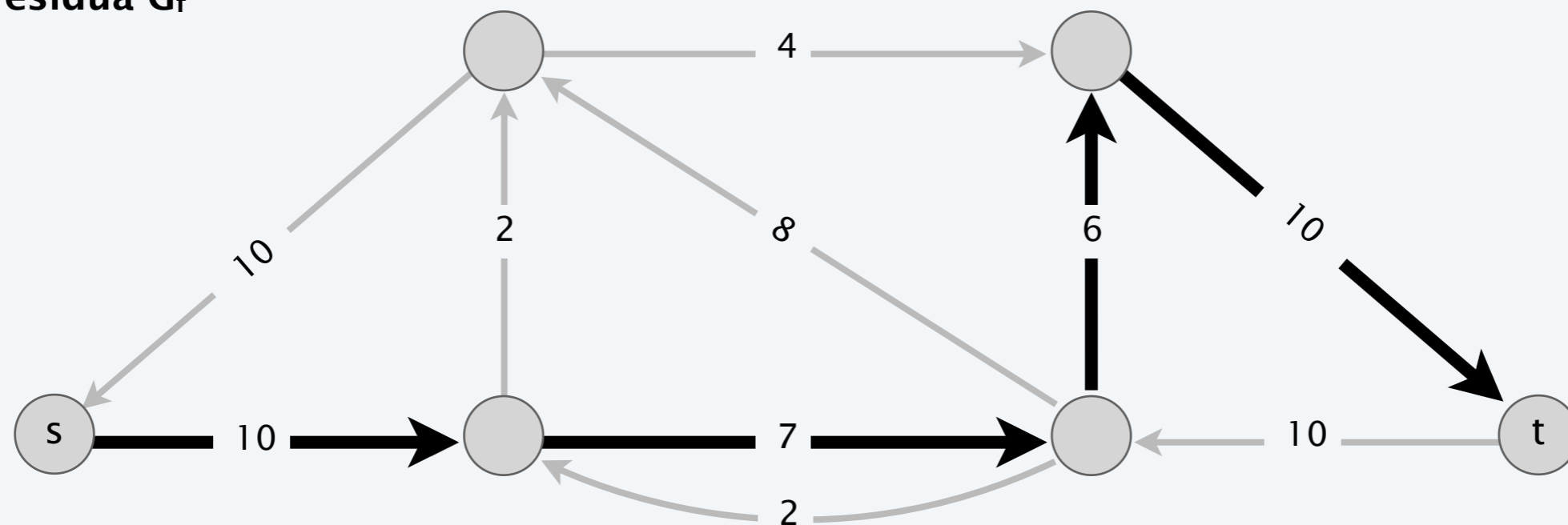


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

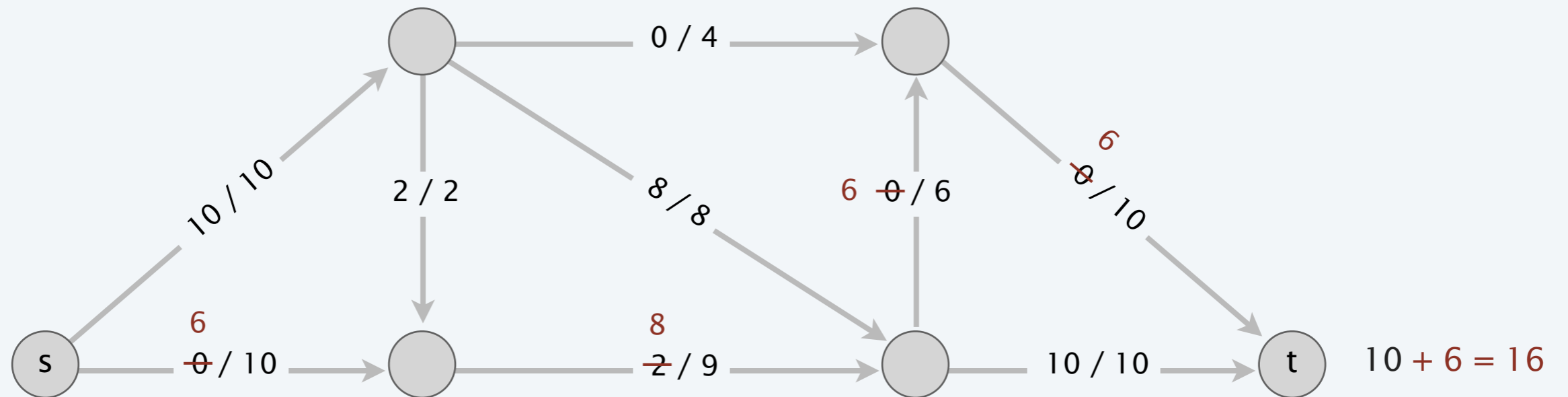


rete residua G_f

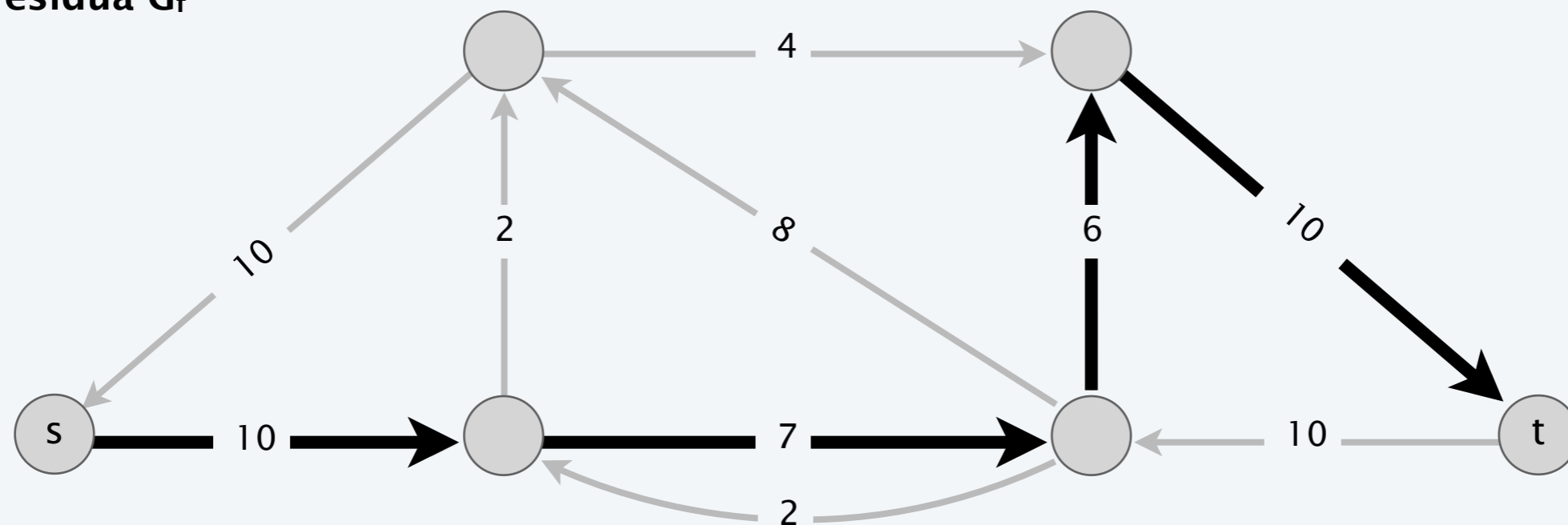


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

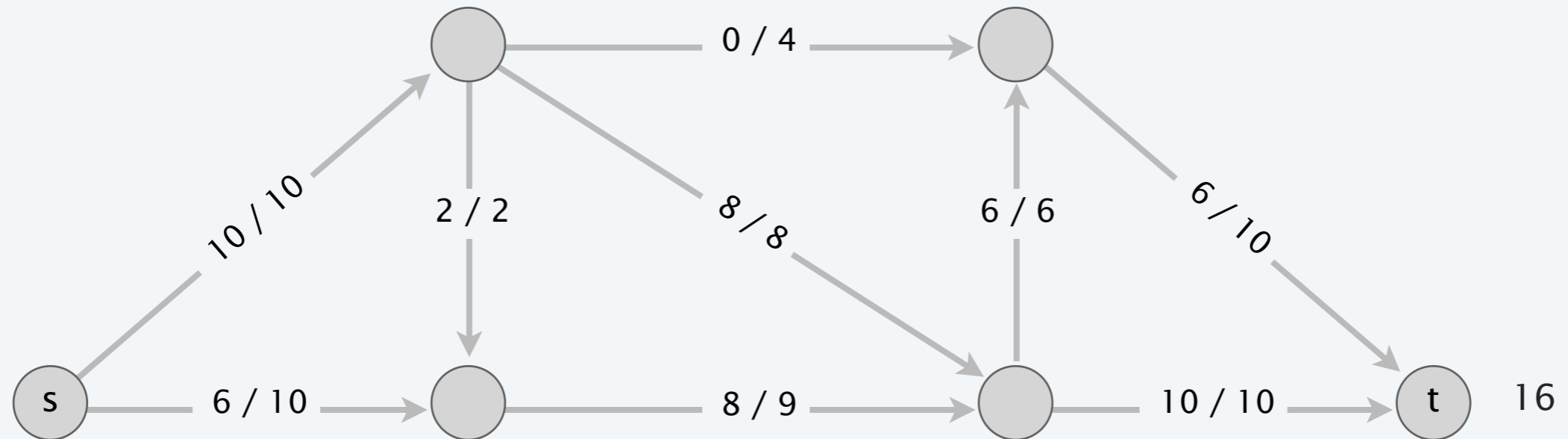


rete residua G_f

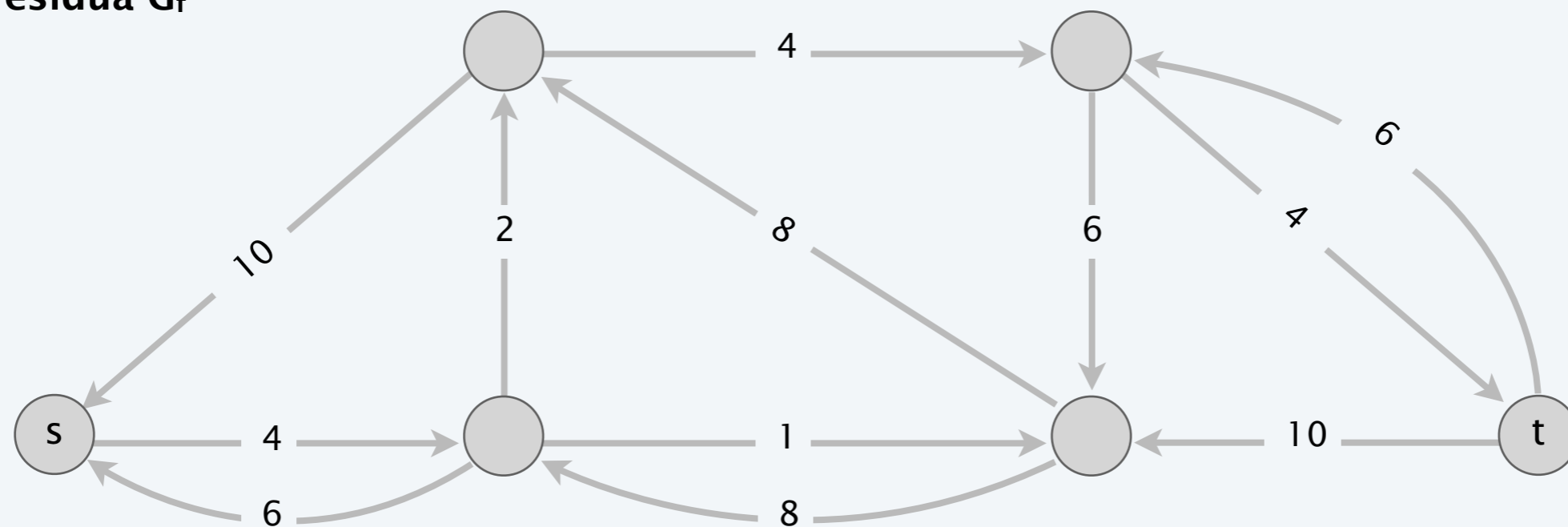


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

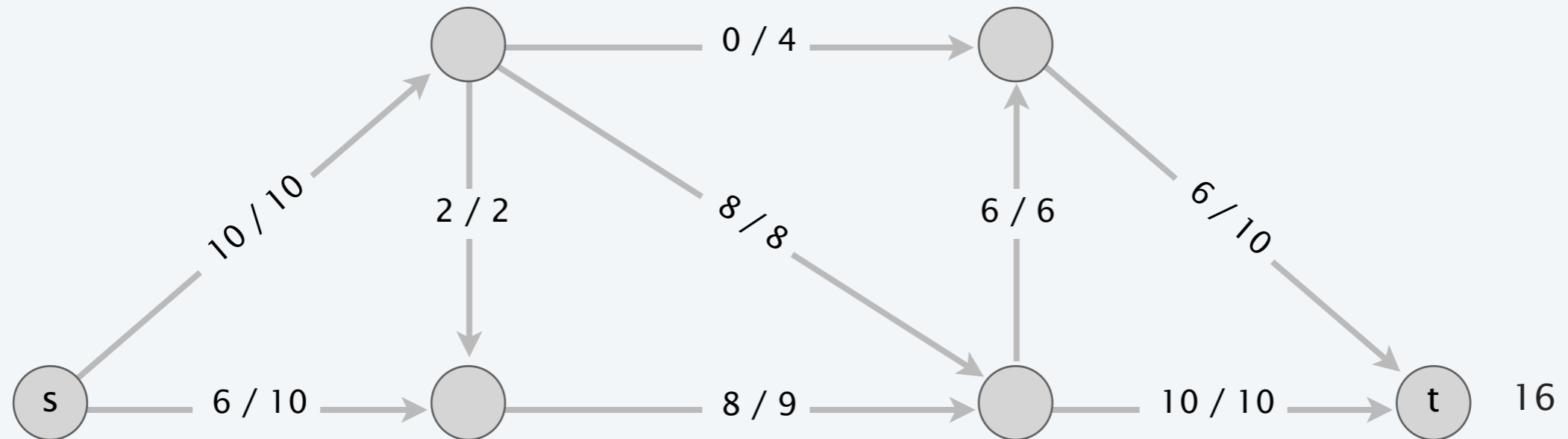


rete residua G_f

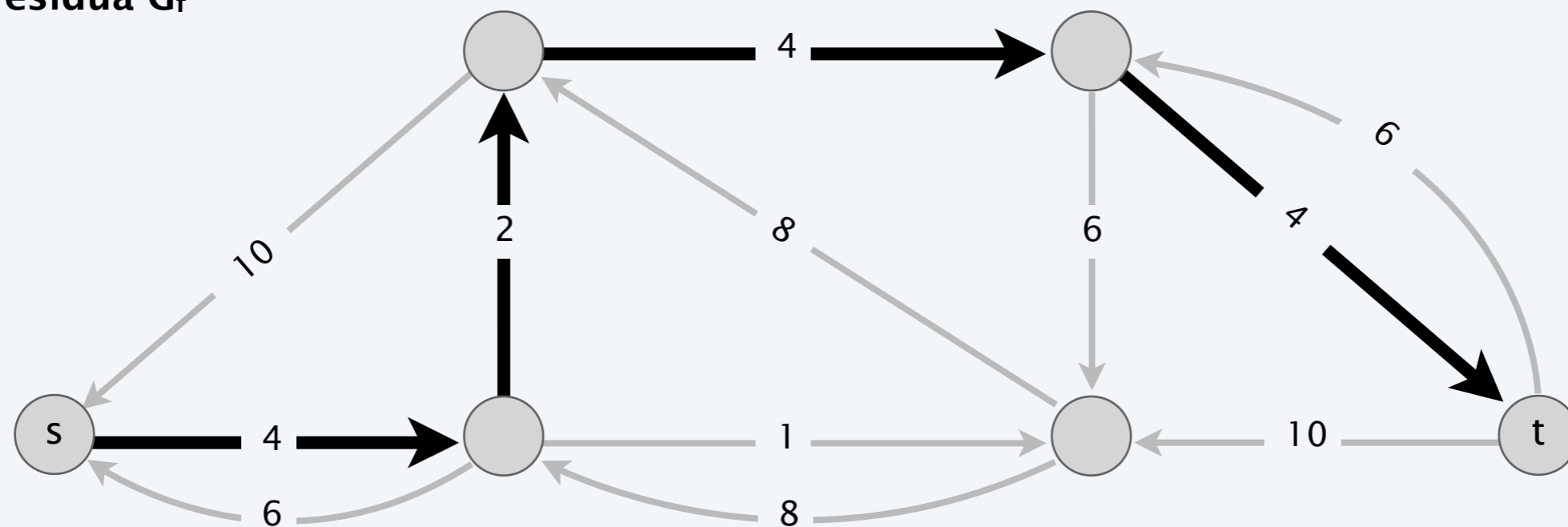


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

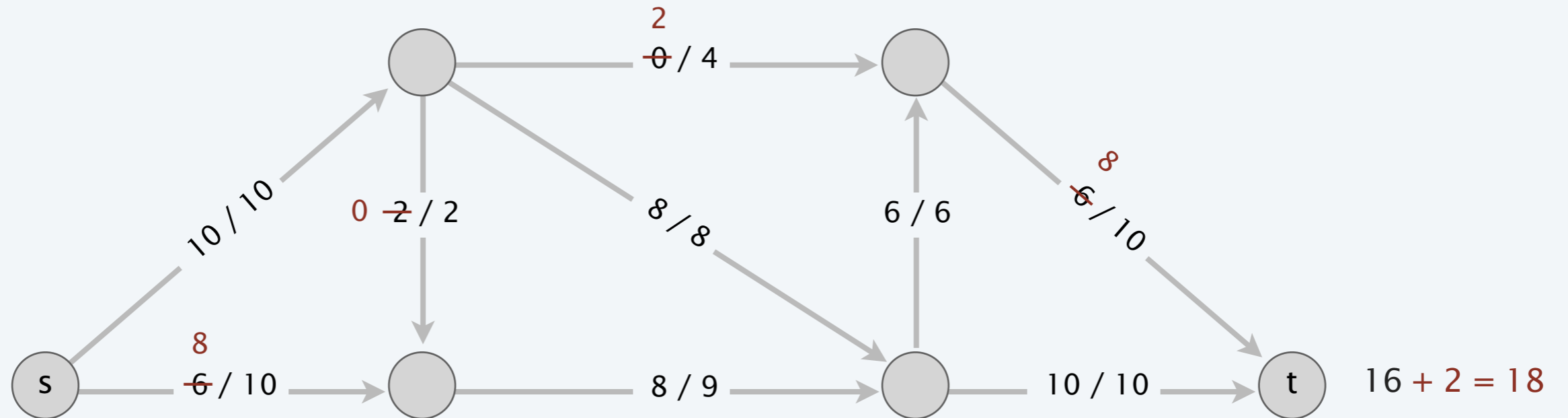


rete residua G_f

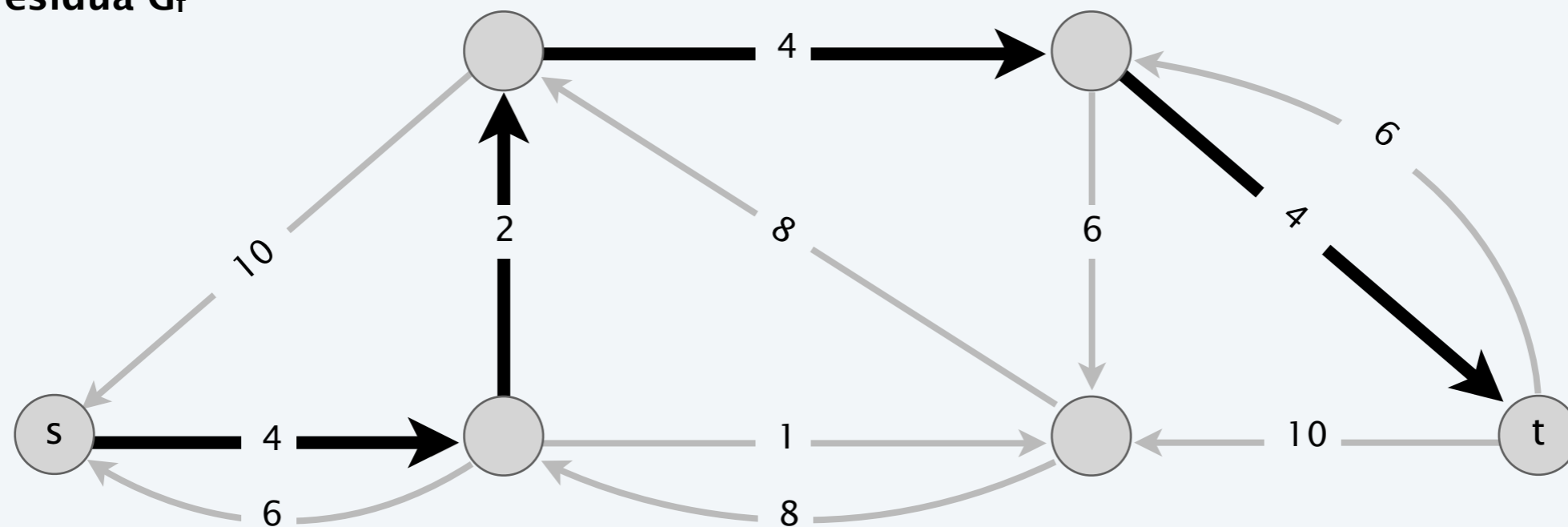


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

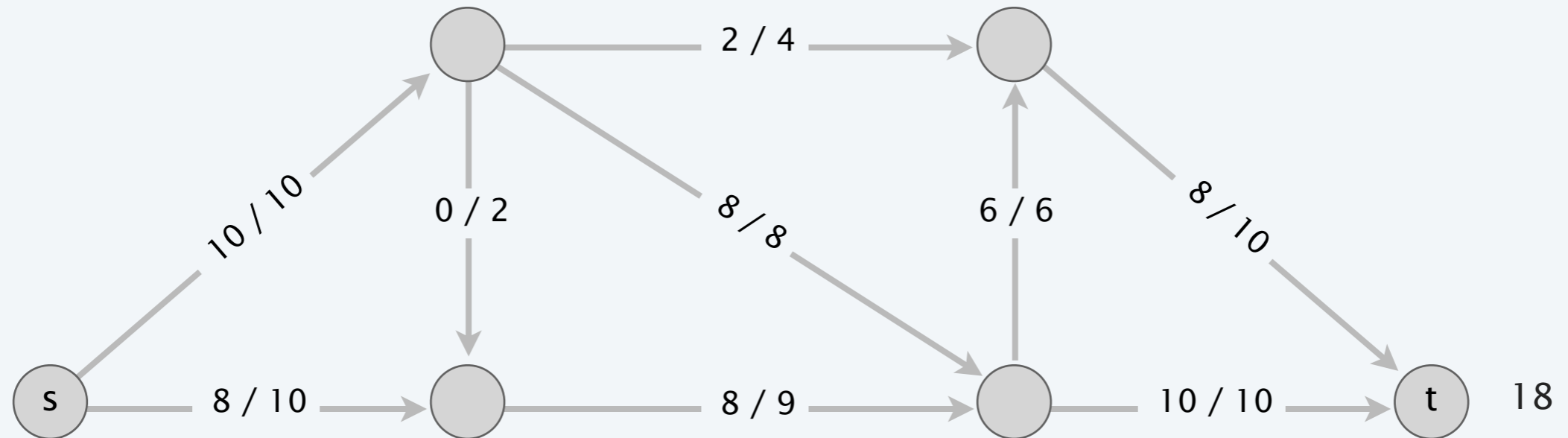


rete residua G_f

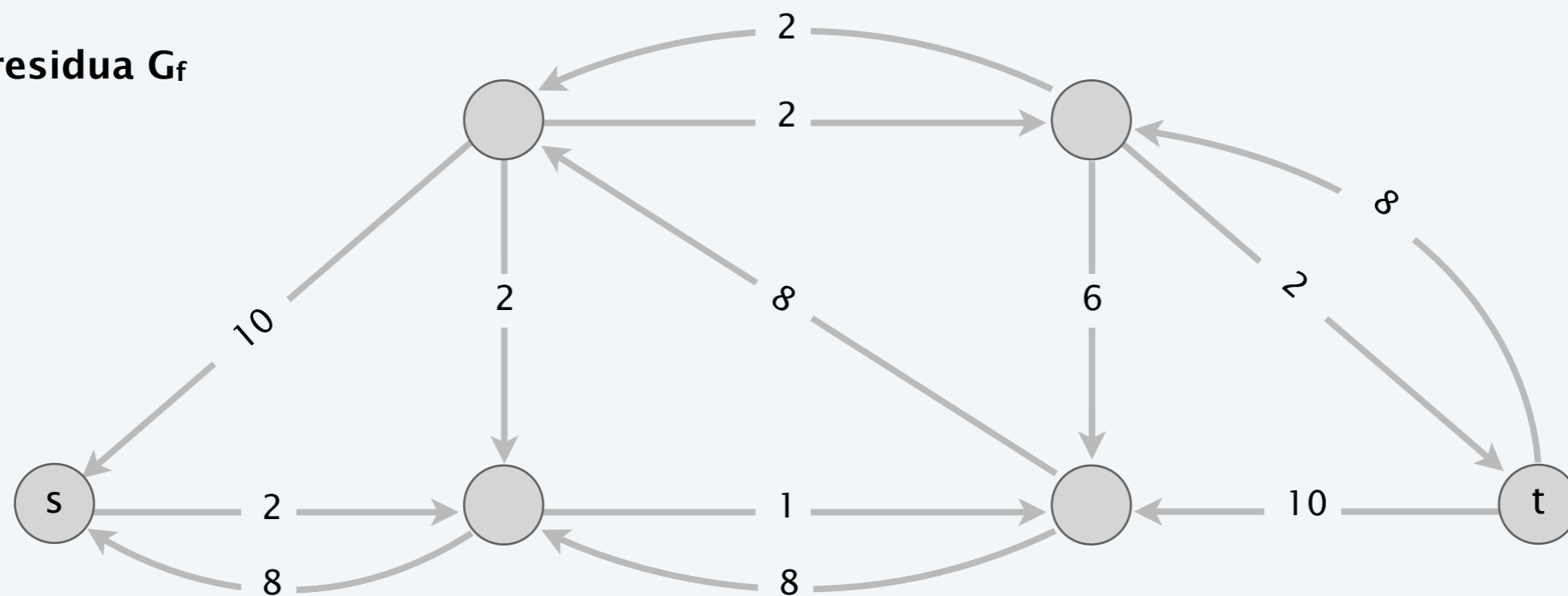


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

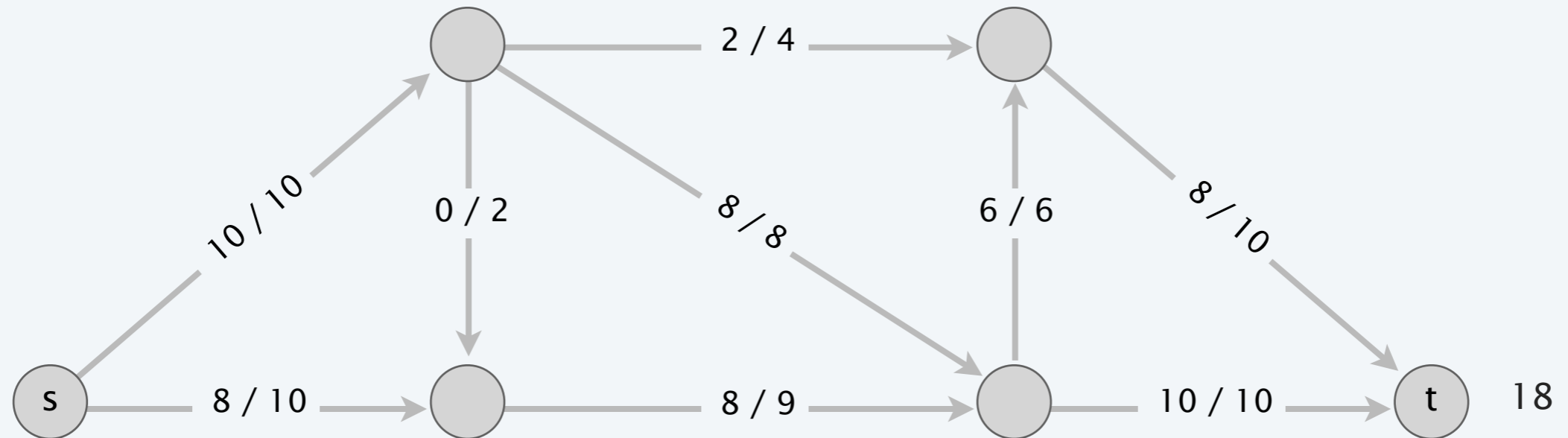


rete residua G_f

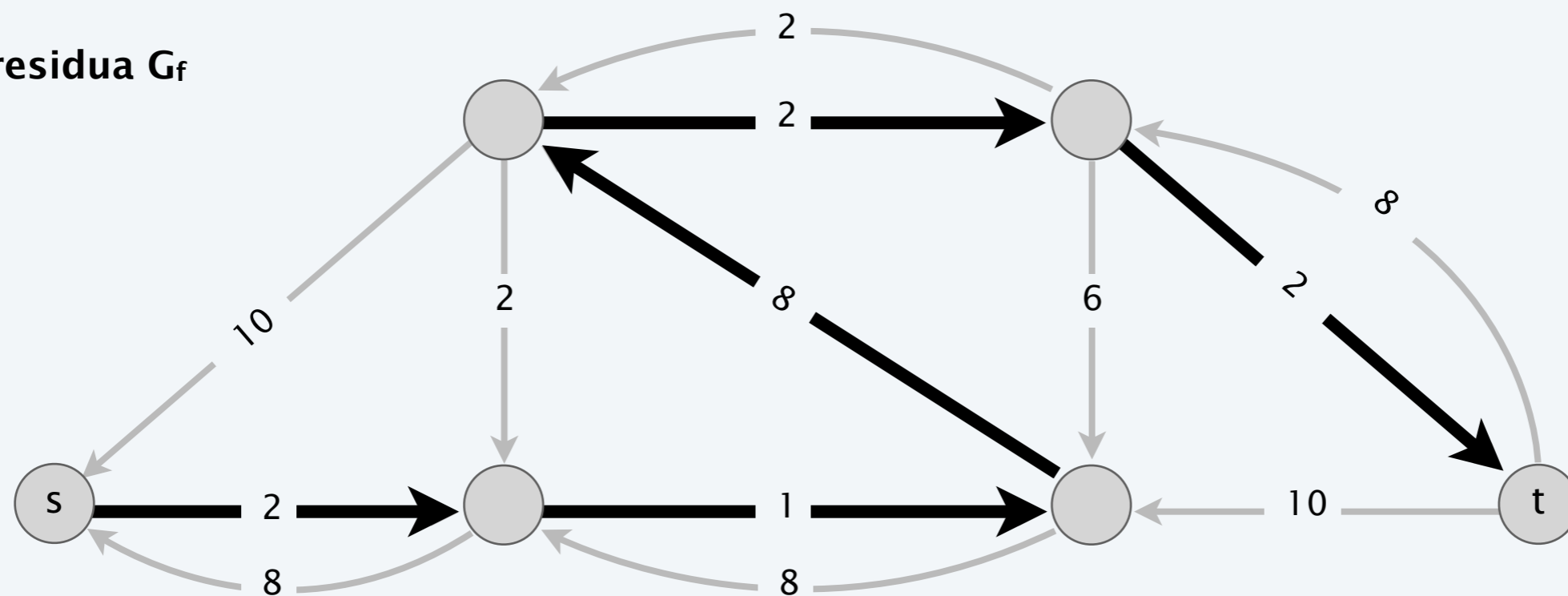


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

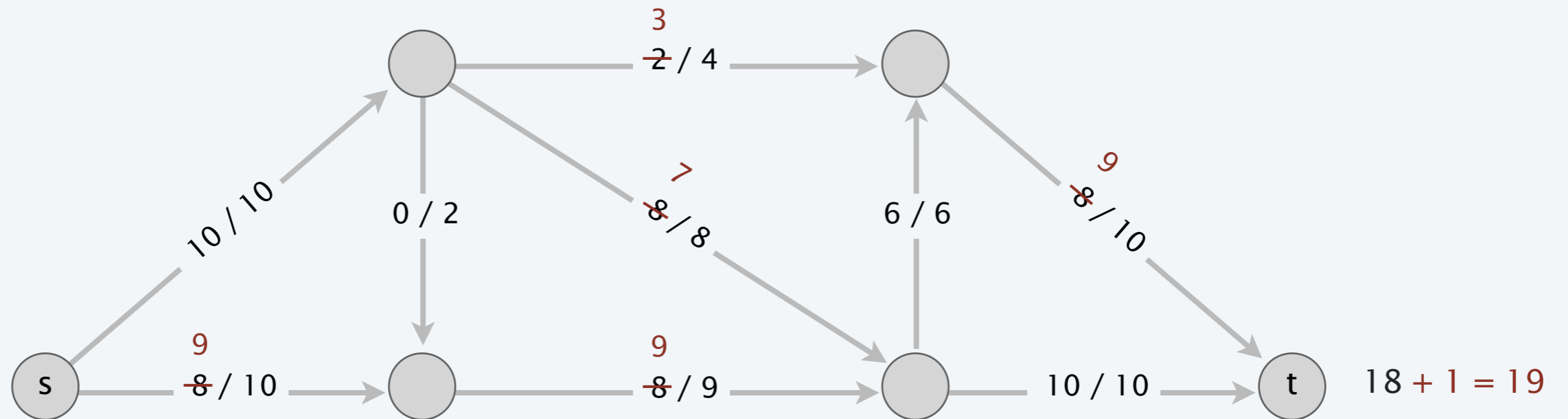


rete residua G_f

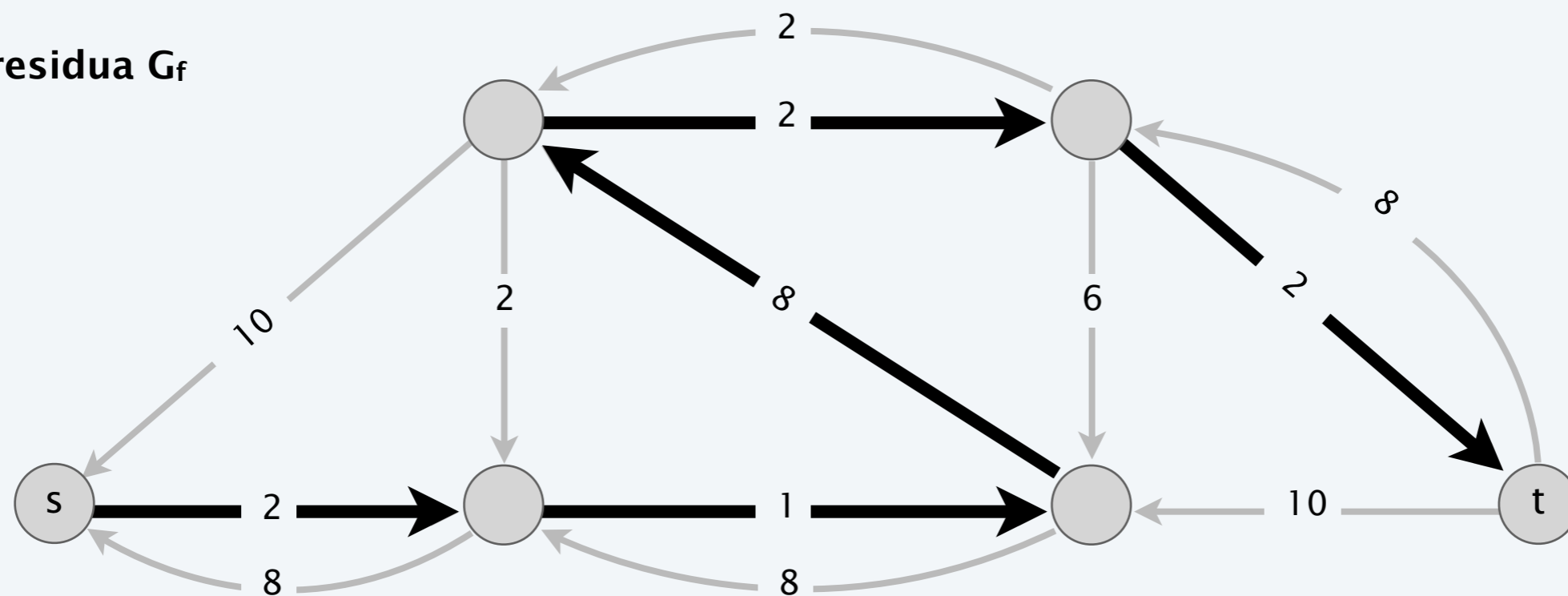


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

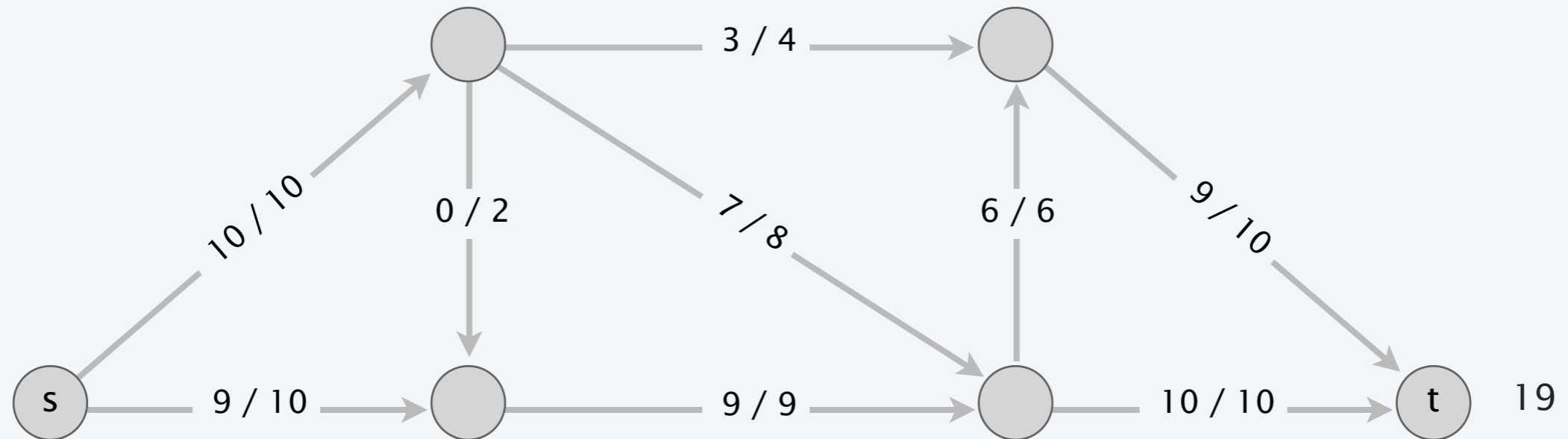


rete residua G_f

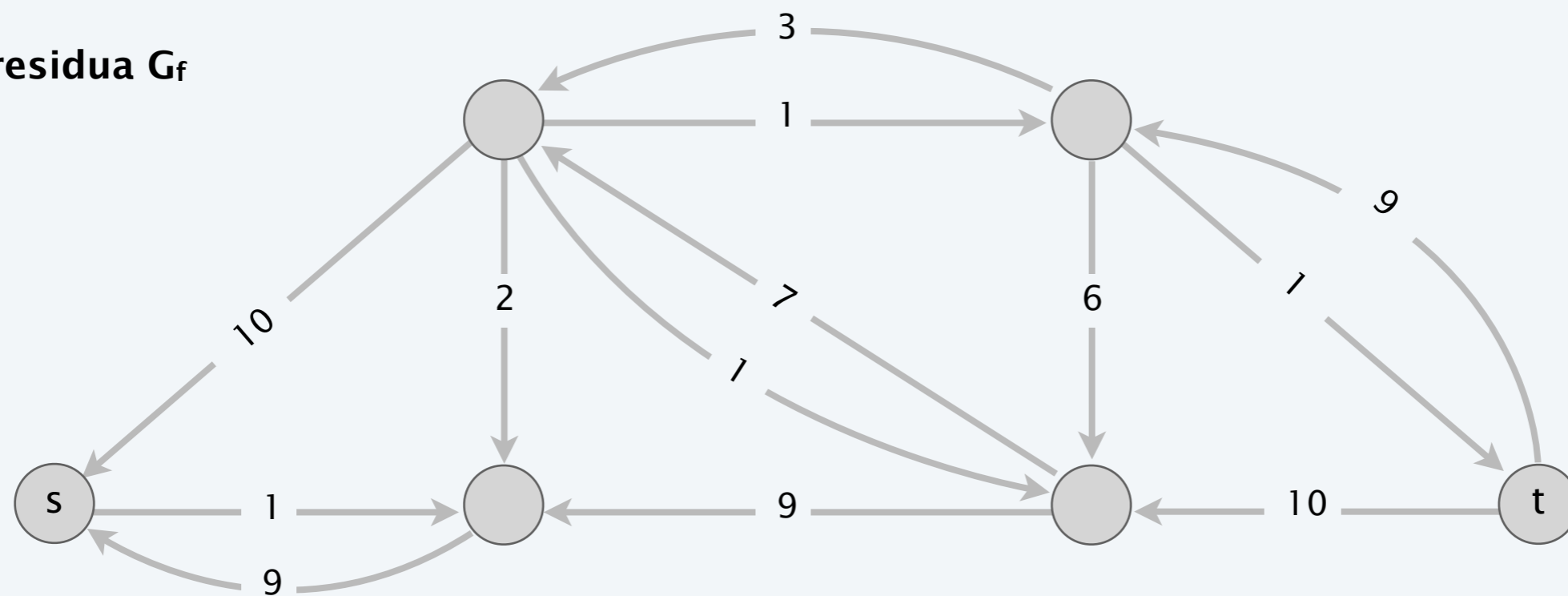


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

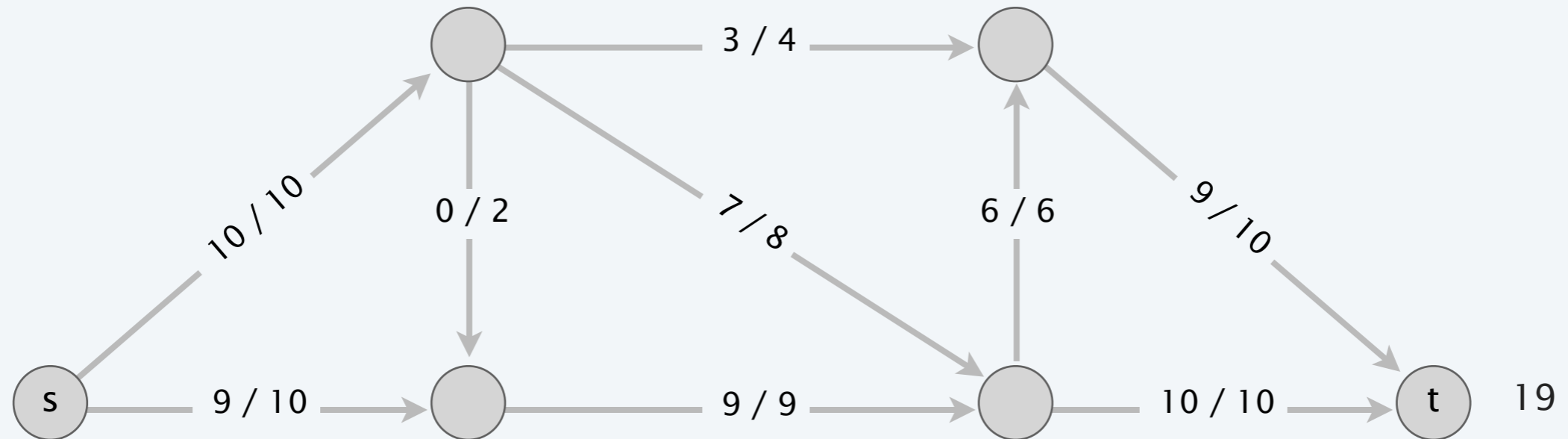


rete residua G_f

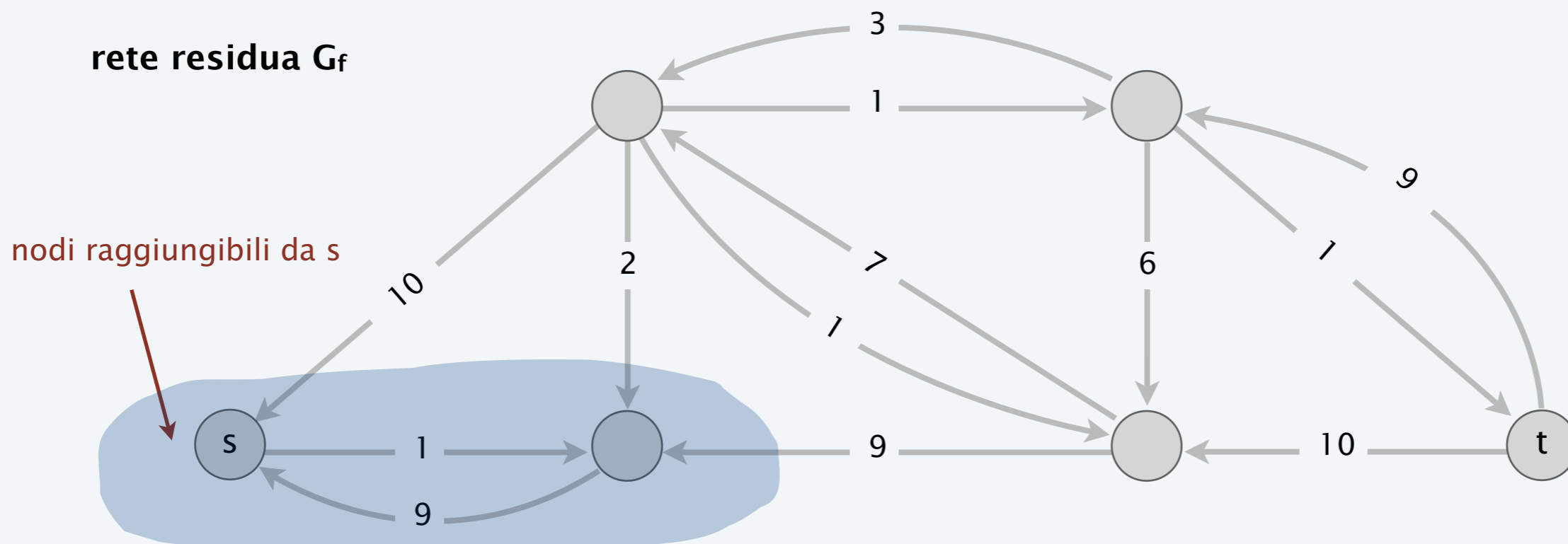


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

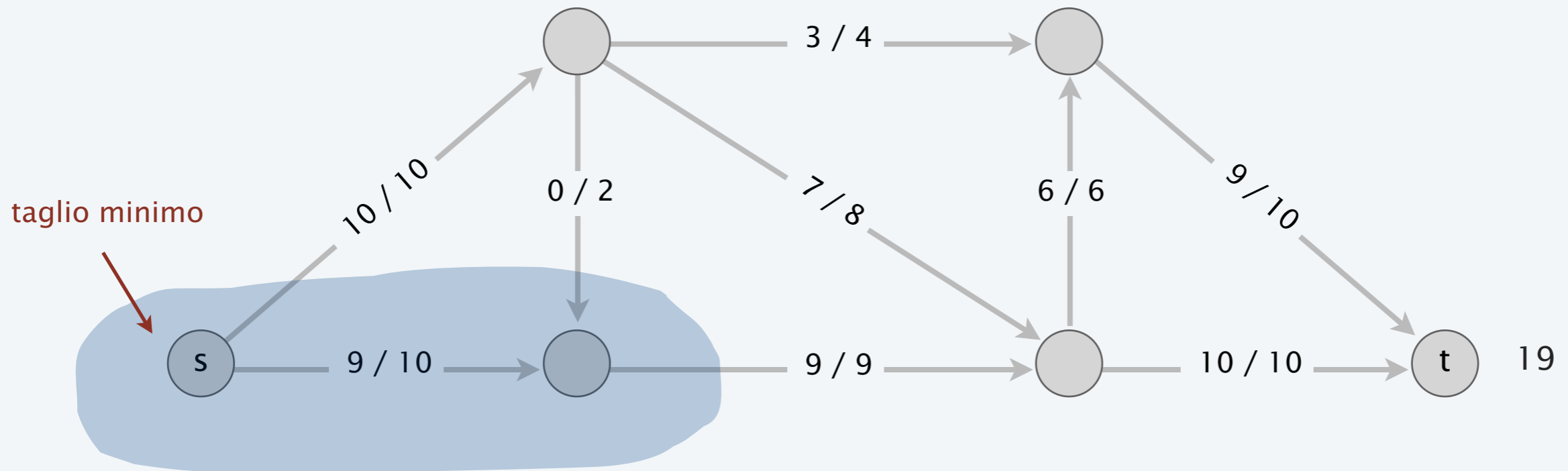


rete residua G_f

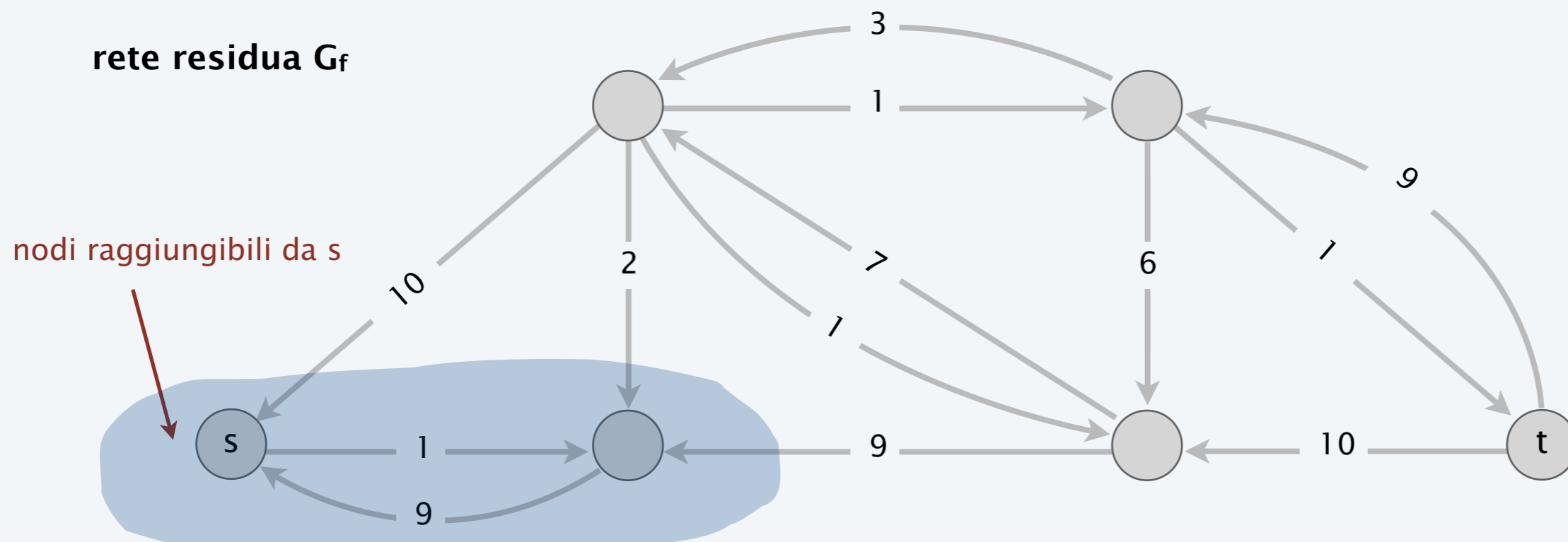


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

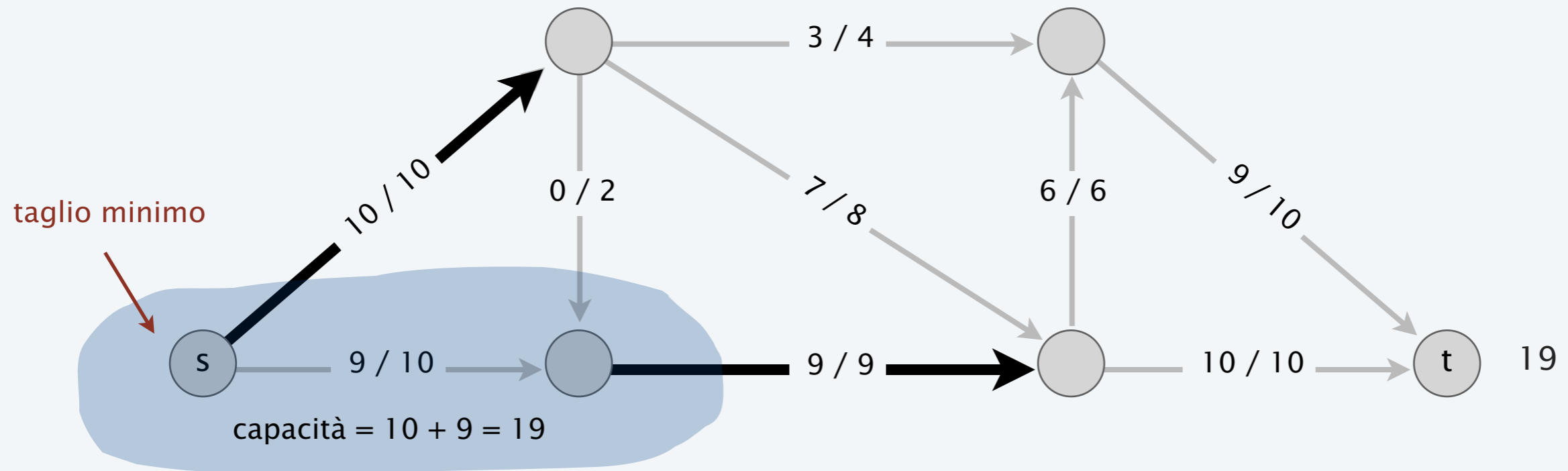


rete residua G_f

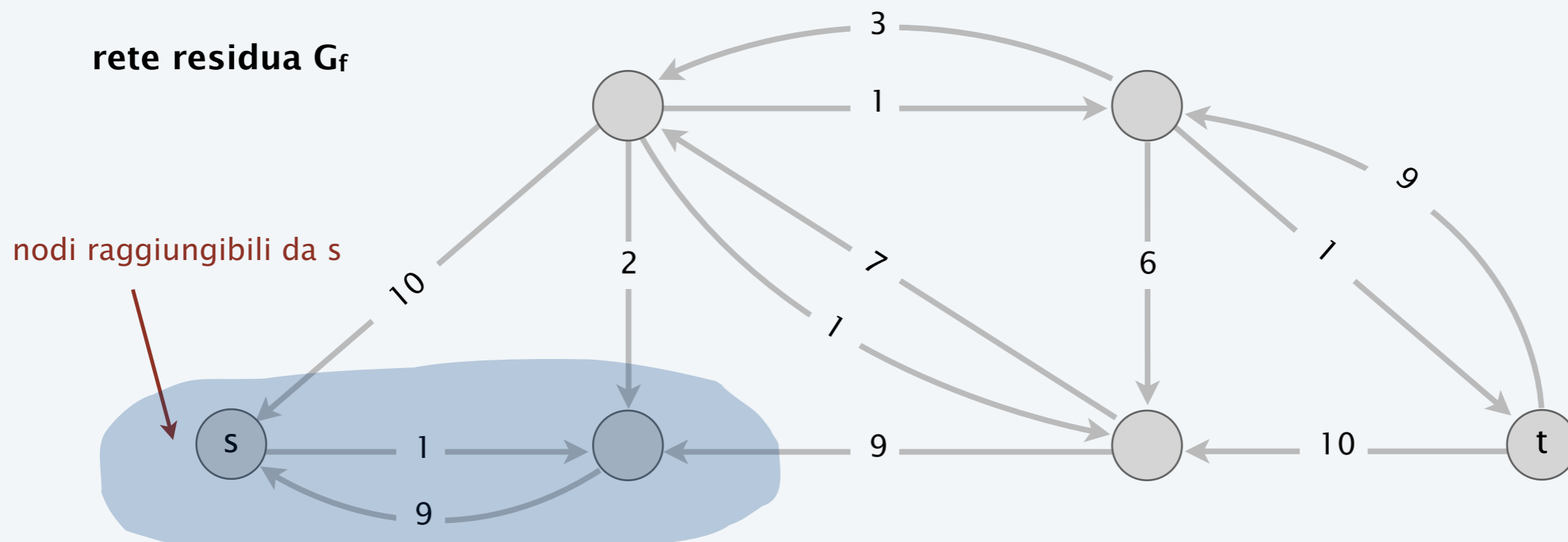


Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f

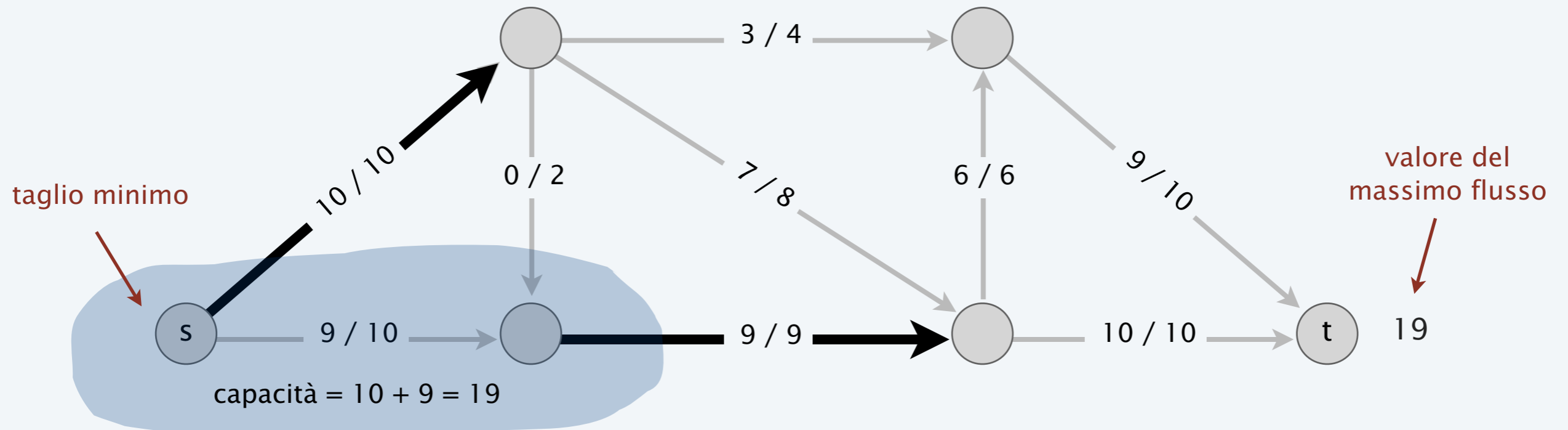


rete residua G_f

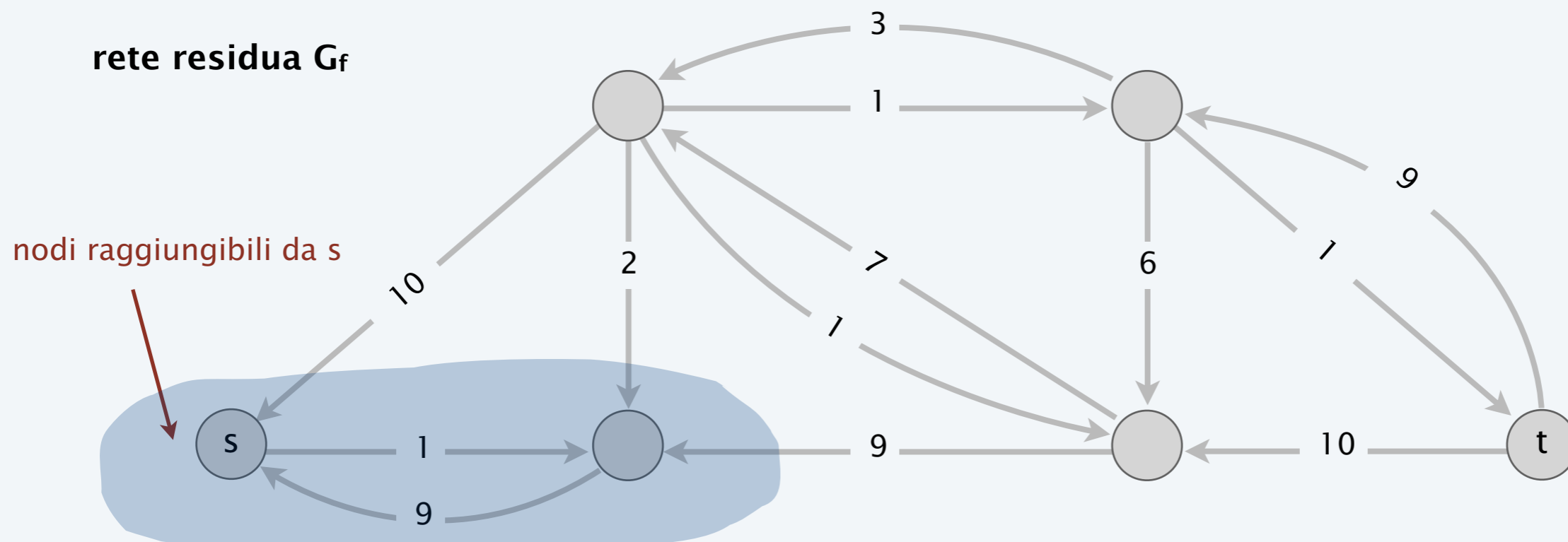


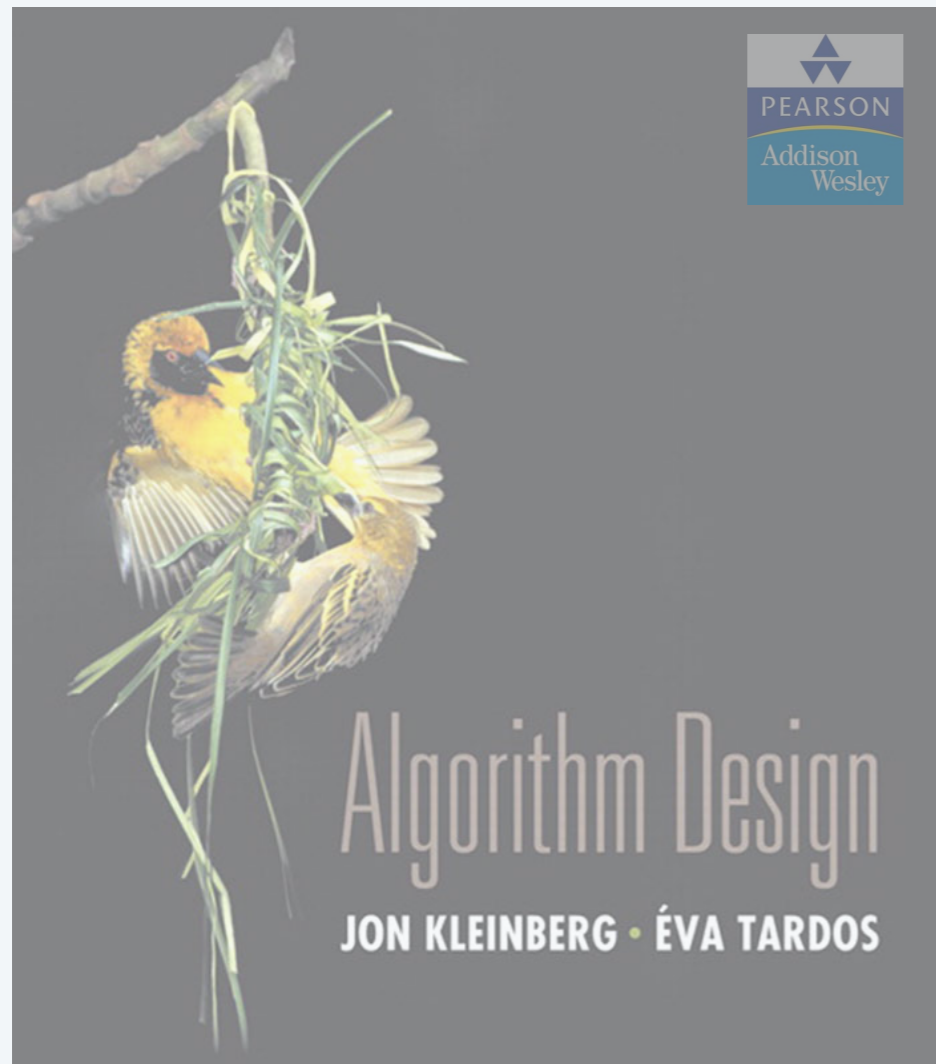
Demo algoritmo Ford-Fulkerson

rete G e flusso f



rete residua G_f





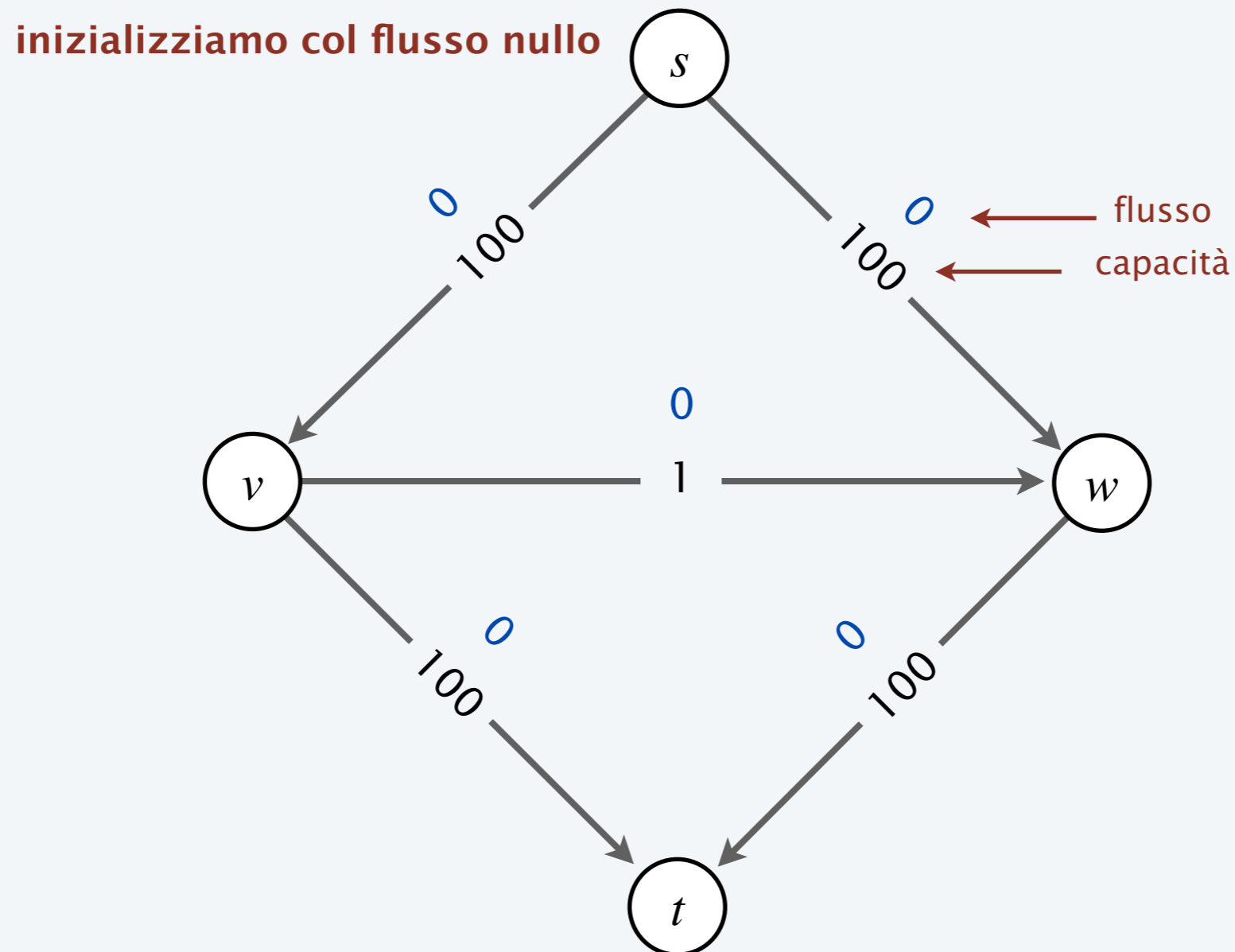
SECTION 7.1

7. FLUSSI DI RETE I

- ▶ *Ford–Fulkerson demo*
- ▶ *esempio tempo-esponenziale*
- ▶ *pathological example*

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

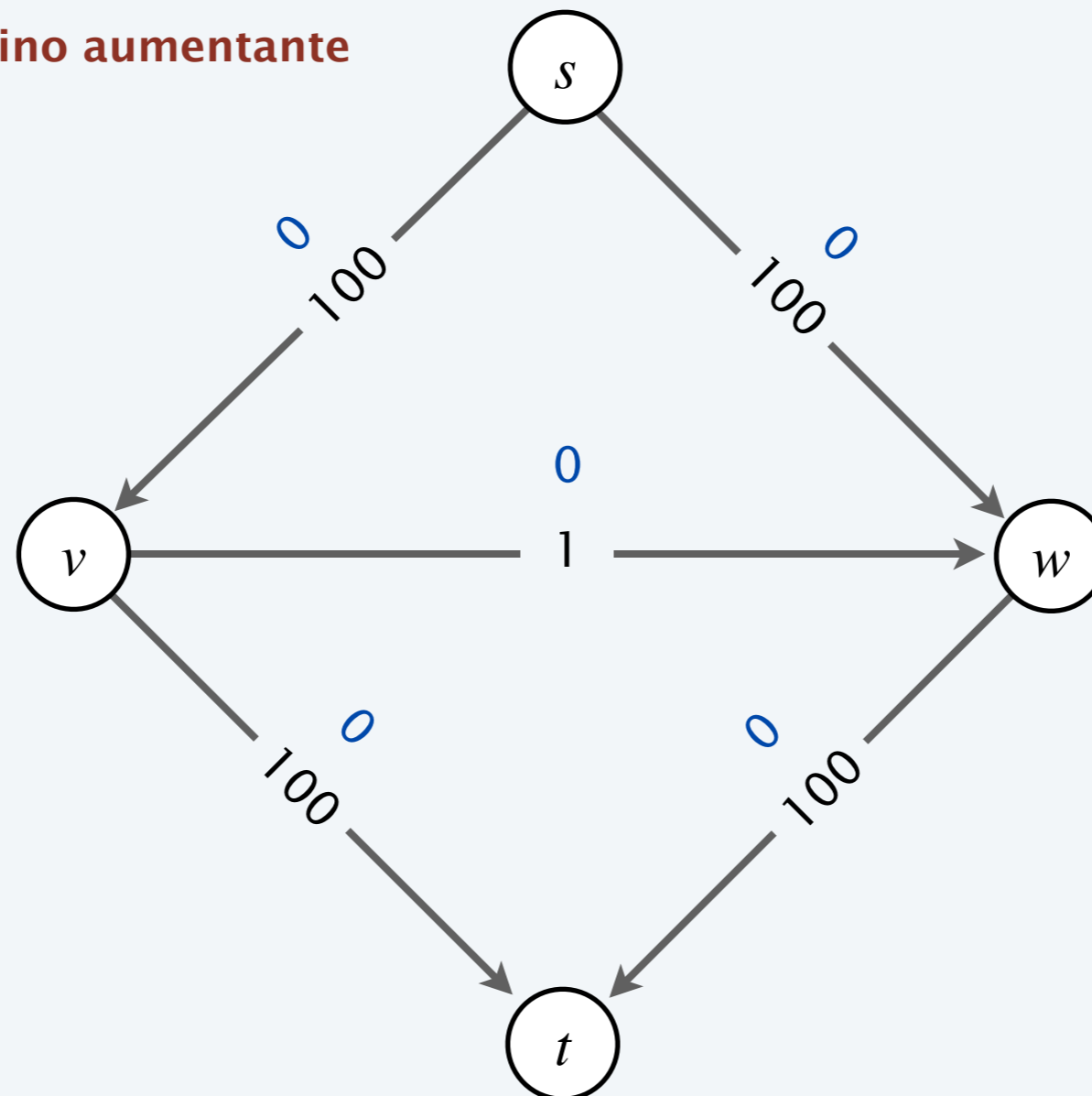
Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

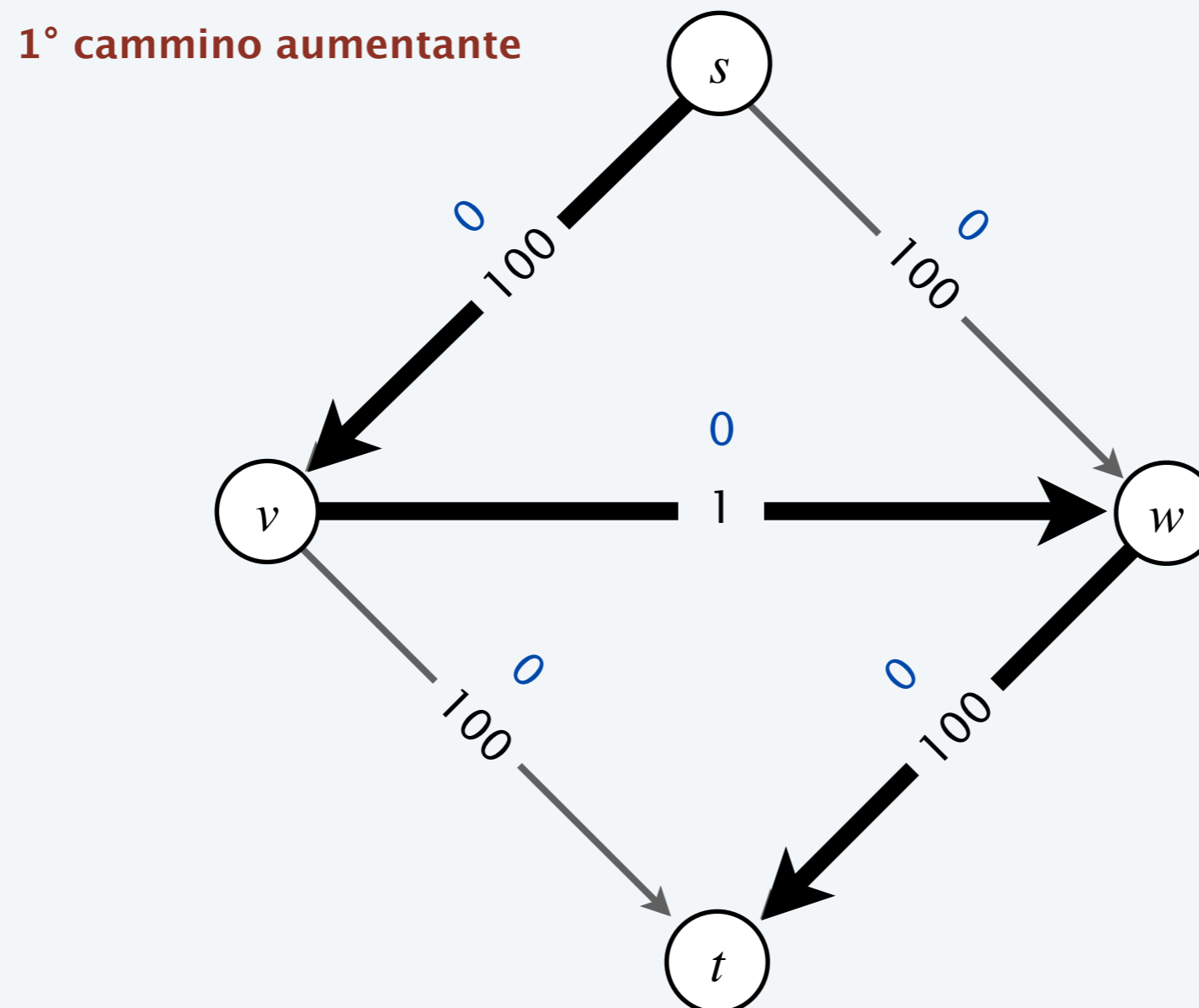
Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

1° cammino aumentante



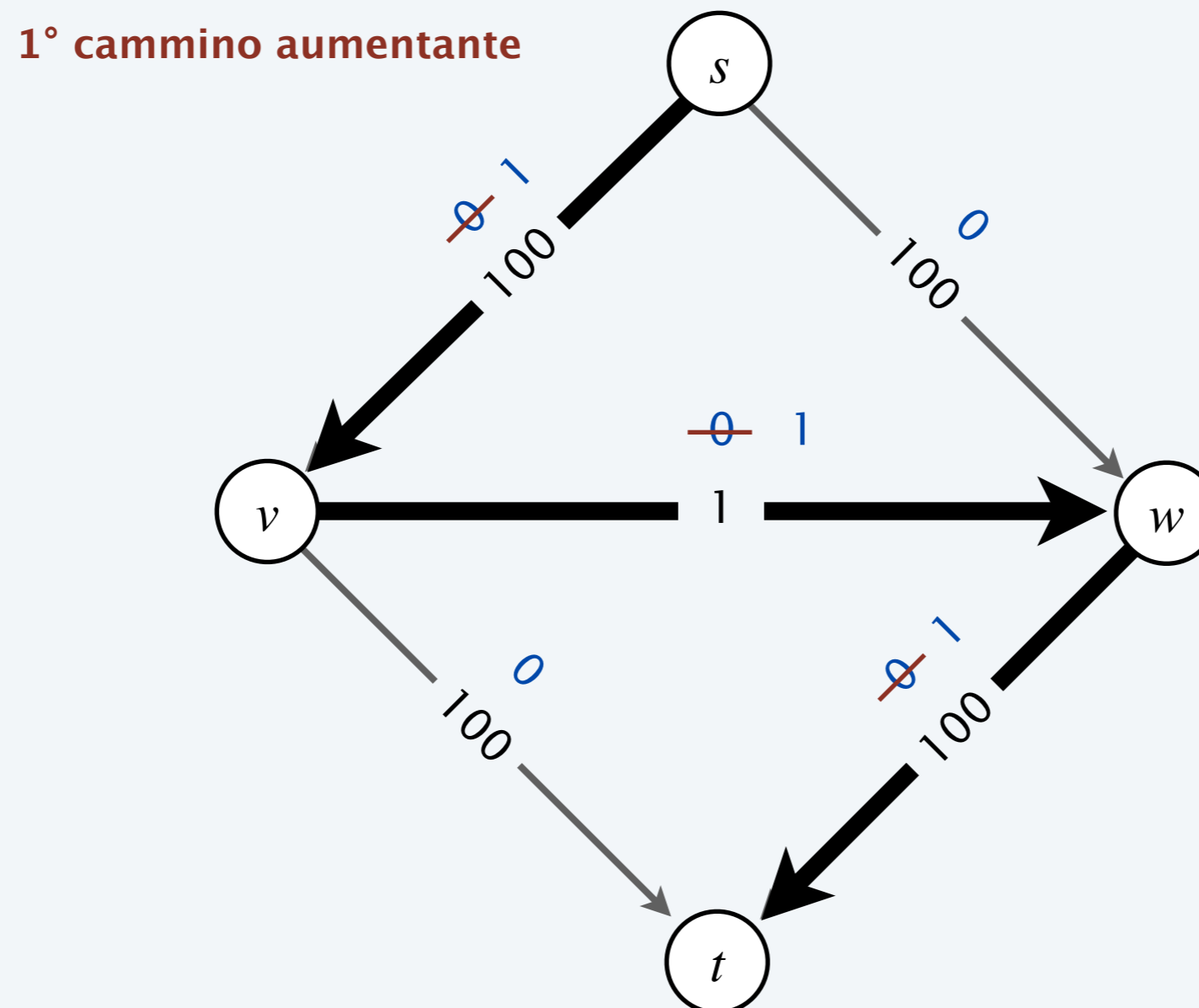
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

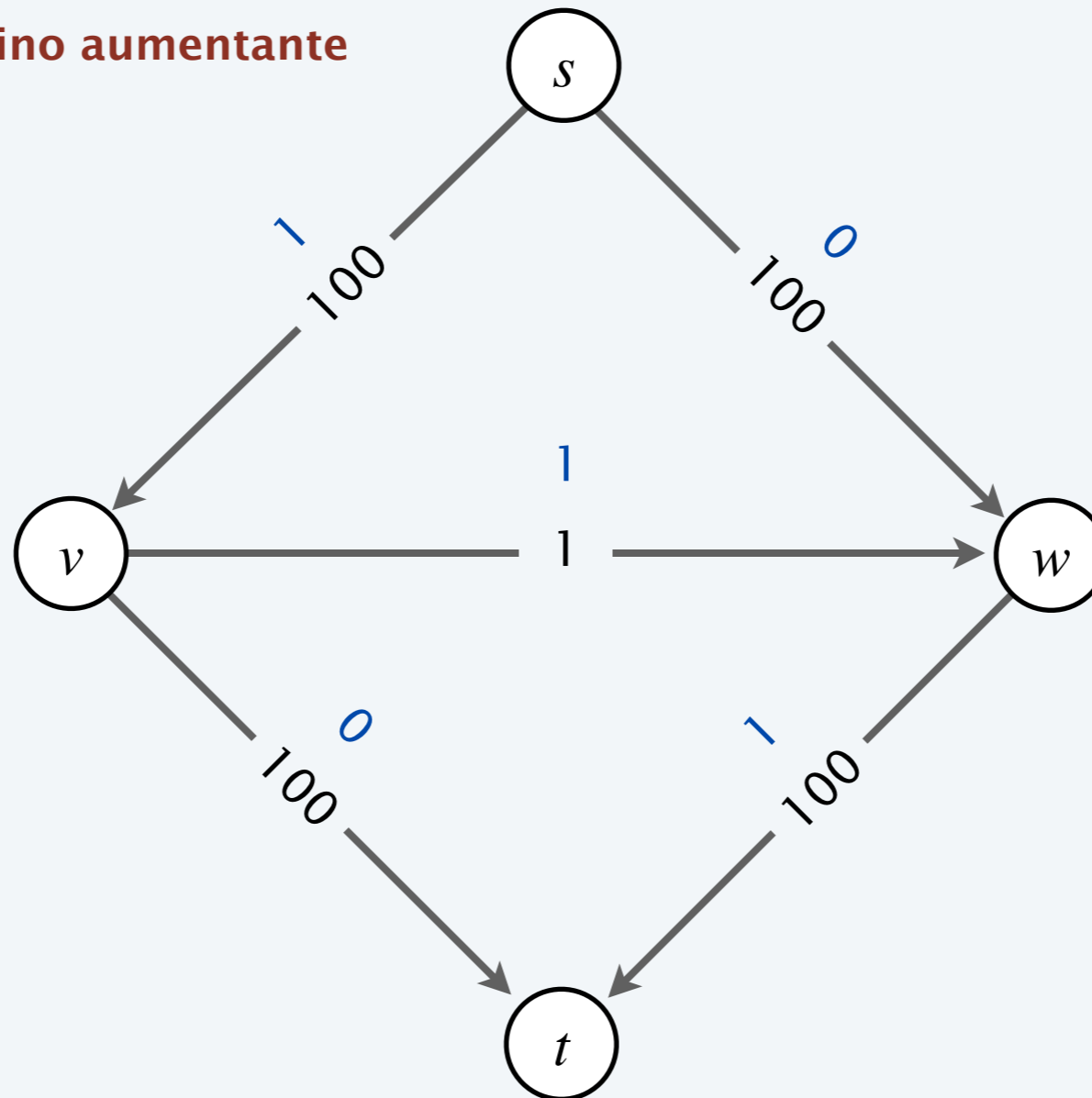
Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

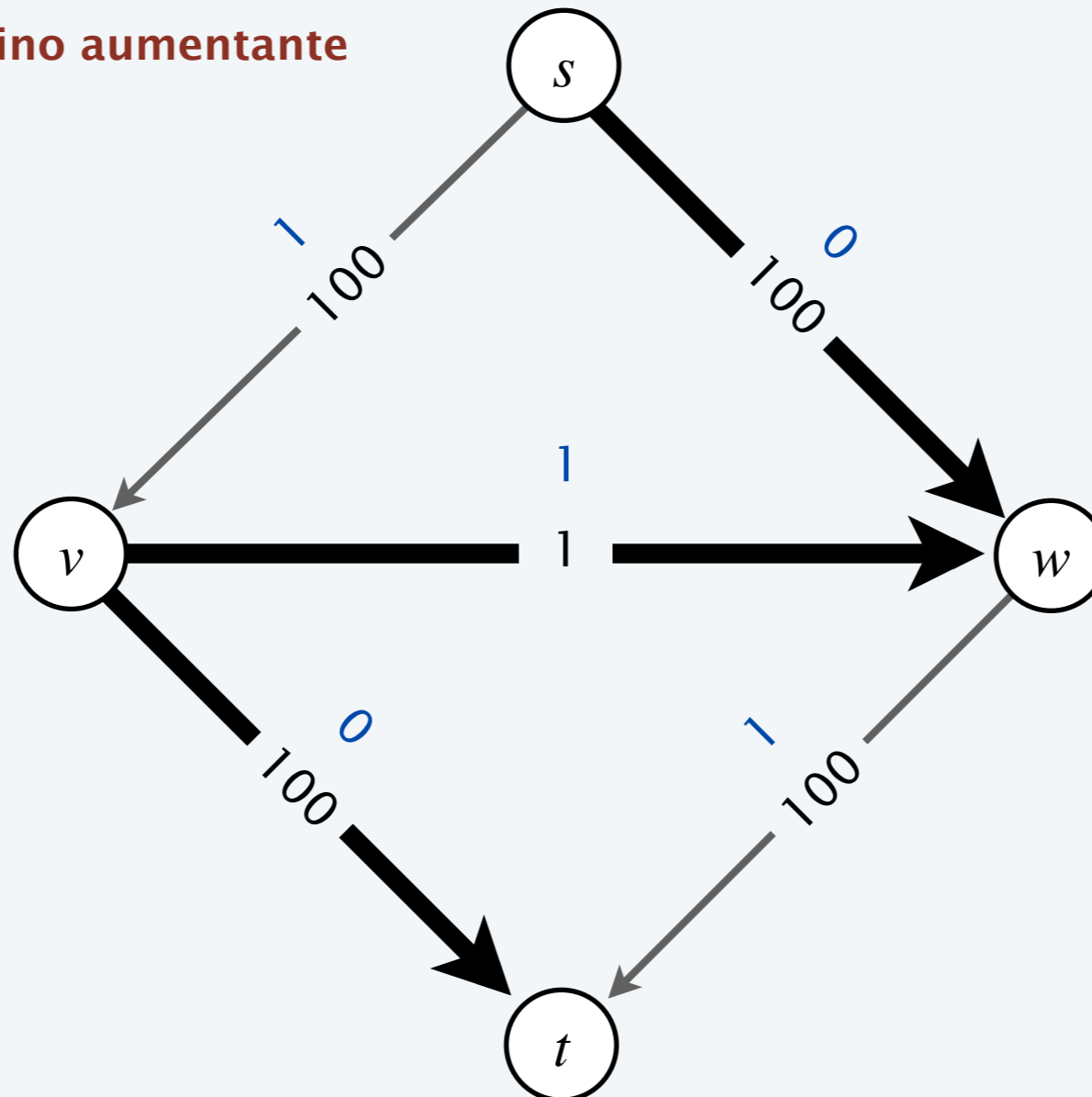
2° cammino aumentante



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

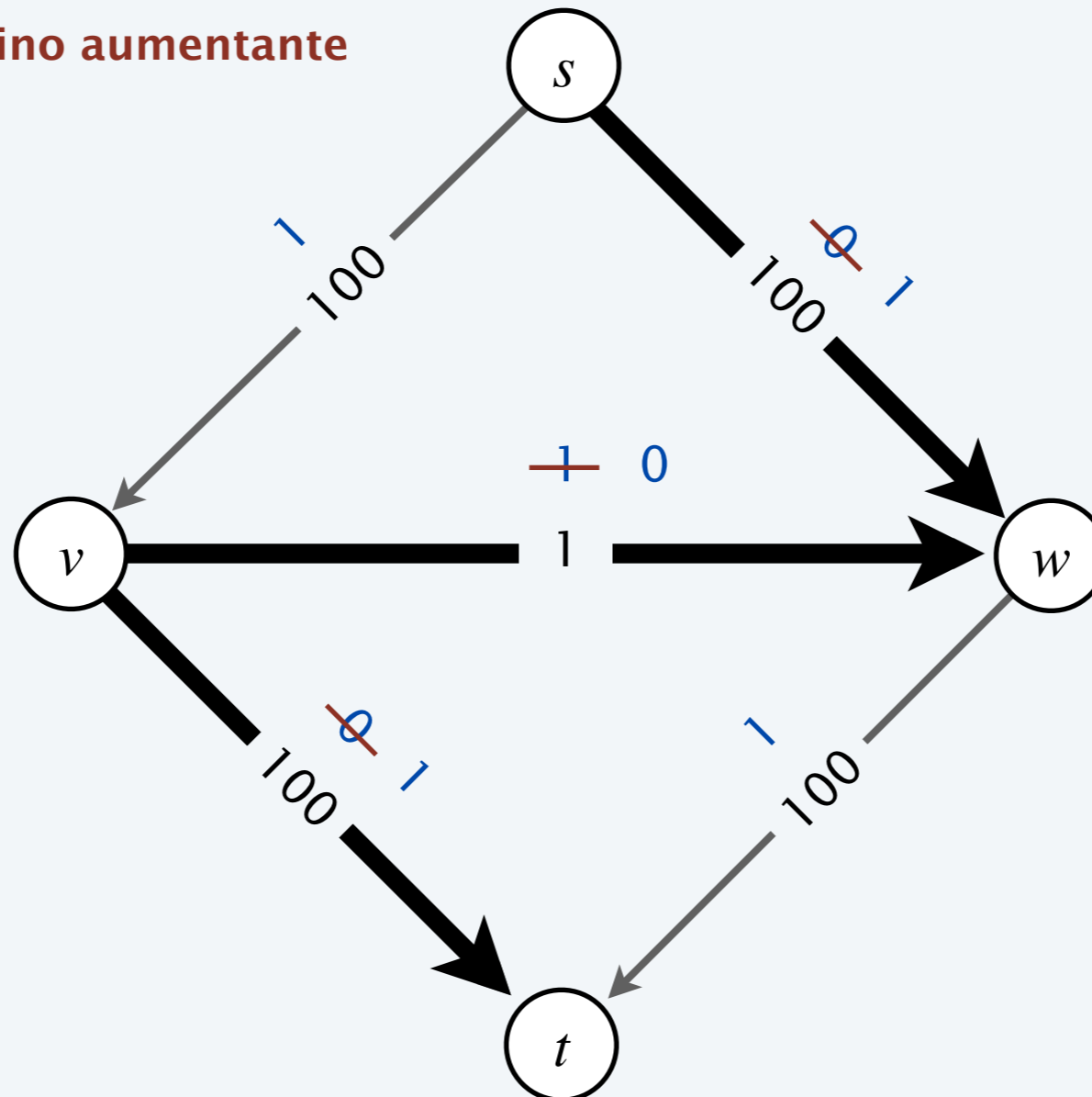
2° cammino aumentante



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

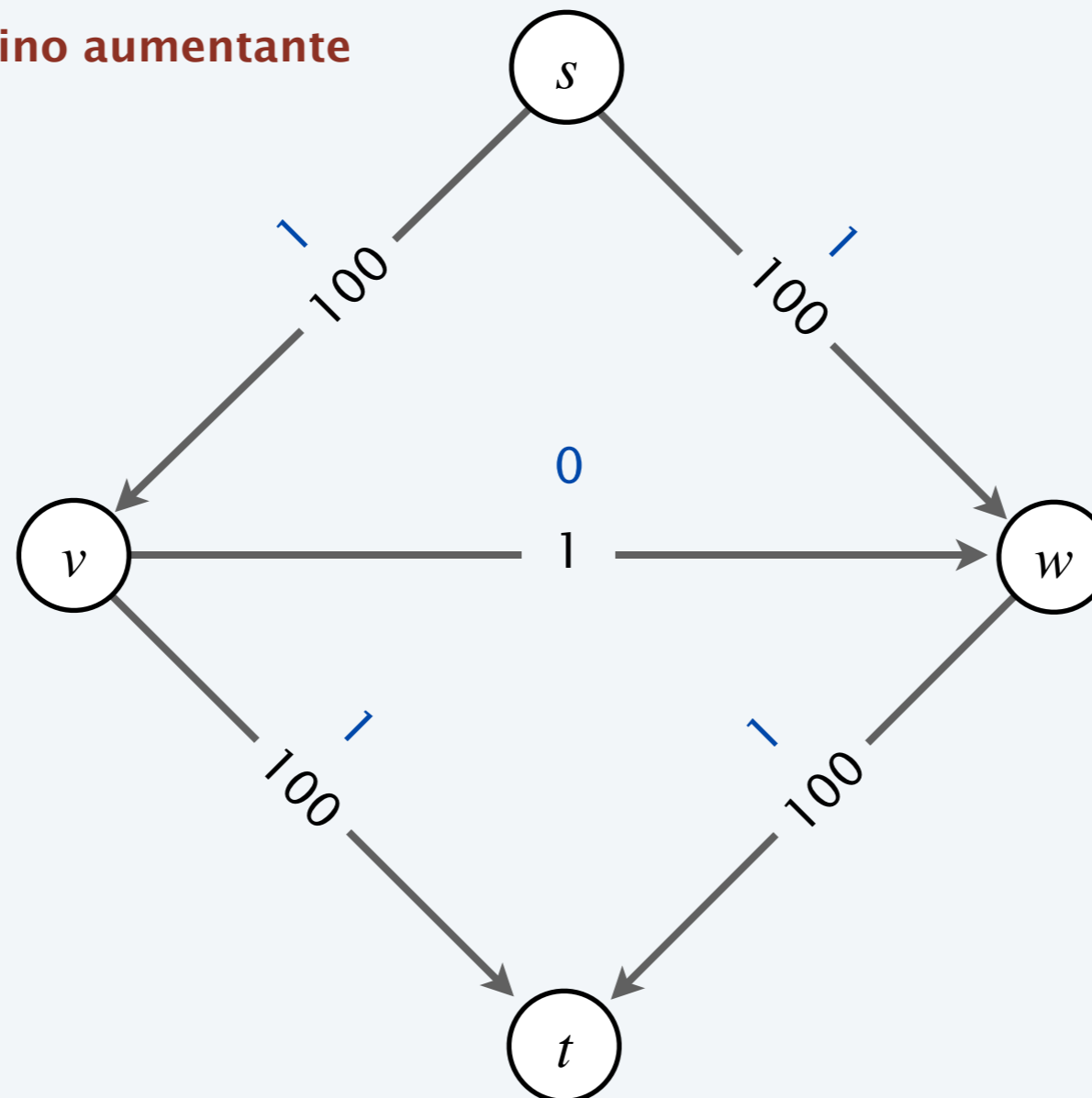
2° cammino aumentante



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

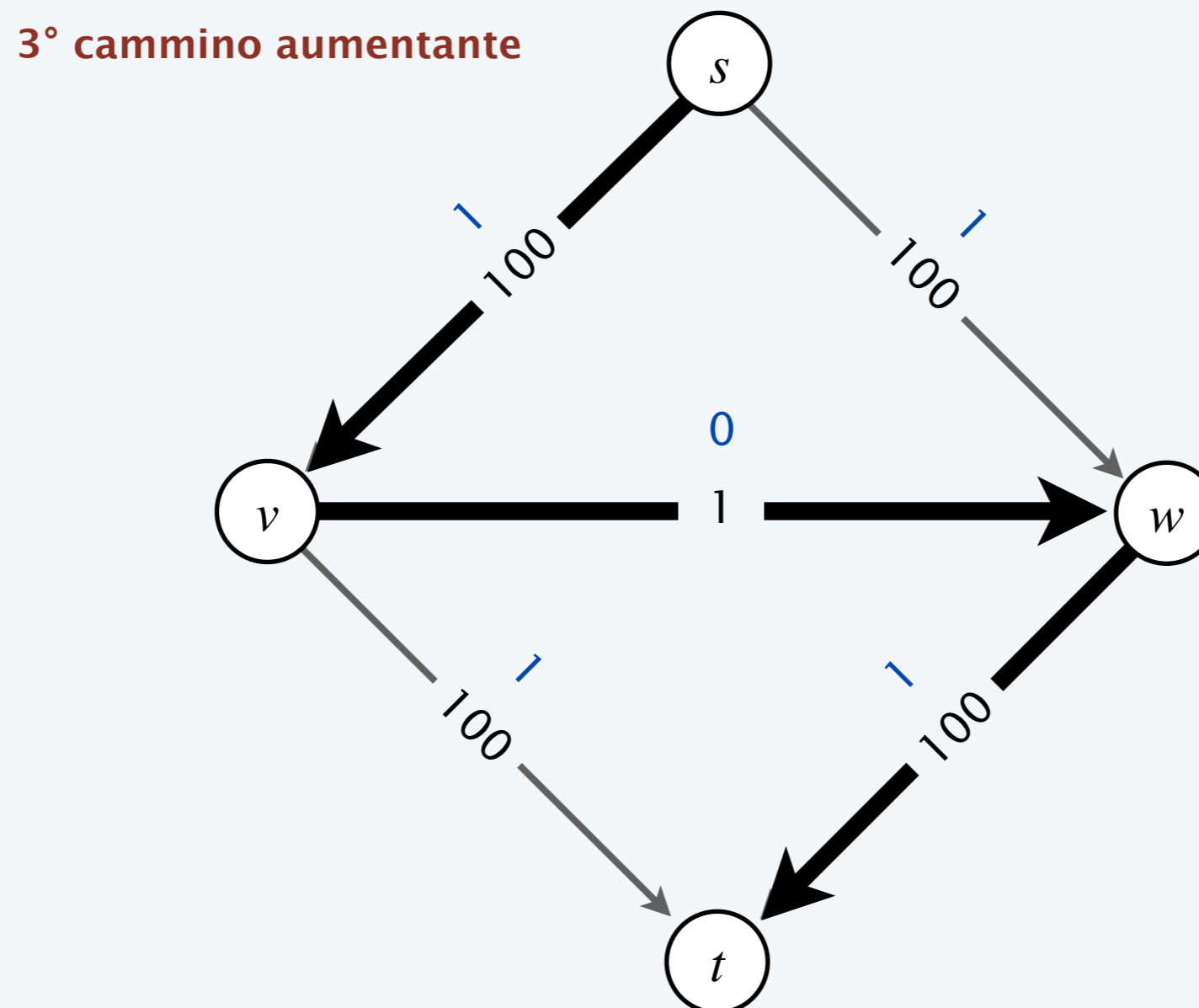
Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

3° cammino aumentante



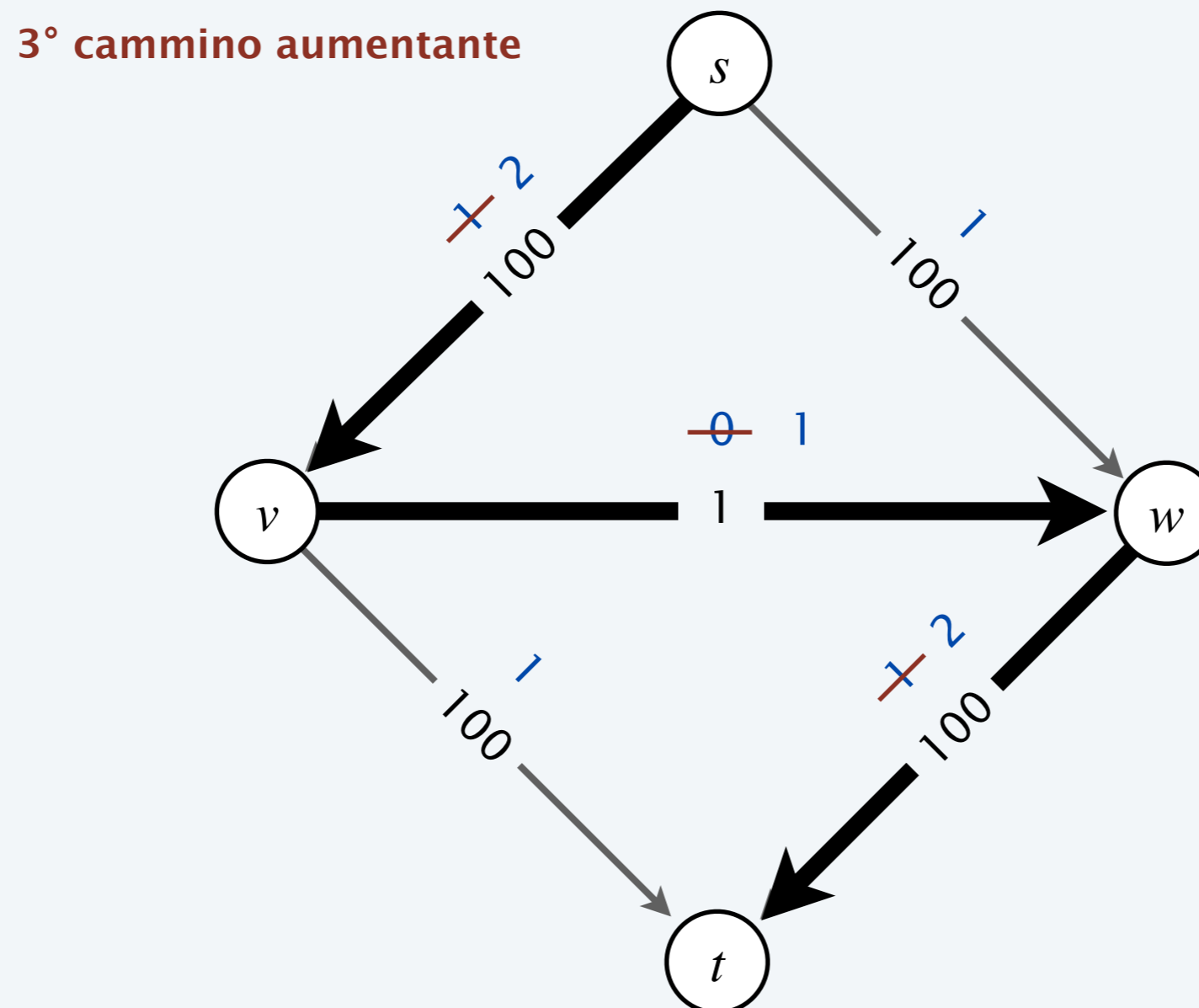
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

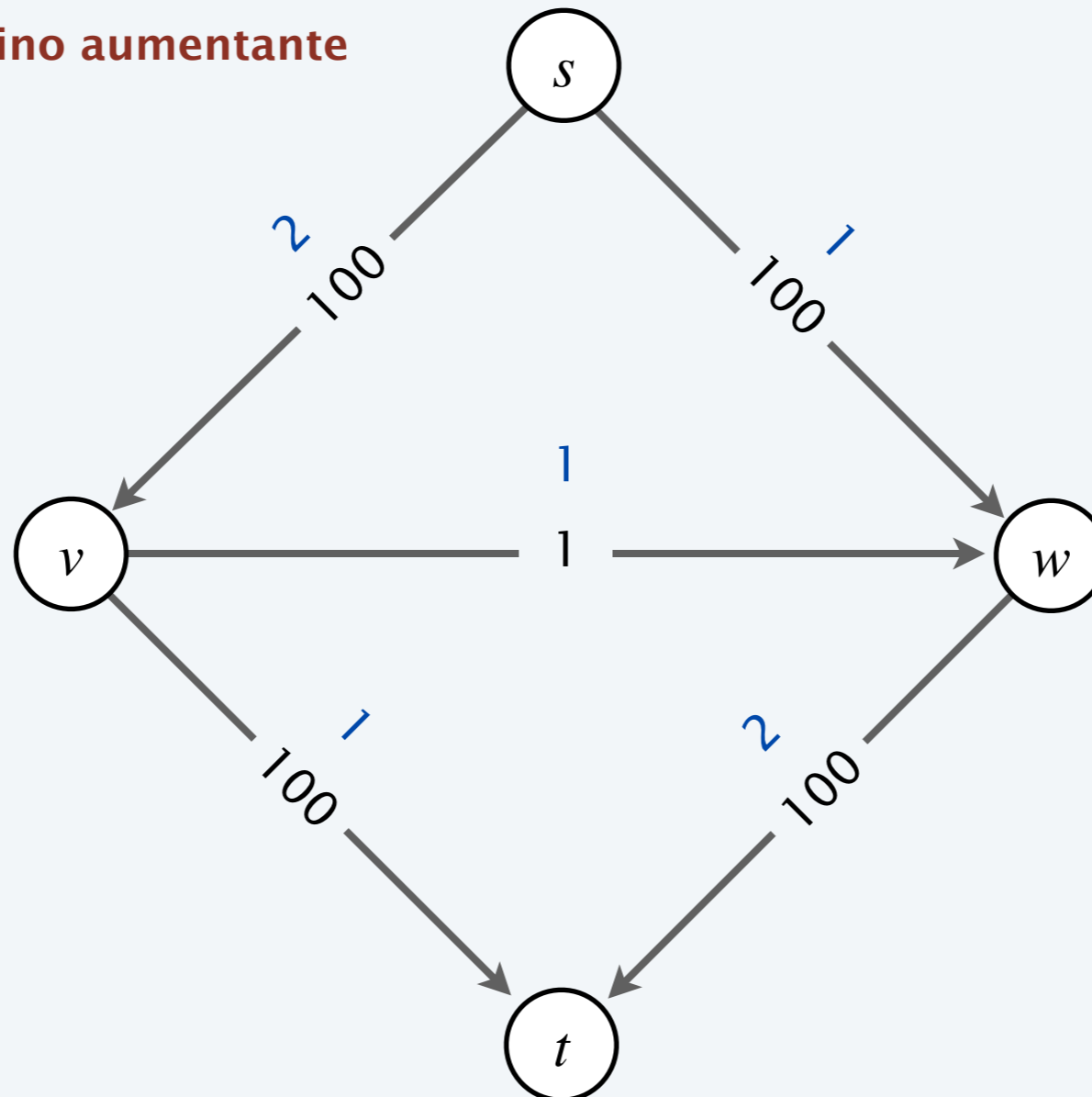
Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

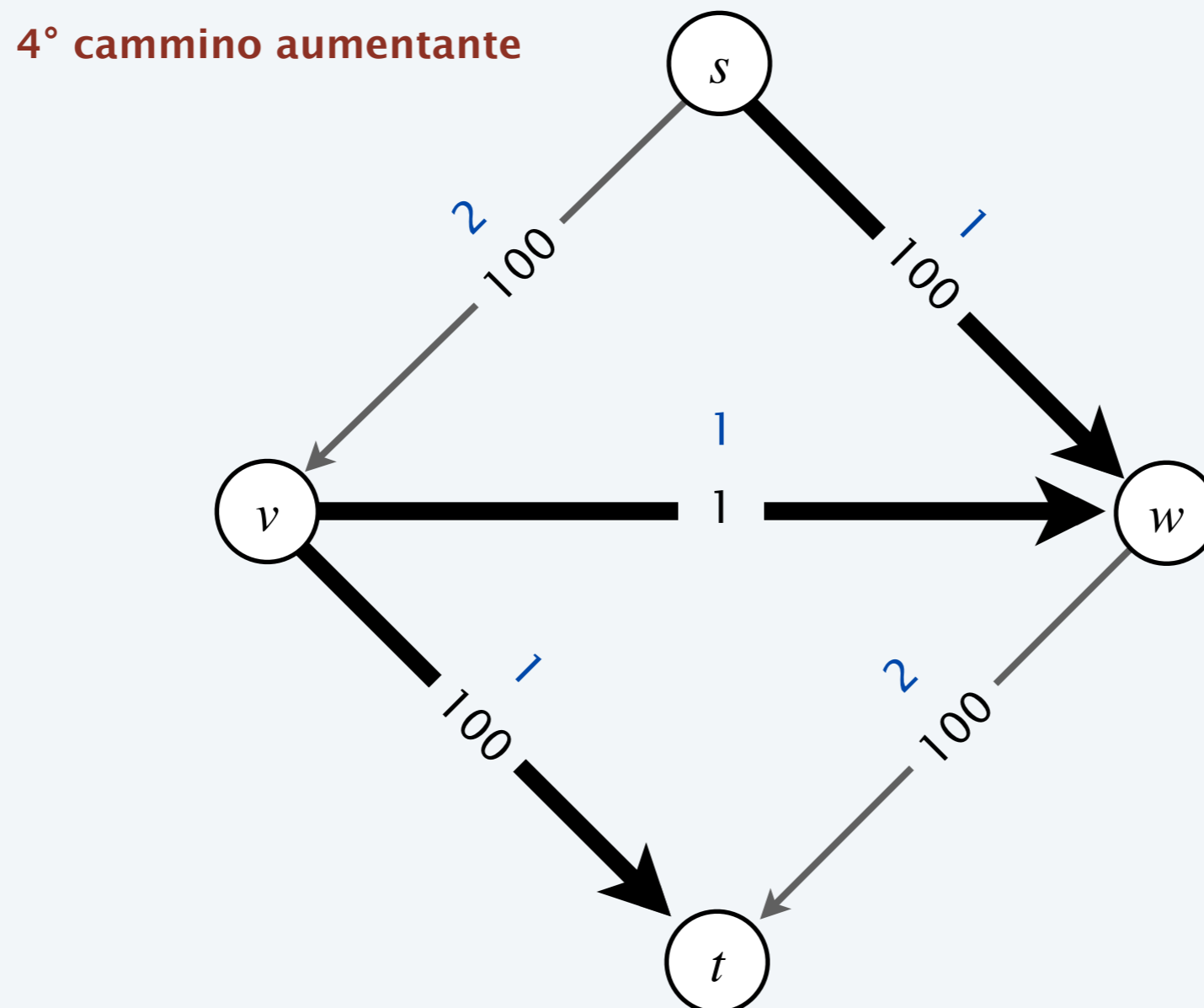
Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

4° cammino aumentante



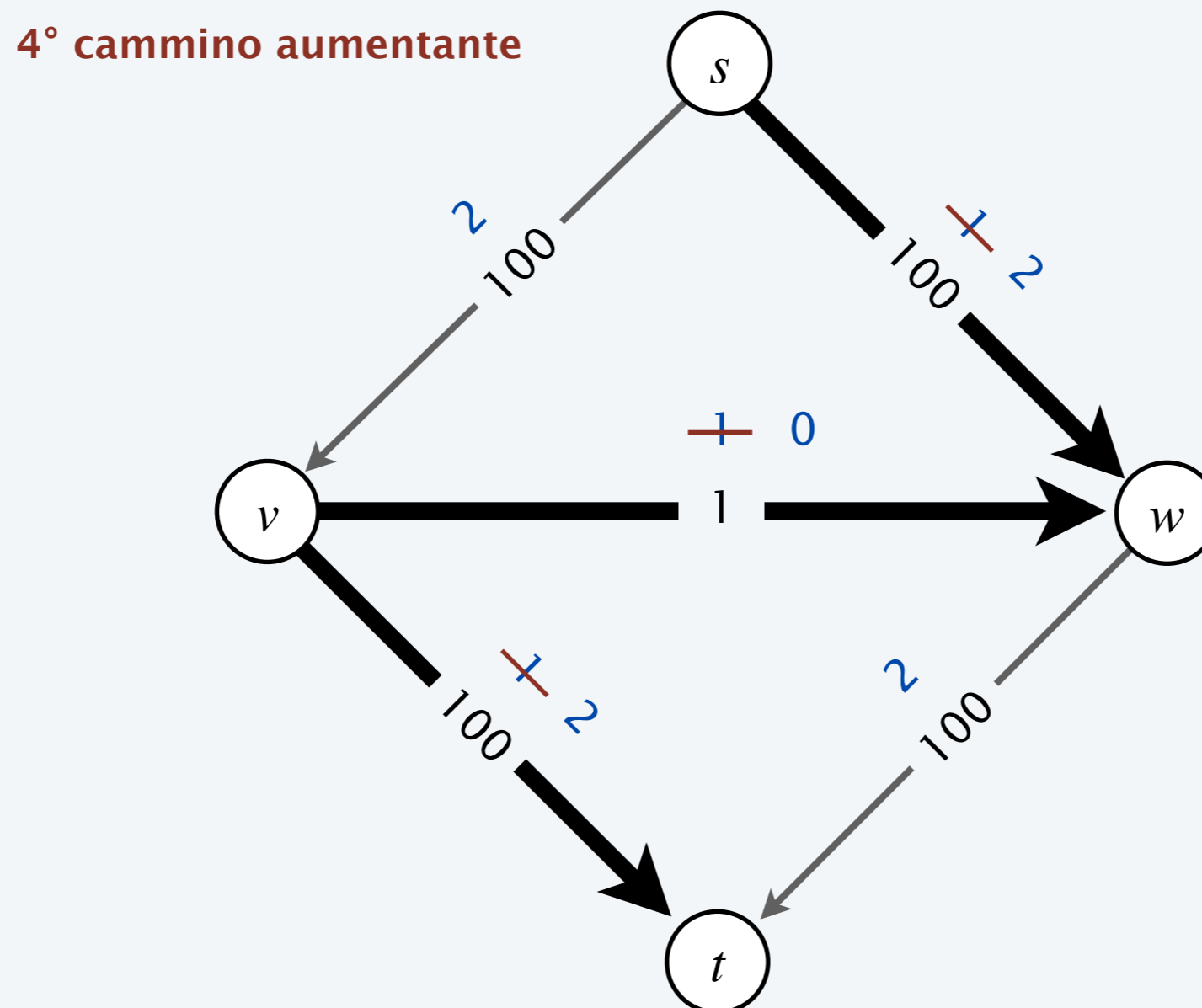
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



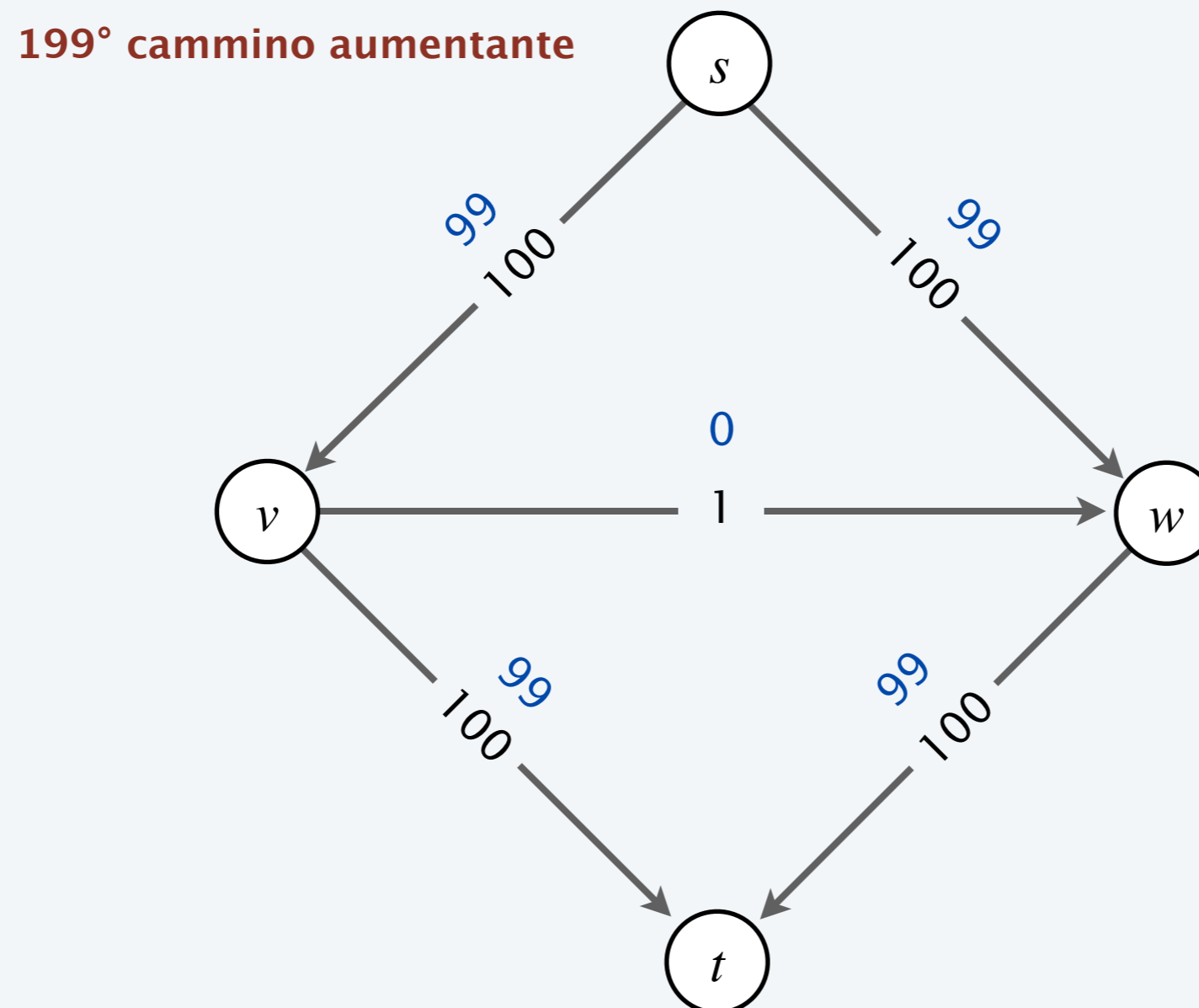
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



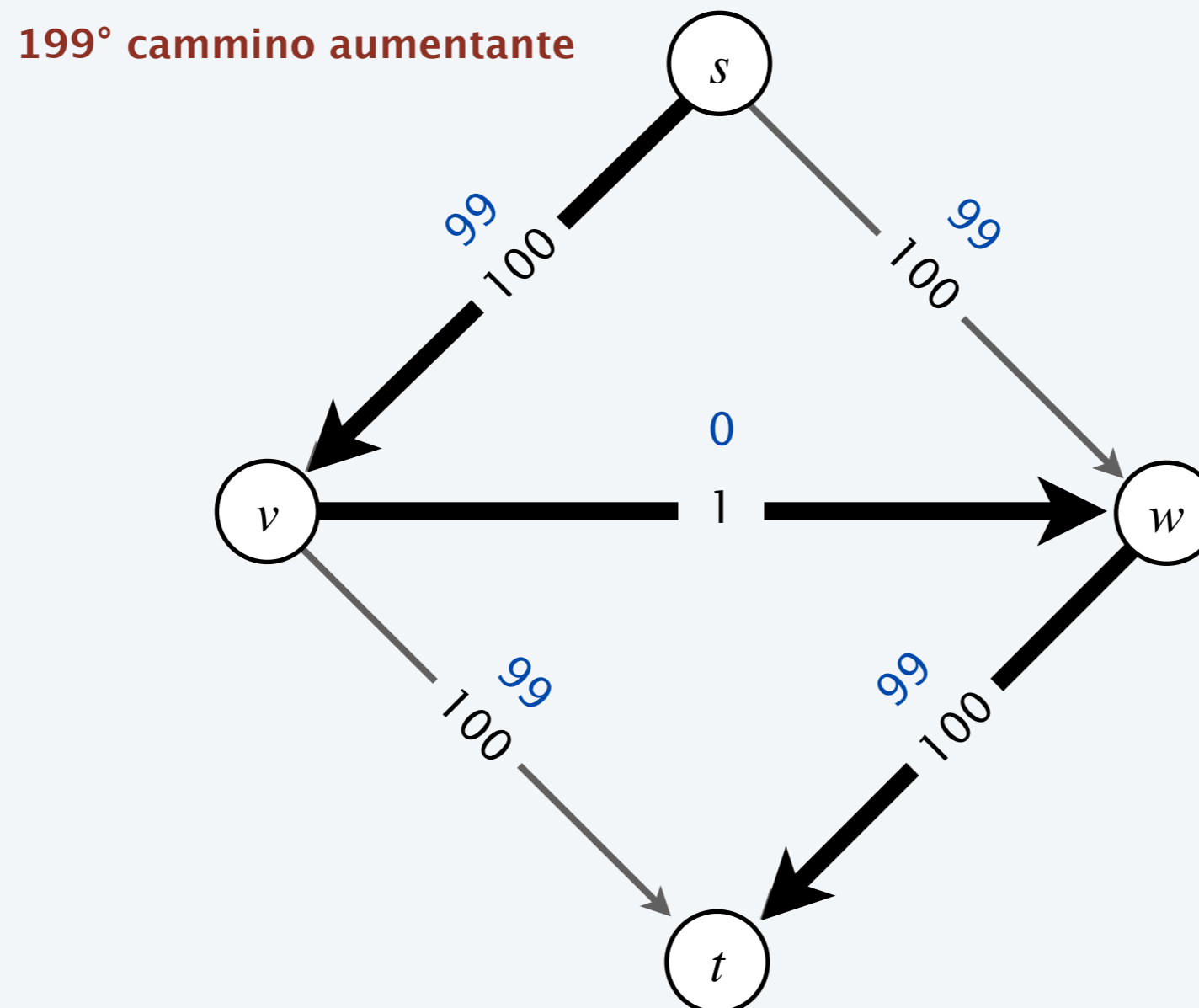
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



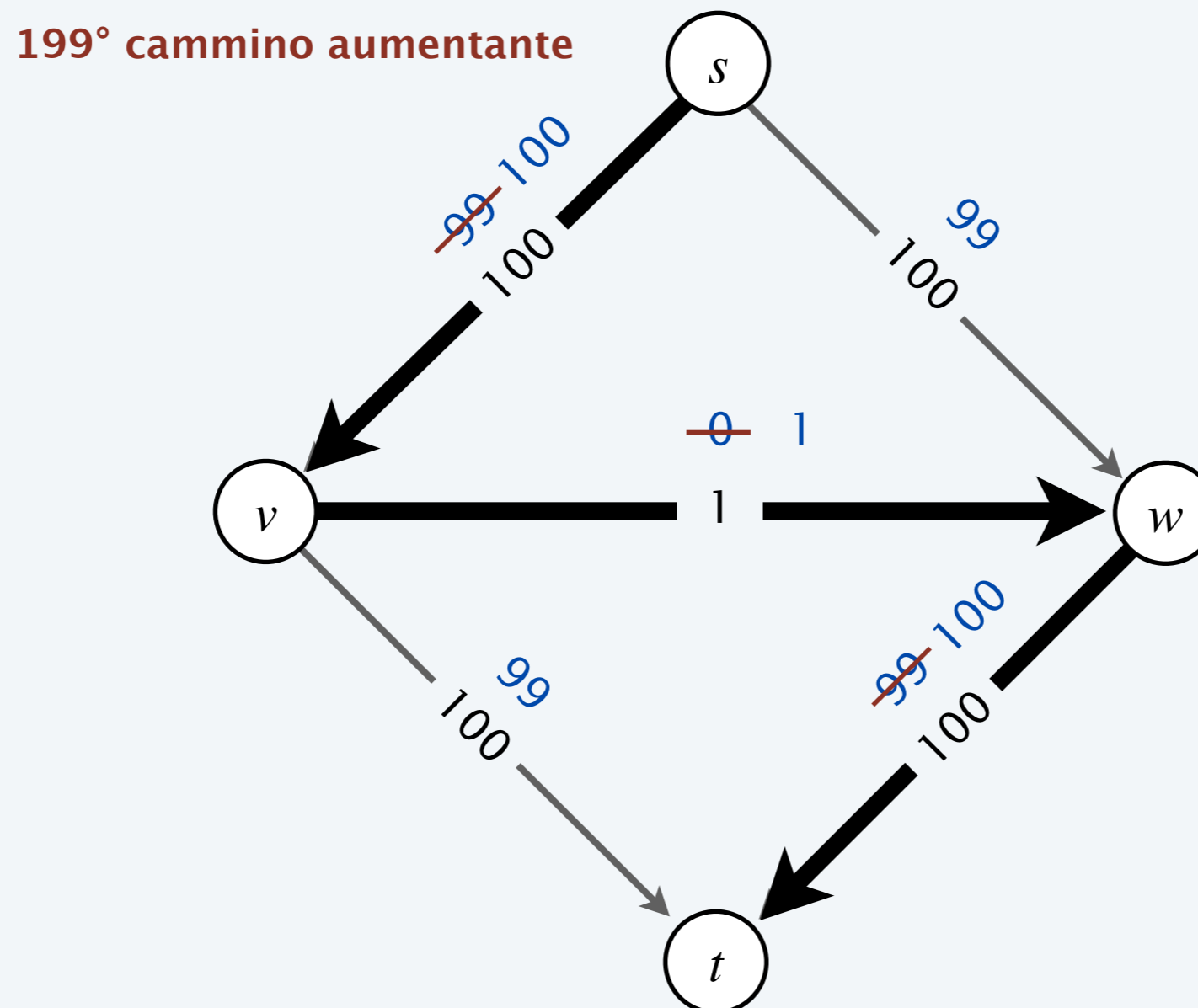
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



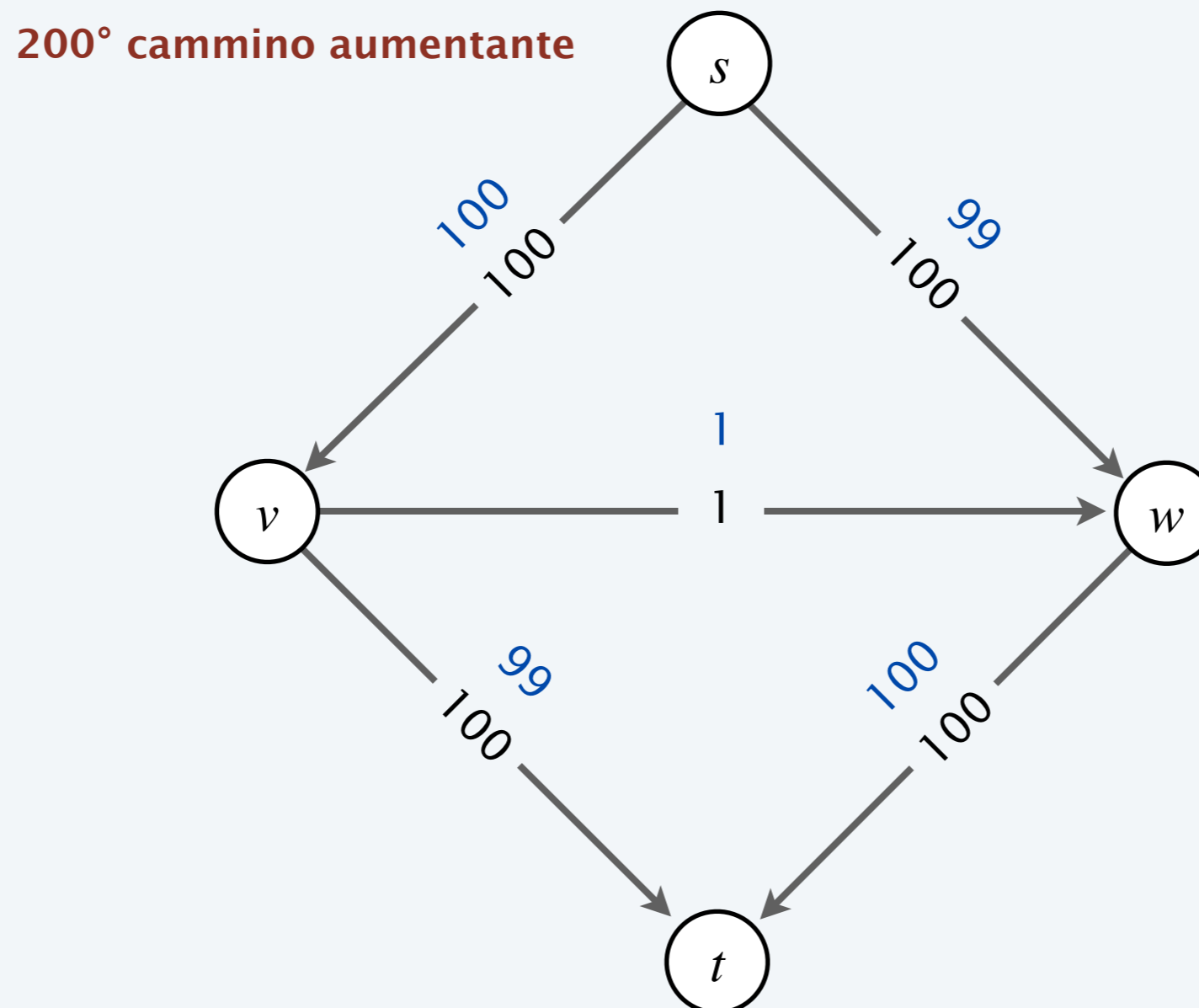
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



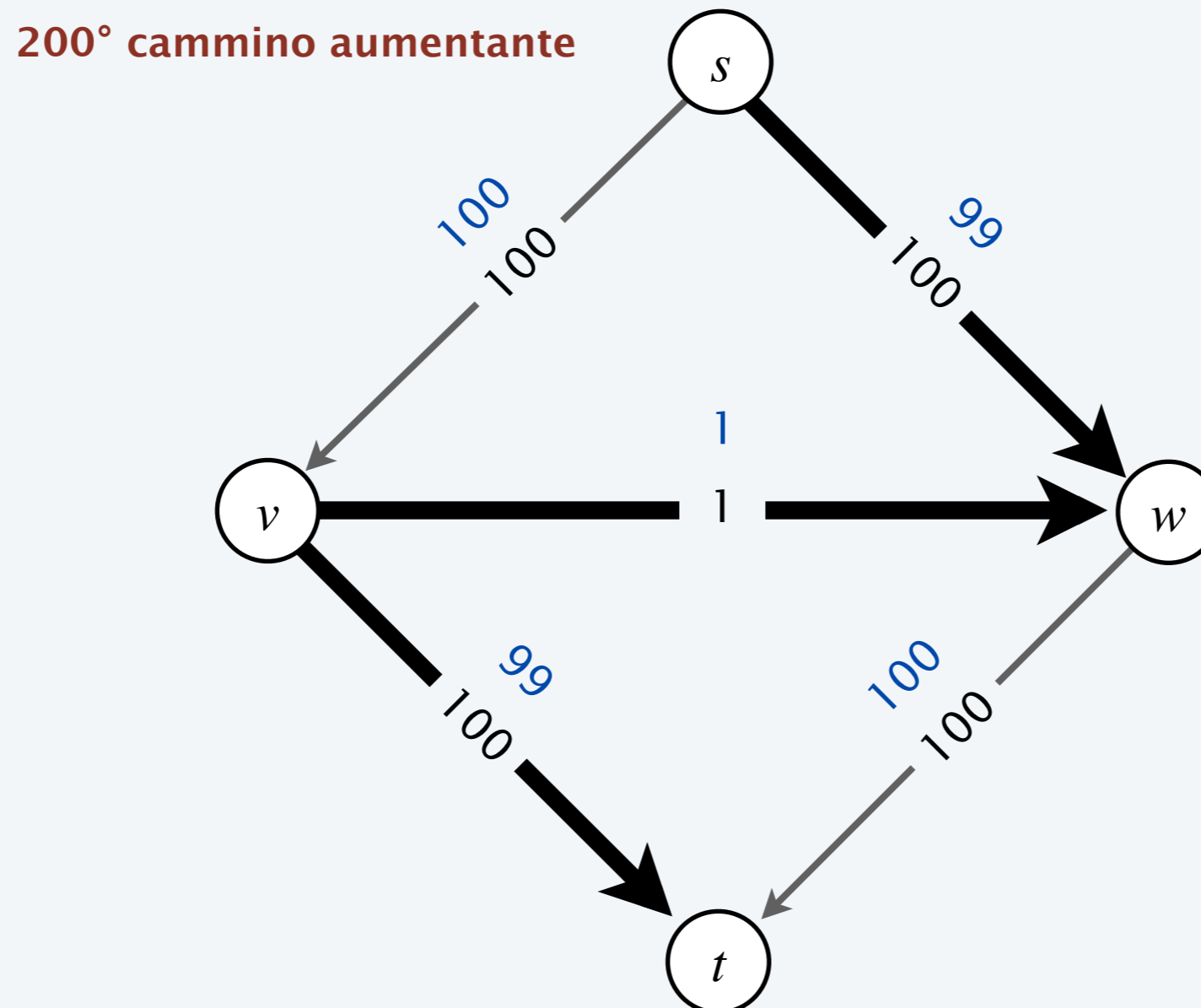
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.



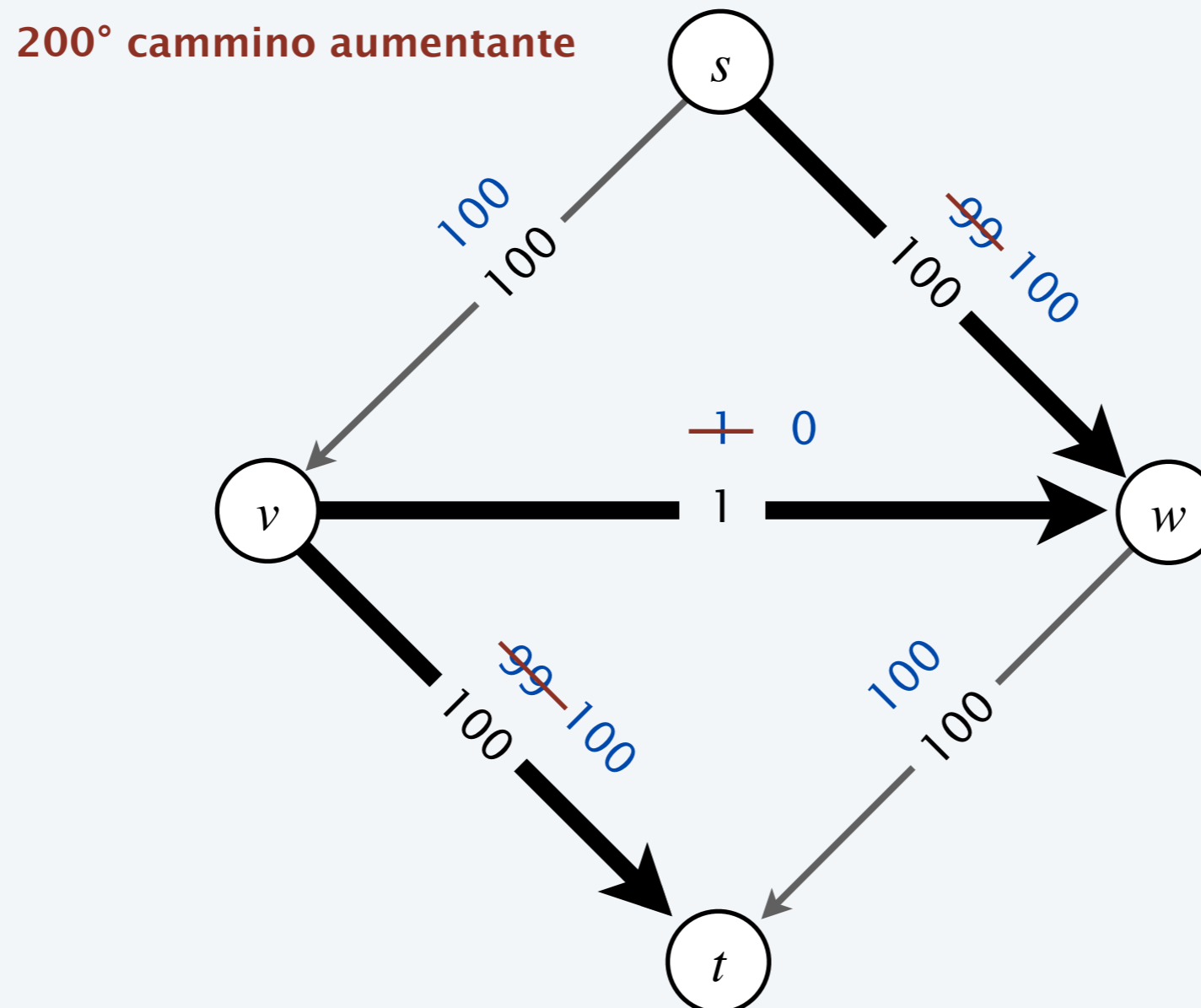
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

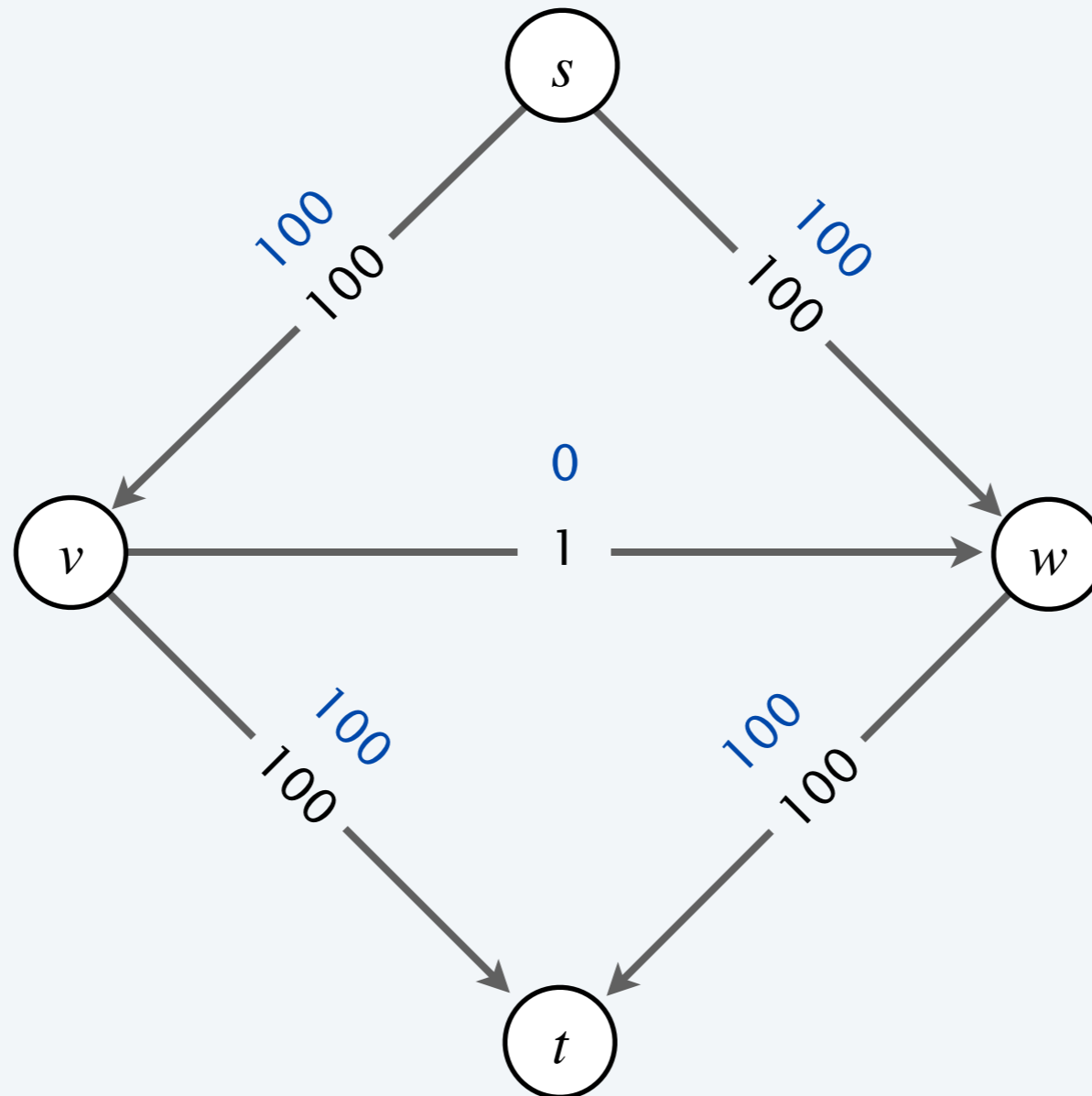


Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.

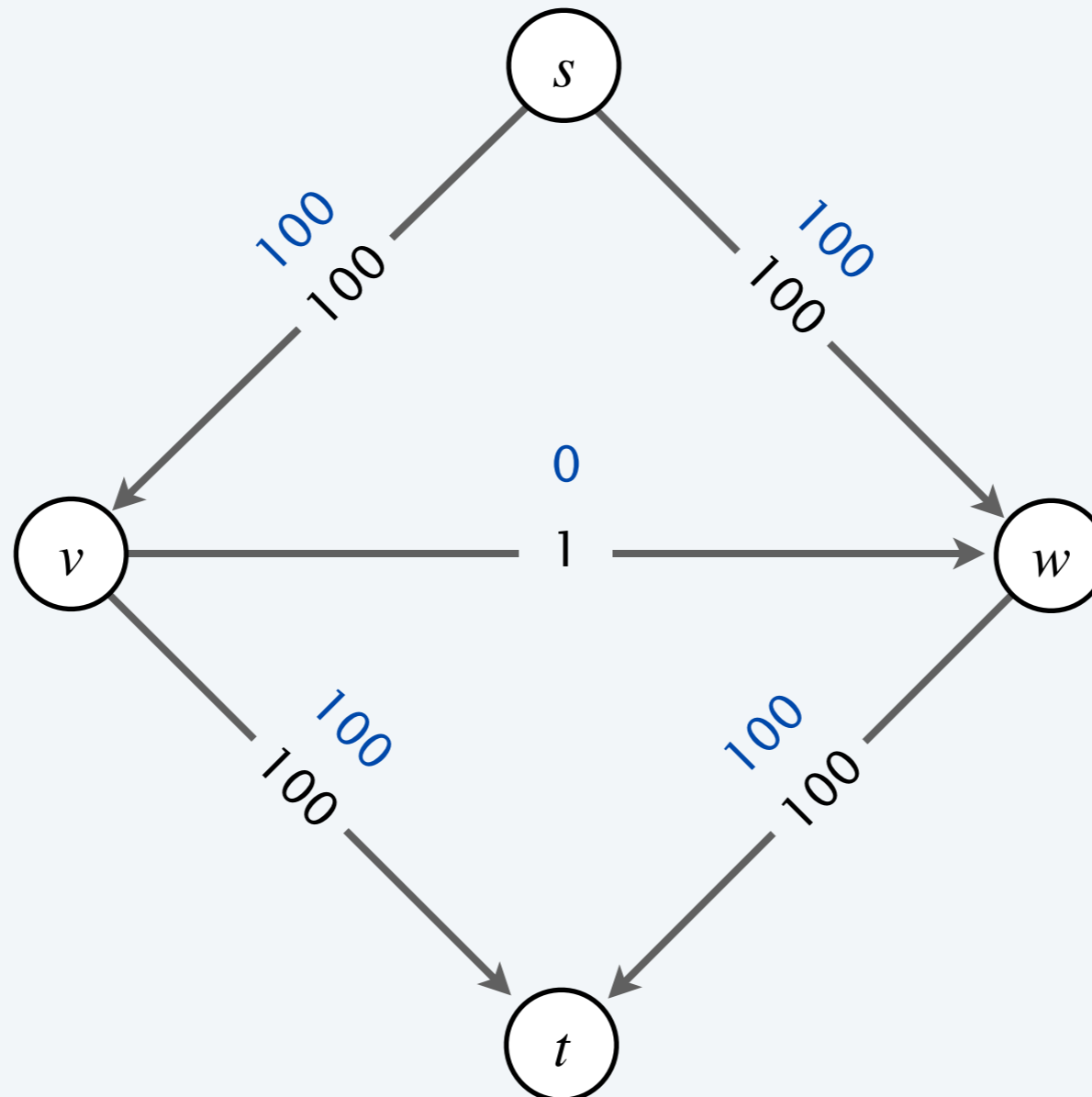


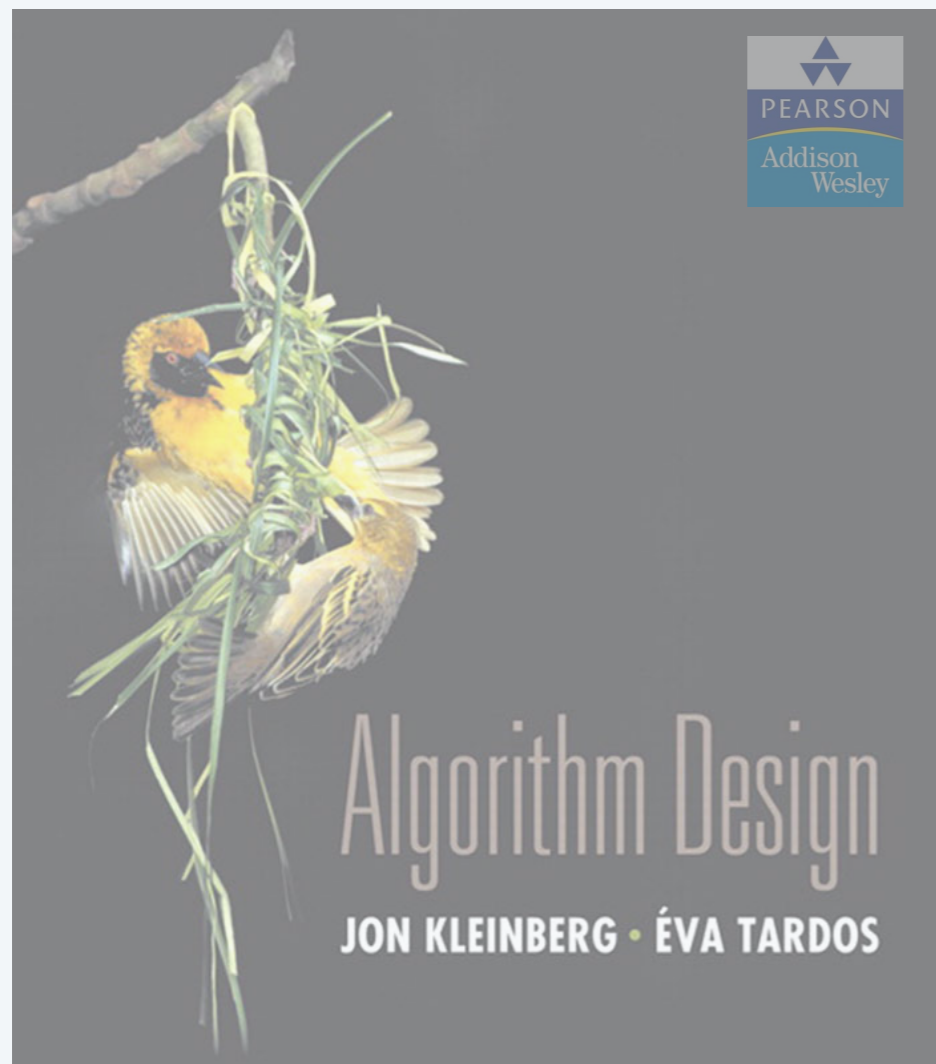
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio tempo-esponenziale



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio tempo-esponenziale

Cattiva notizia. Il numero di cammini aumentanti può essere esponenziale nella taglia dell'input.





SECTION 7.1

7. FLUSSI DI RETE I

- ▶ *Ford–Fulkerson demo*
- ▶ *exponential-time example*
- ▶ *esempio patologico*

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Intuizione. Sia $r > 0$ tale che $r^2 = 1 - r$.

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

$$r \approx 0.618 \implies r^4 < r^3 < r^2 < r < 1$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Intuizione. Sia $r > 0$ tale che $r^2 = 1 - r$.

- All'inizio, alcune capacità residue valgono 1 ed r .

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

$$r \approx 0.618 \implies r^4 < r^3 < r^2 < r < 1$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Intuizione. Sia $r > 0$ tale che $r^2 = 1 - r$.

- All'inizio, alcune capacità residue valgono 1 ed r .
- Dopo due passate, alcune capacità residue sono r ed r^2 .

$1 - r$



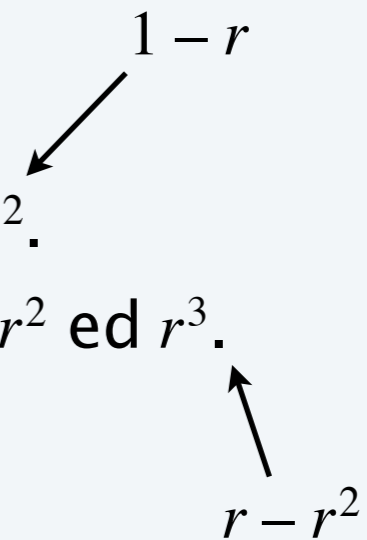
$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

$$r \approx 0.618 \implies r^4 < r^3 < r^2 < r < 1$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Intuizione. Sia $r > 0$ tale che $r^2 = 1 - r$.

- All'inizio, alcune capacità residue valgono 1 ed r .
- Dopo due passate, alcune capacità residue sono r ed r^2 .
- Dopo altre due passate, alcune capacità residue sono r^2 ed r^3 .



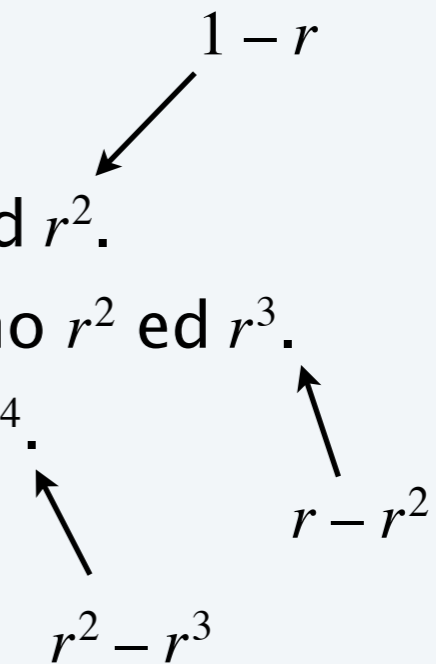
$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

$$r \approx 0.618 \implies r^4 < r^3 < r^2 < r < 1$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Intuizione. Sia $r > 0$ tale che $r^2 = 1 - r$.

- All'inizio, alcune capacità residue valgono 1 ed r .
- Dopo due passate, alcune capacità residue sono r ed r^2 .
- Dopo altre due passate, alcune capacità residue sono r^2 ed r^3 .
- Dopo altre due, alcune capacità residue sono r^3 ed r^4 .

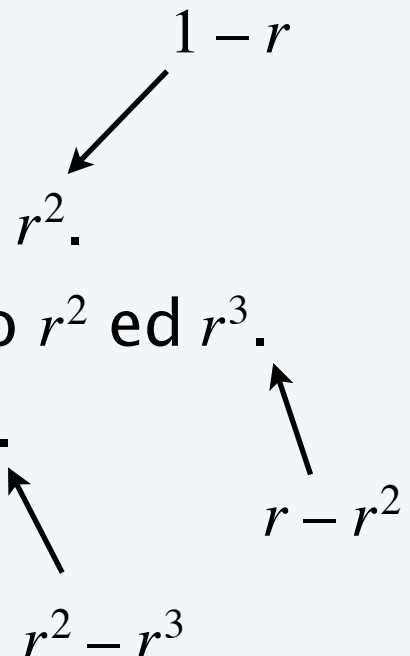


$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

$$r \approx 0.618 \implies r^4 < r^3 < r^2 < r < 1$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Intuizione. Sia $r > 0$ tale che $r^2 = 1 - r$.

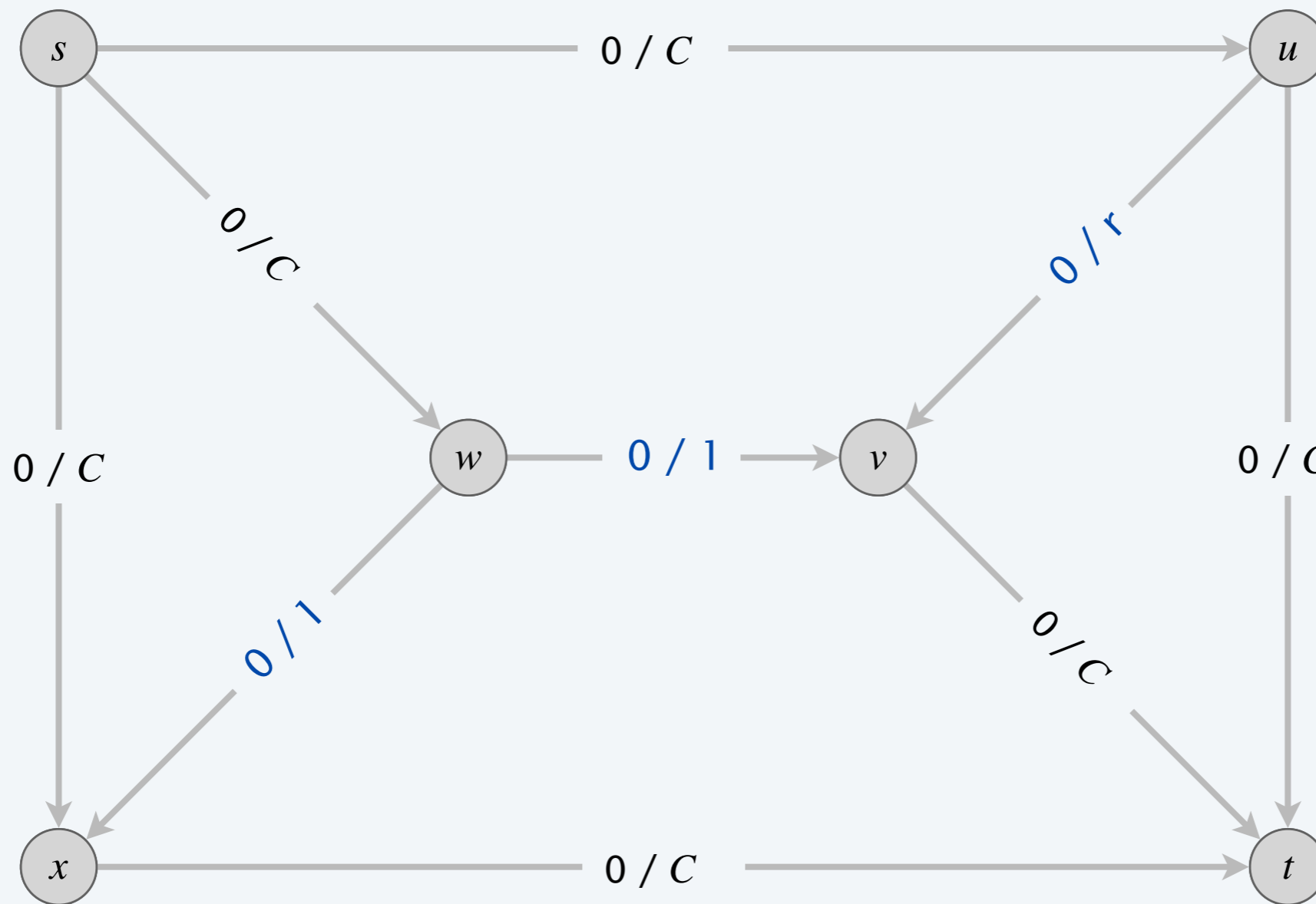
- All'inizio, alcune capacità residue valgono 1 ed r .
 - Dopo due passate, alcune capacità residue sono r ed r^2 .
 - Dopo altre due passate, alcune capacità residue sono r^2 ed r^3 .
 - Dopo altre due, alcune capacità residue sono r^3 ed r^4 .
 - Scegliendo opportunamente i cammini aumentanti, si possono ottenere infiniti valori di capacità residue!
- 

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

$$r \approx 0.618 \implies r^4 < r^3 < r^2 < r < 1$$

Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

rete di flusso G

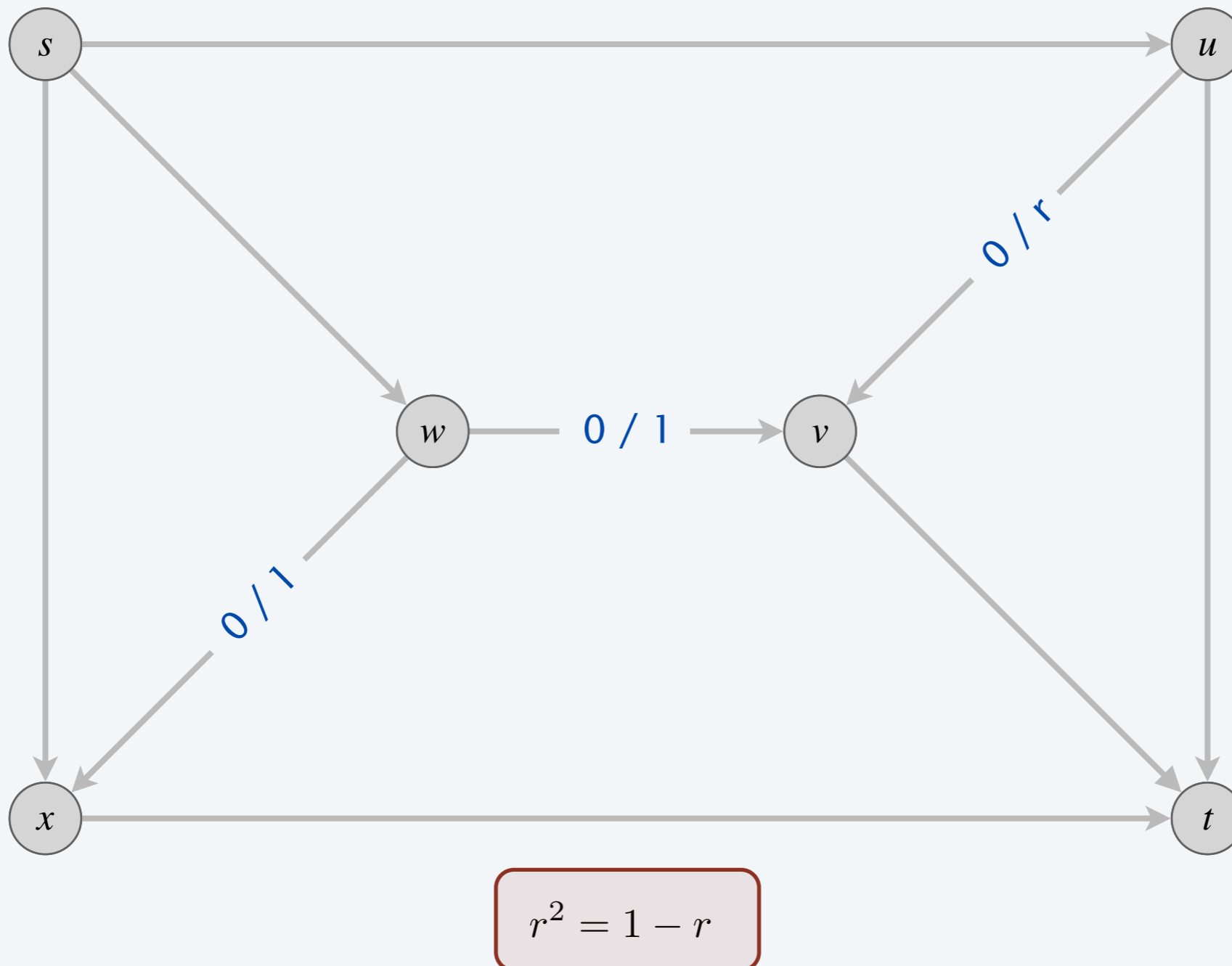


C sufficientemente grande da non essere mai una strozzatura (ometteremo di scriverlo)

$$r^2 = 1 - r$$

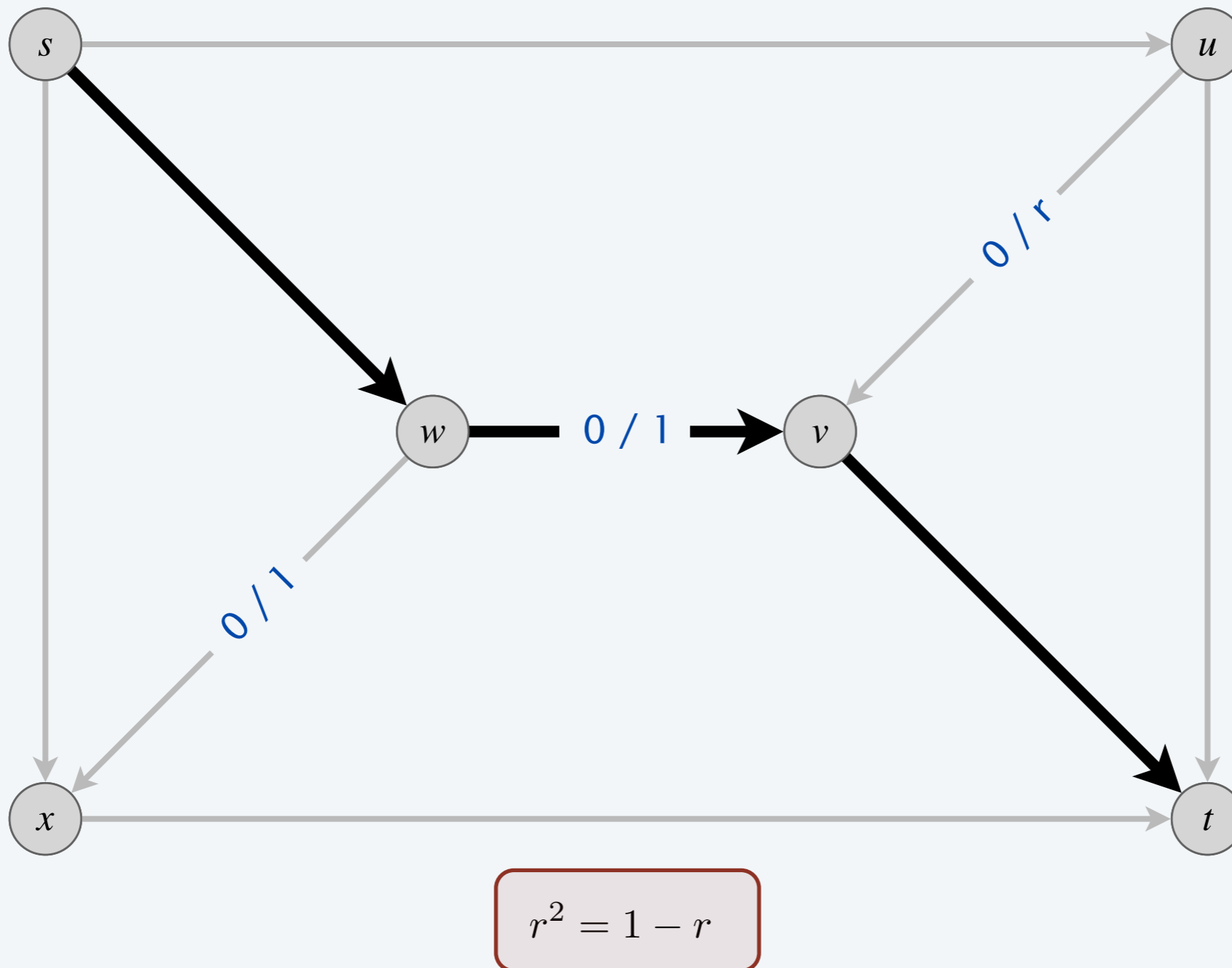
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 1: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = 1)



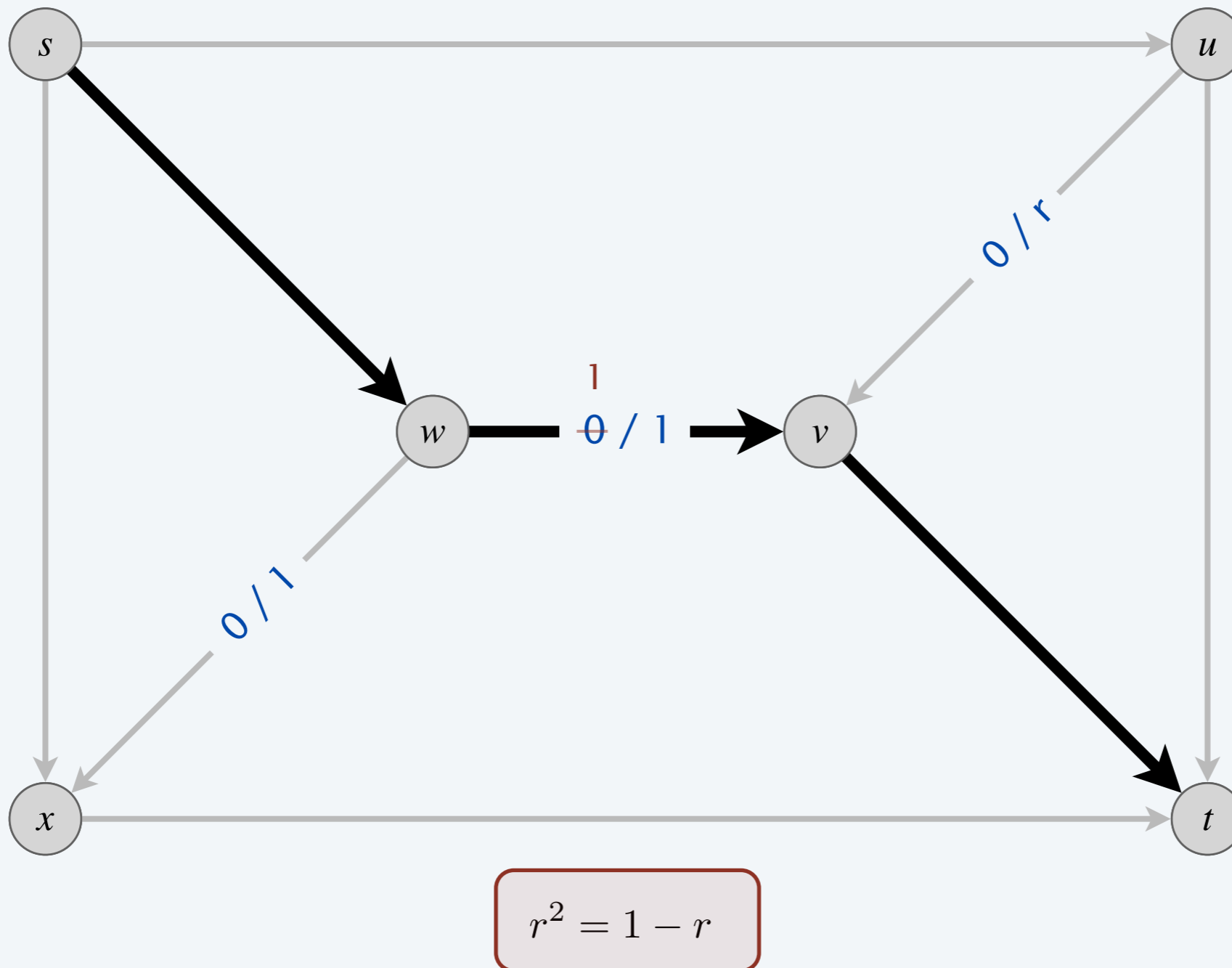
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 1: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = 1)



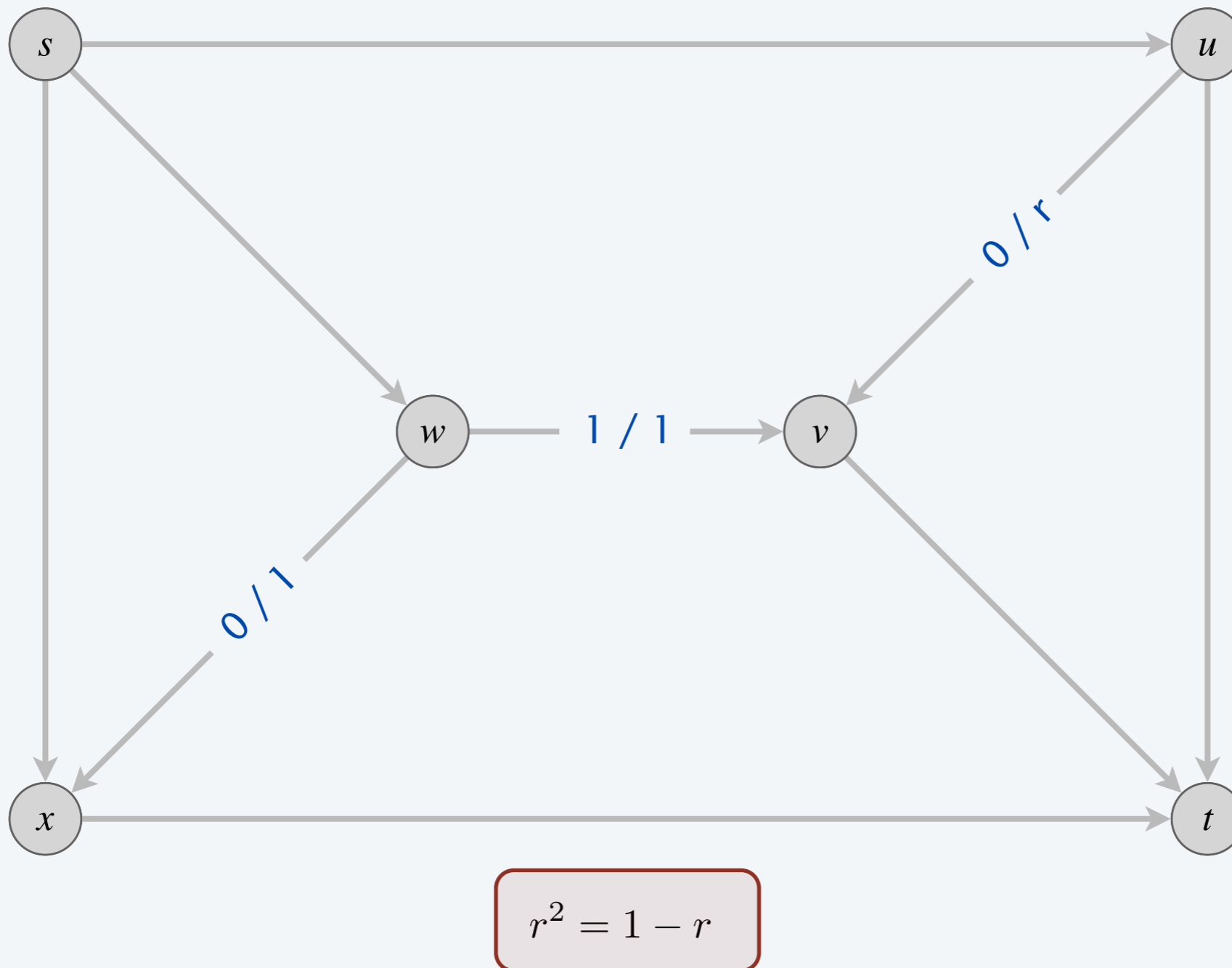
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 1: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = 1)



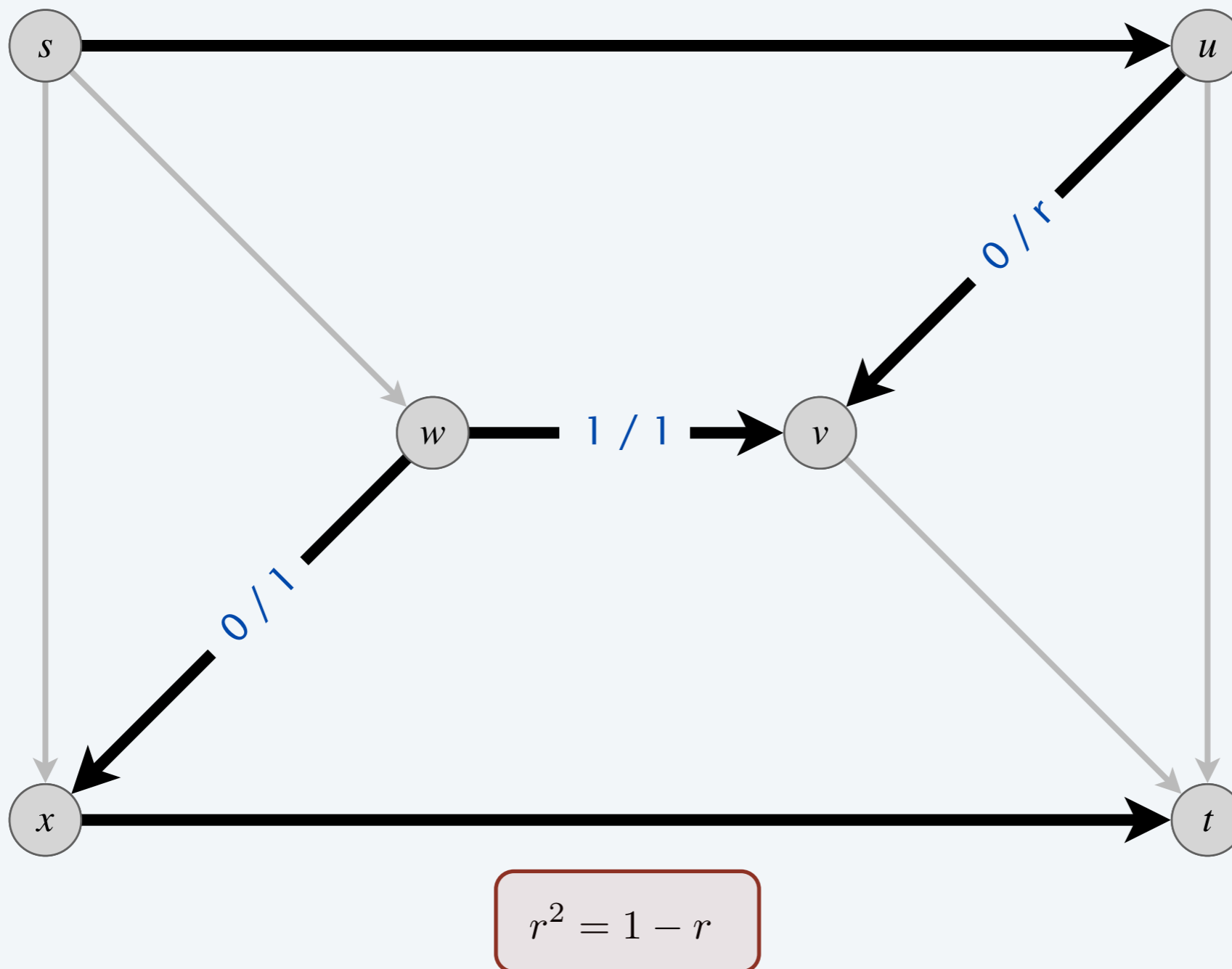
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 2: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r)



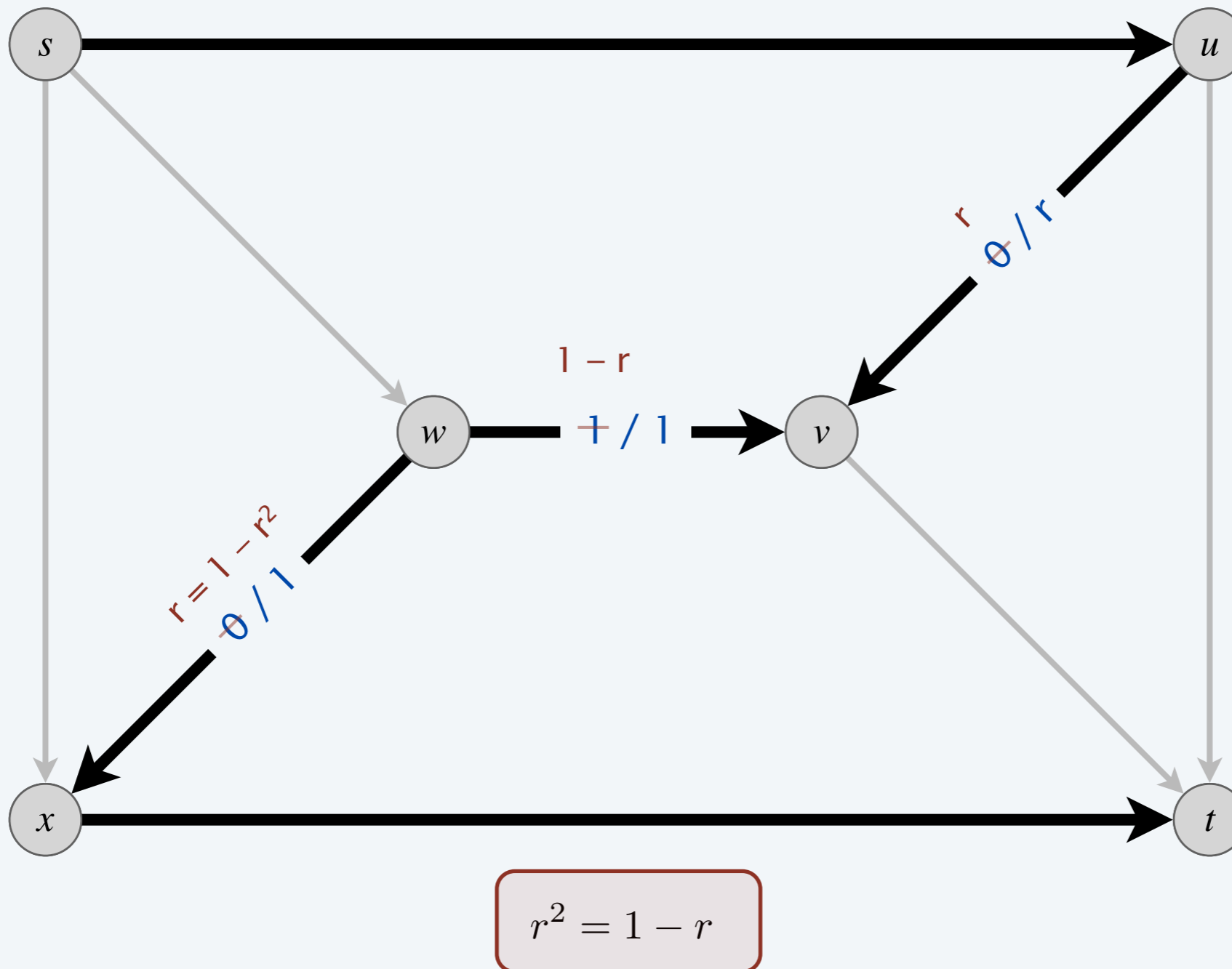
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 2: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r)



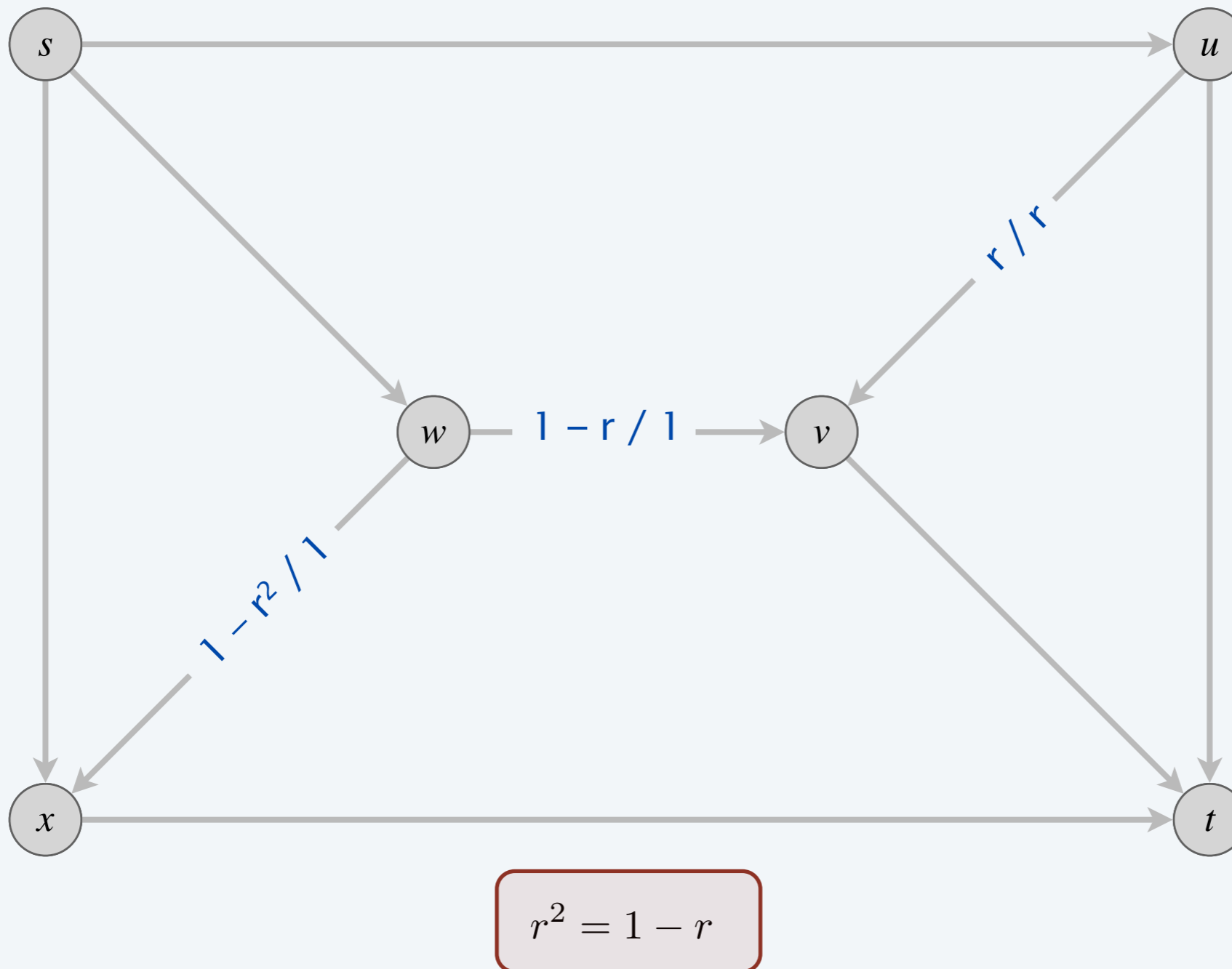
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 2: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r)



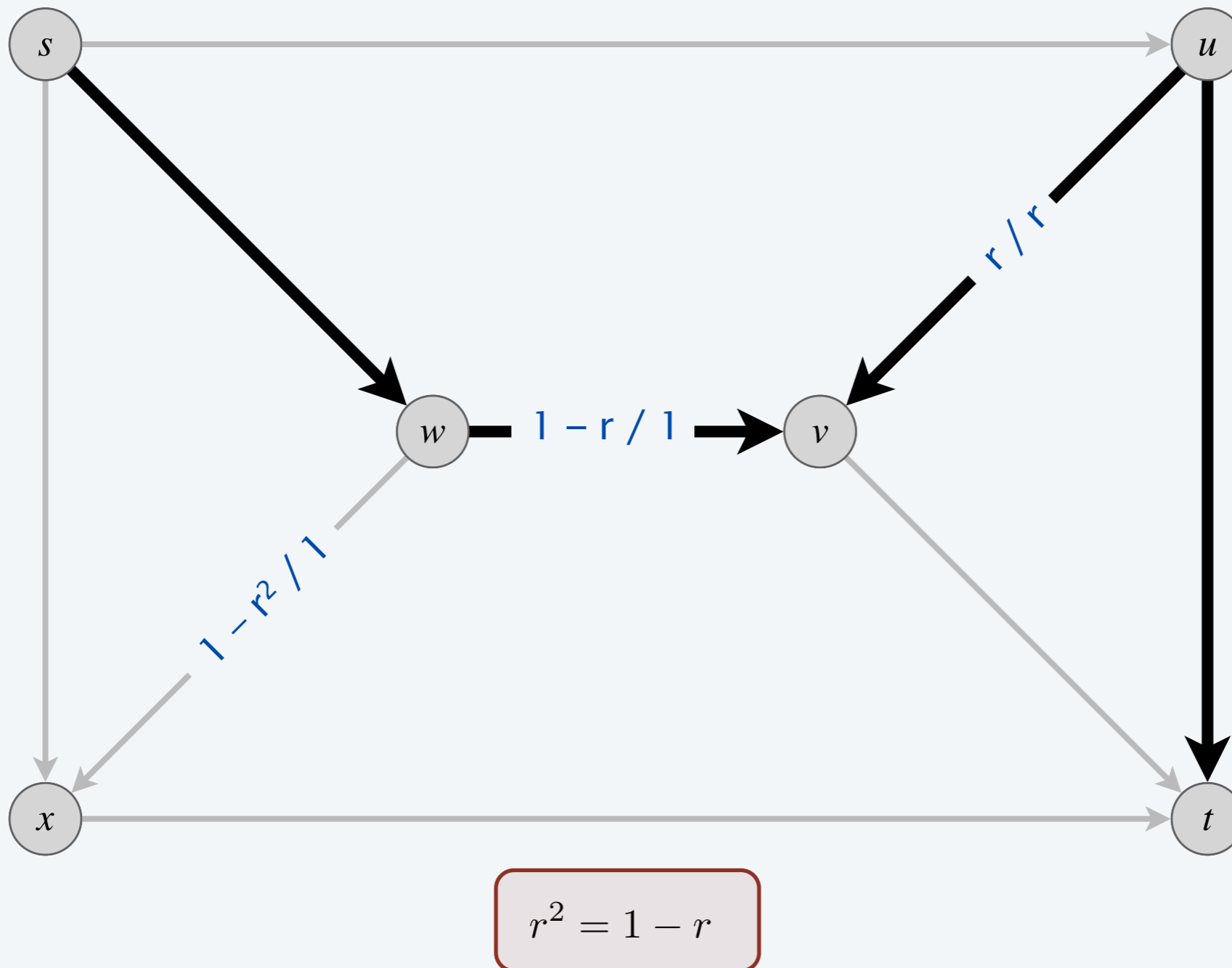
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 3: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r)



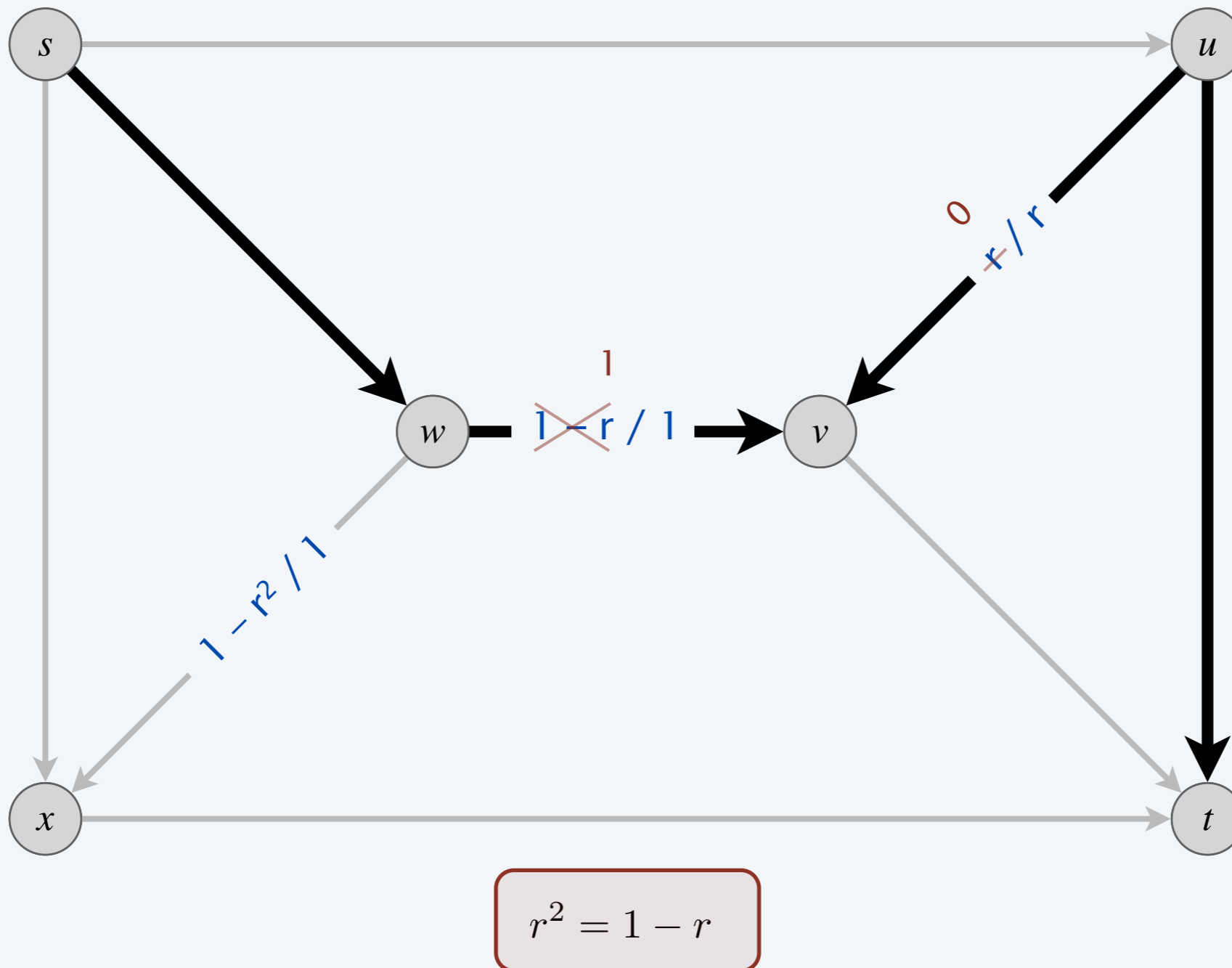
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 3: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r)



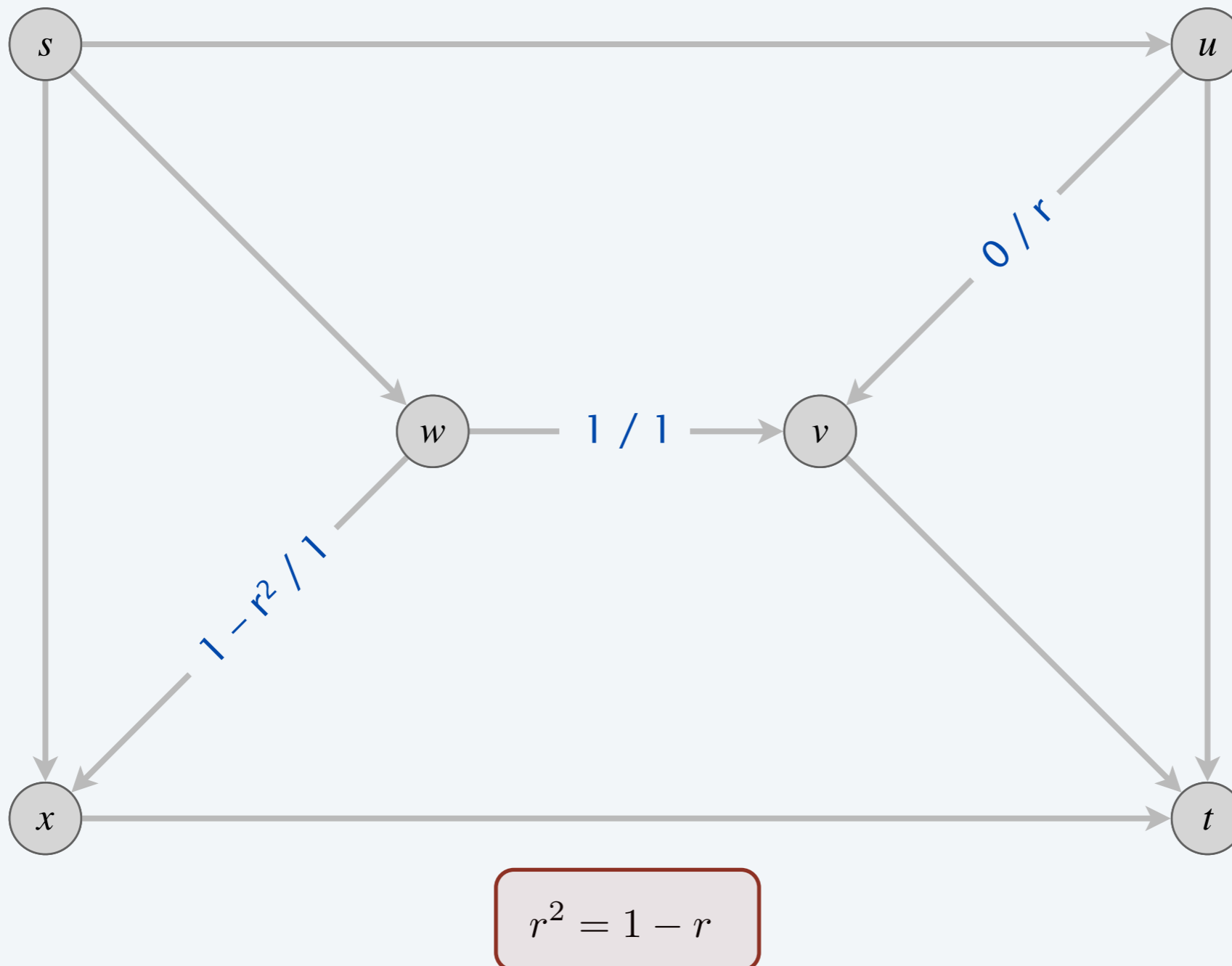
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 3: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r)



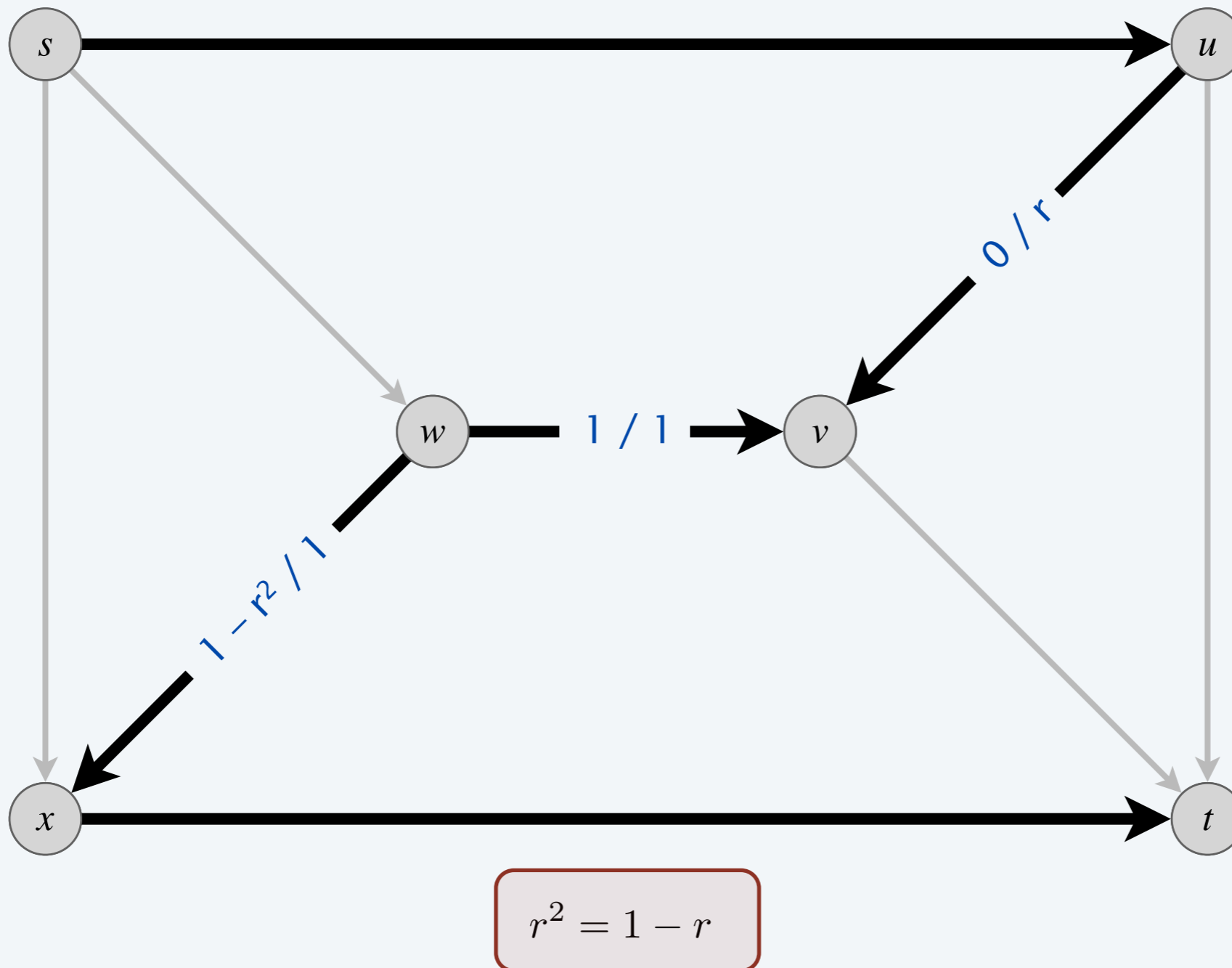
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 4: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^2)



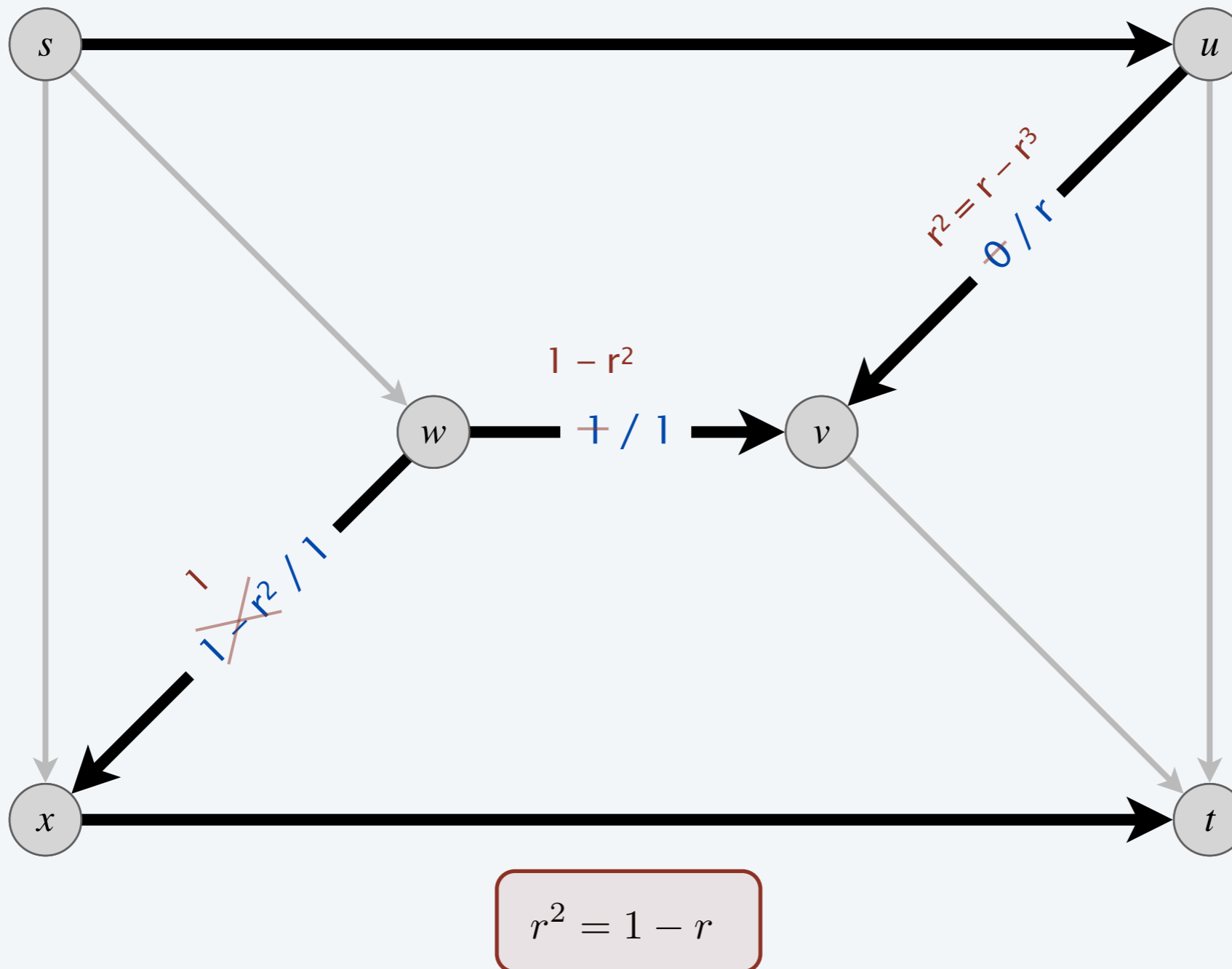
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 4: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^2)



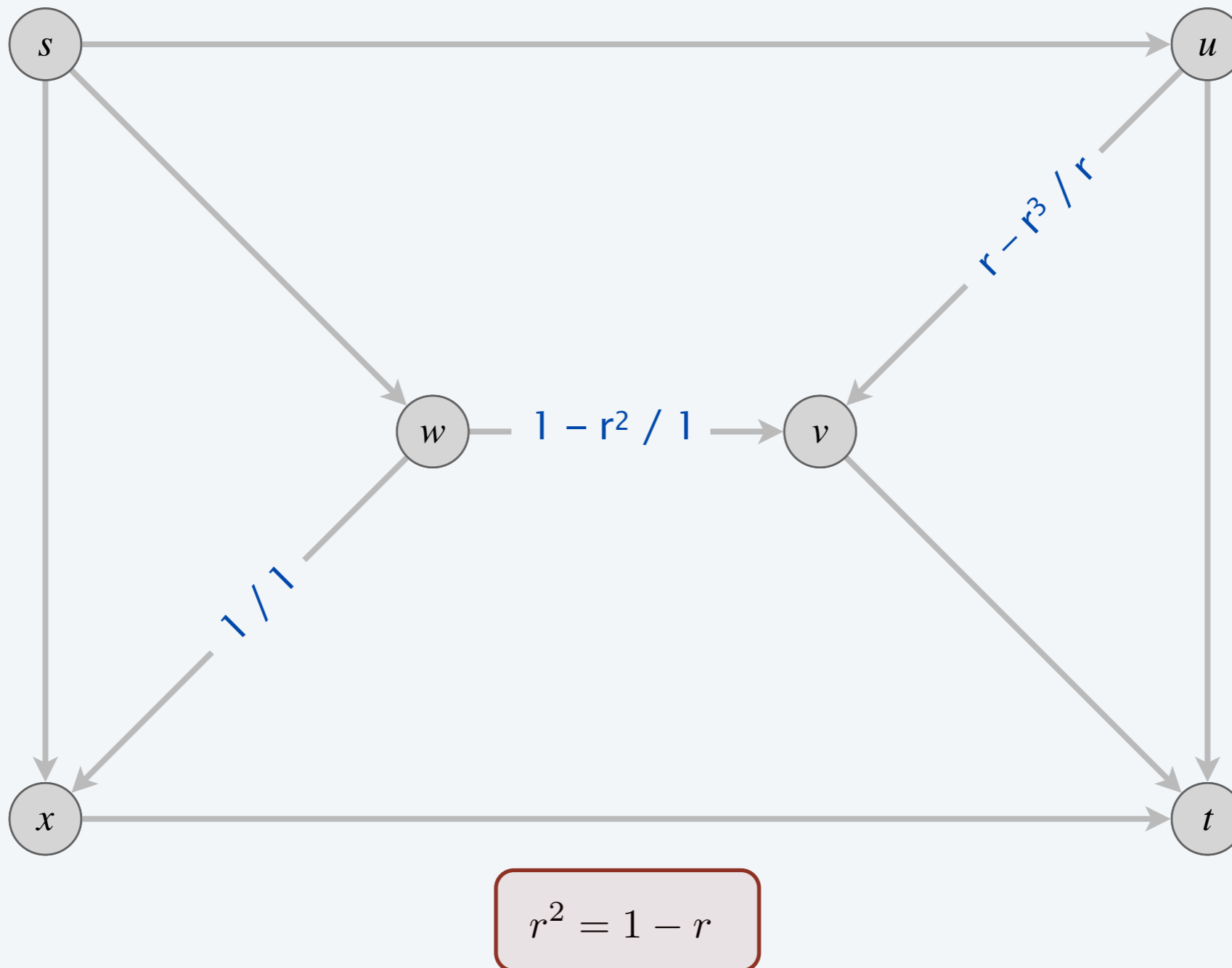
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 4: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^2)



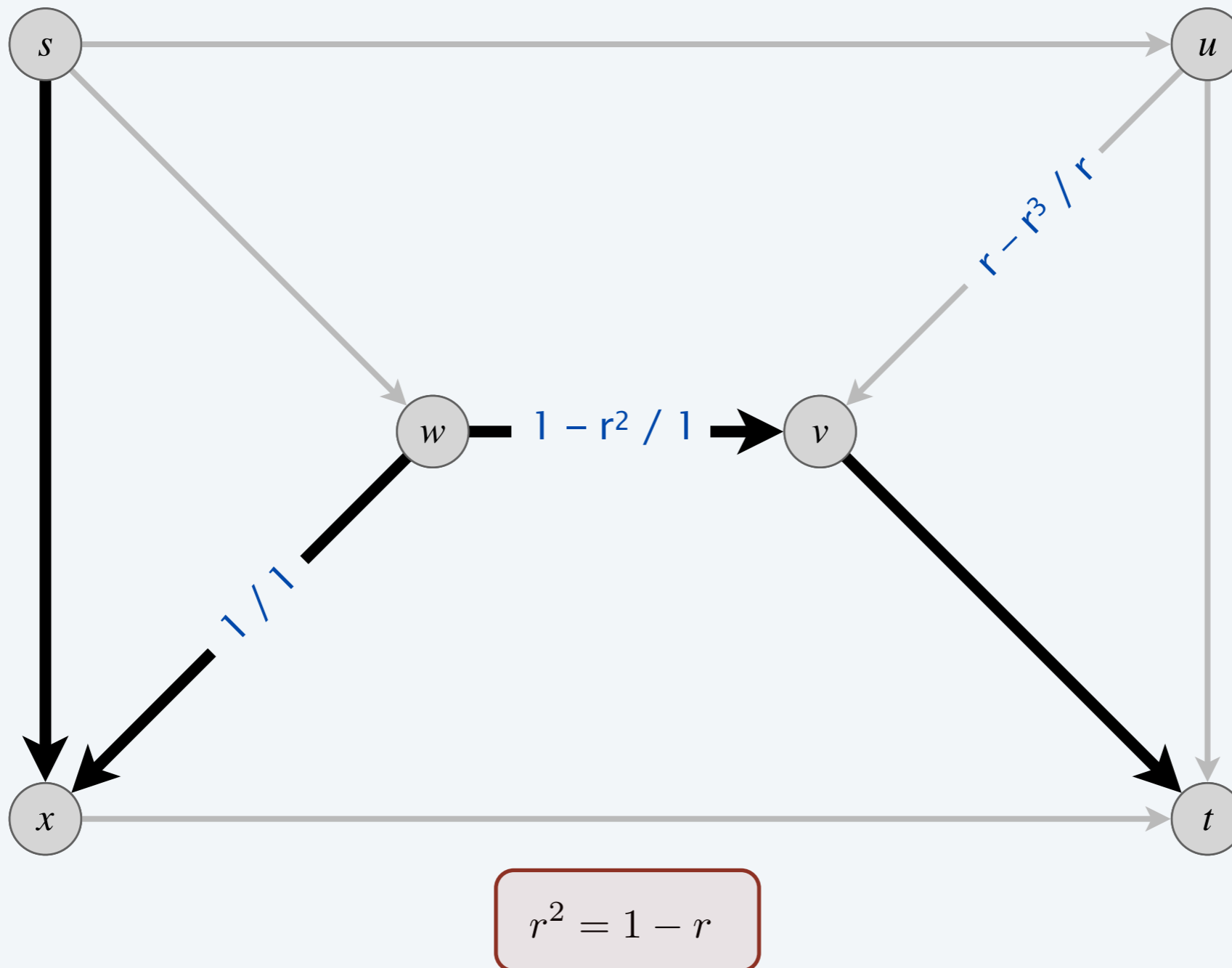
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 5: $s \rightarrow x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^2)



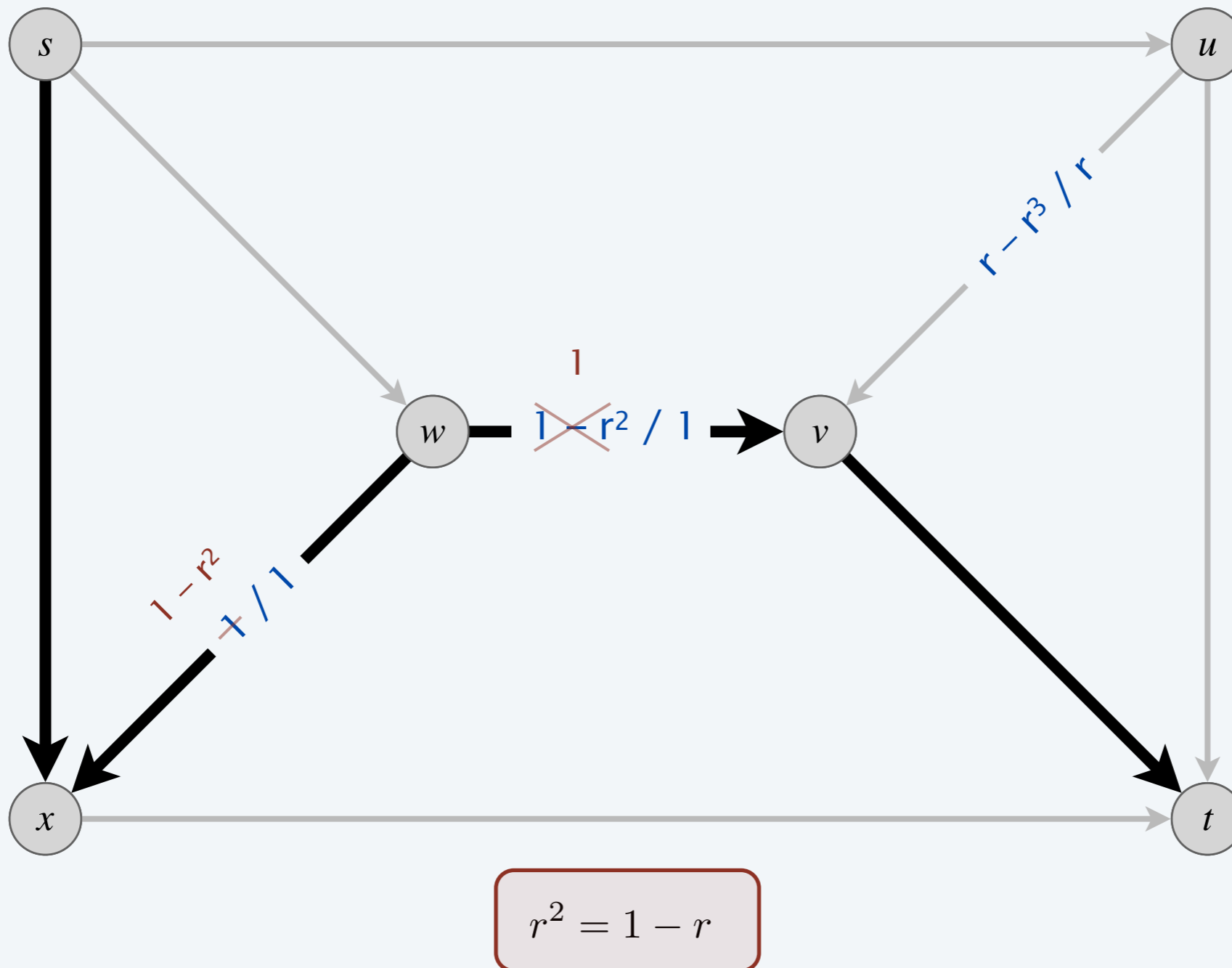
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 5: $s \rightarrow x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^2)



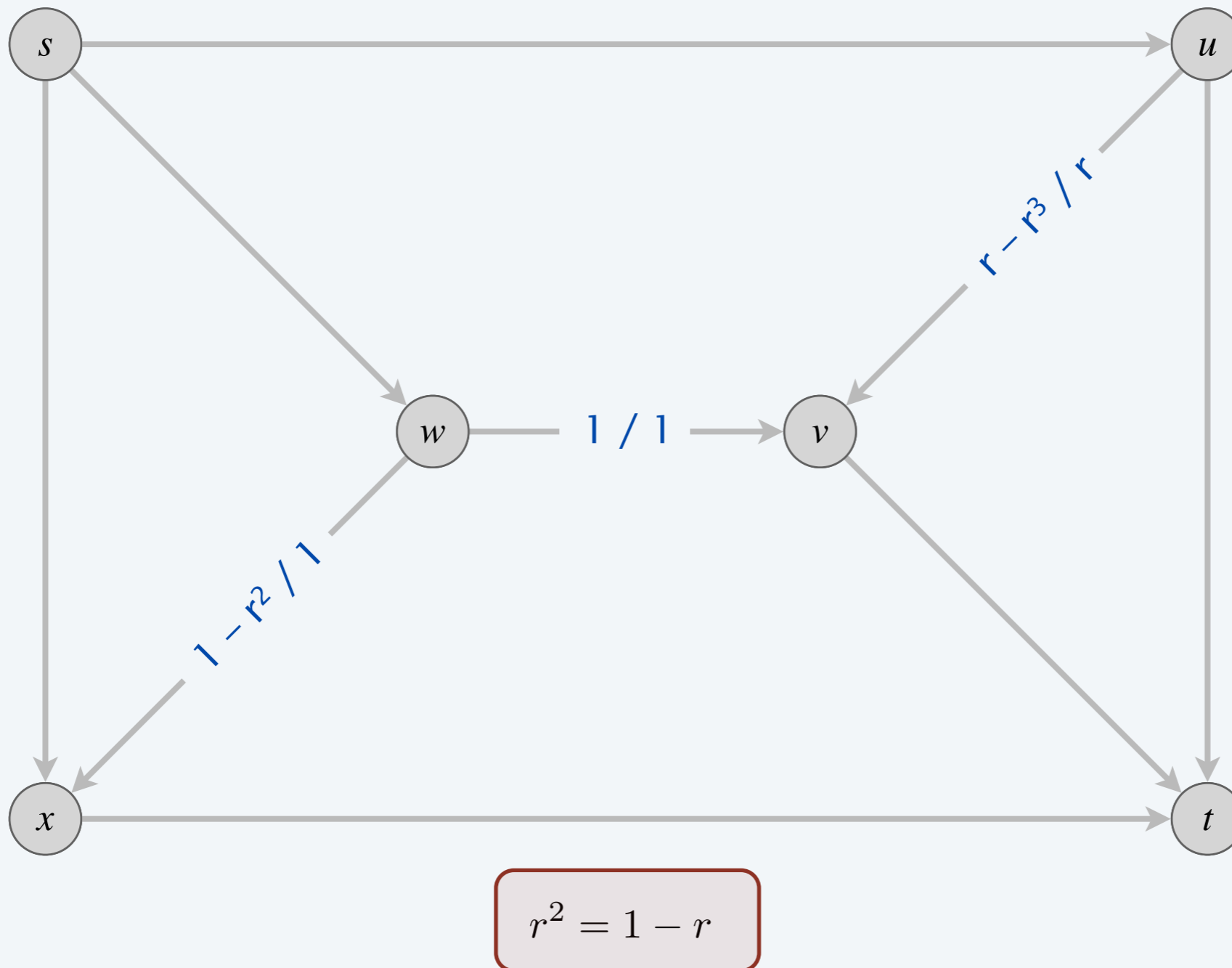
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 5: $s \rightarrow x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^2)



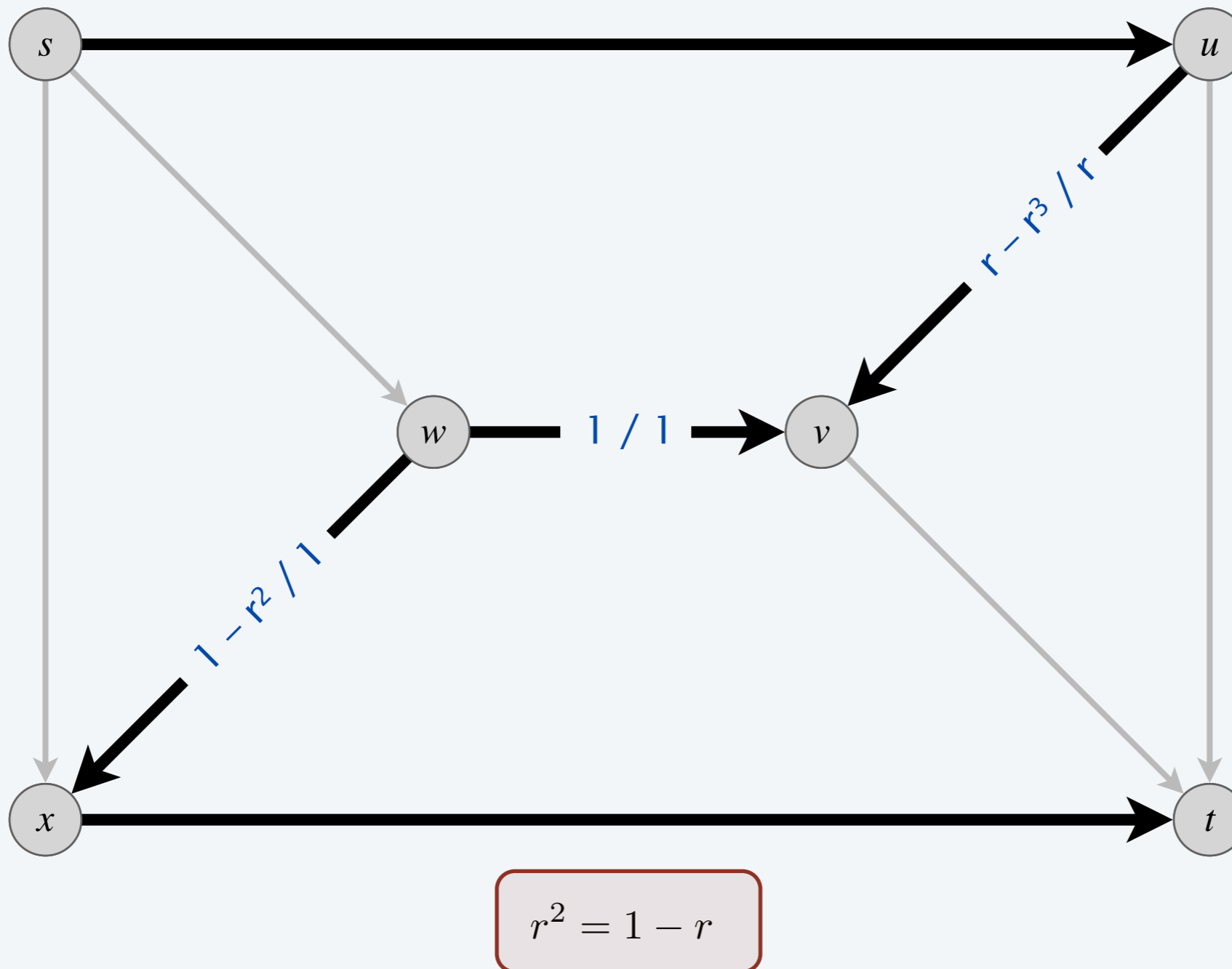
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 6: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^3)



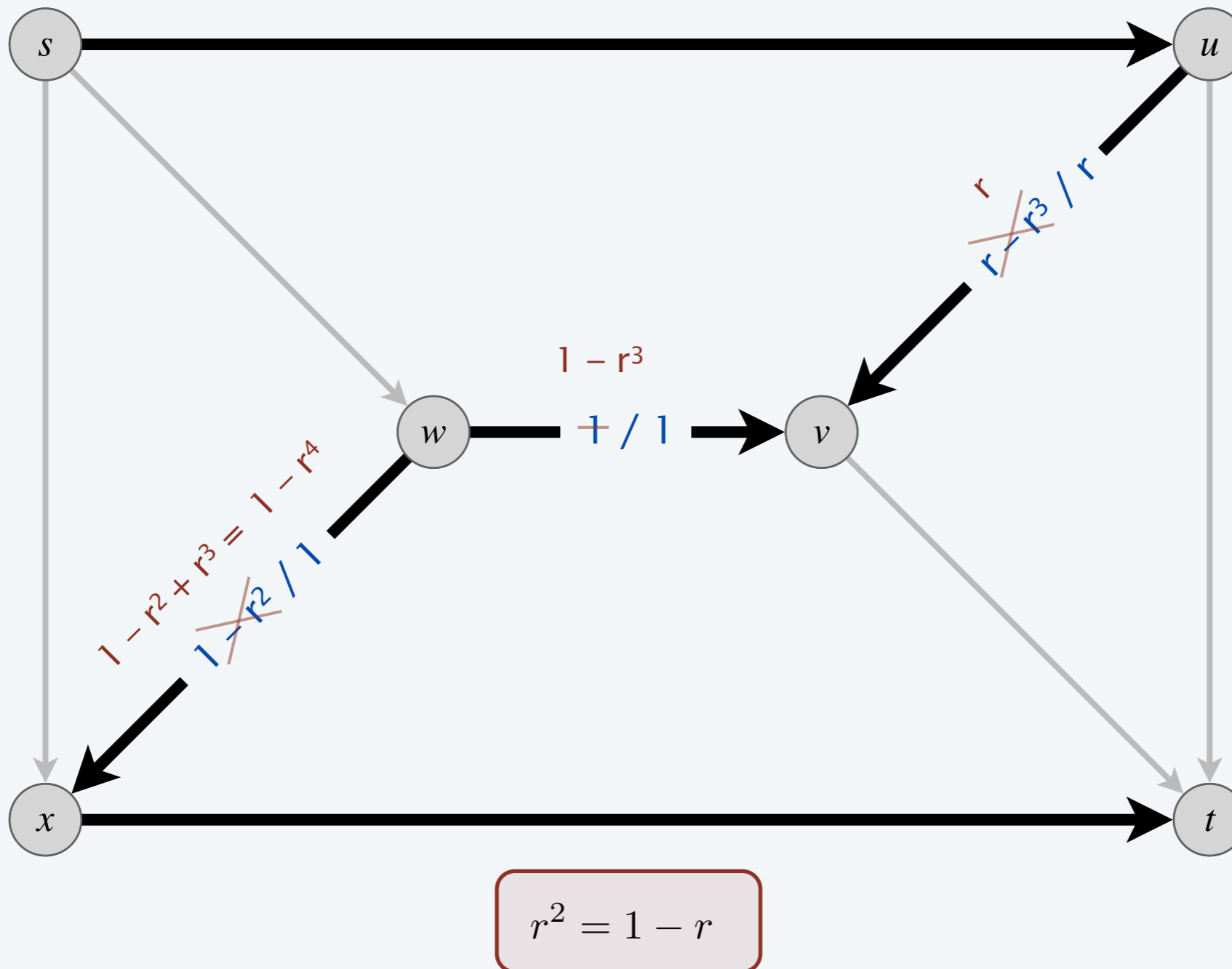
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 6: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^3)



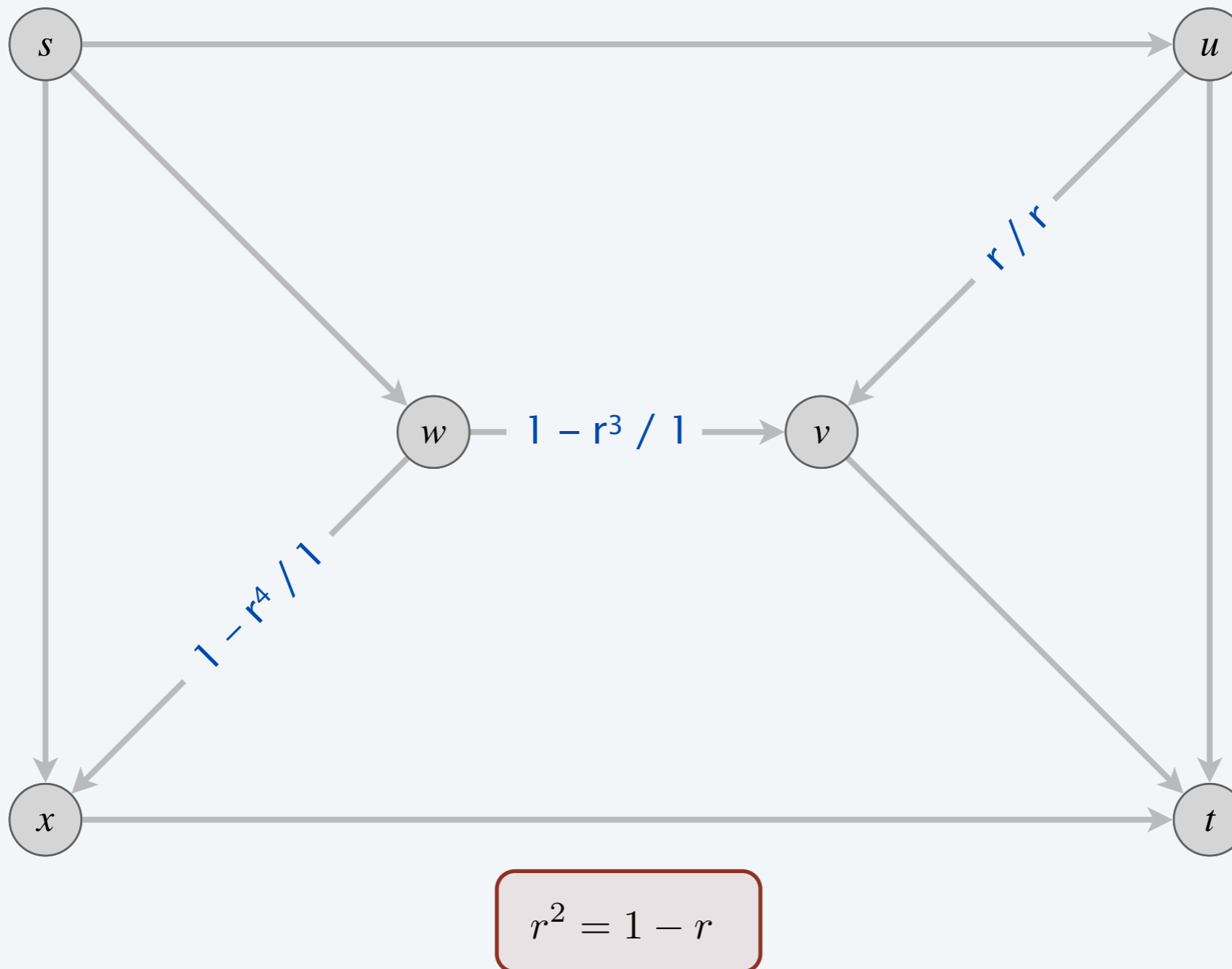
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 6: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^3)



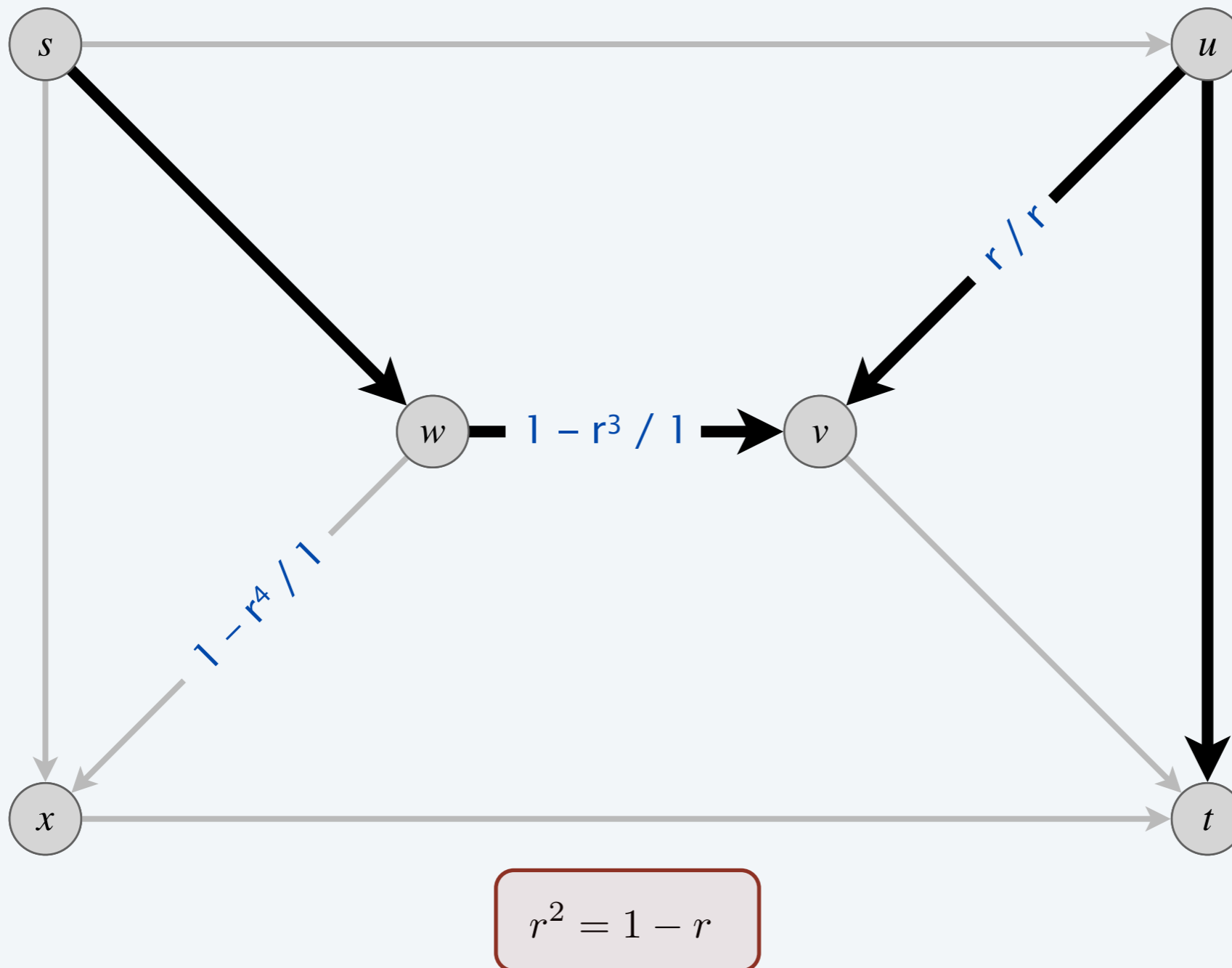
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 7: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^3)



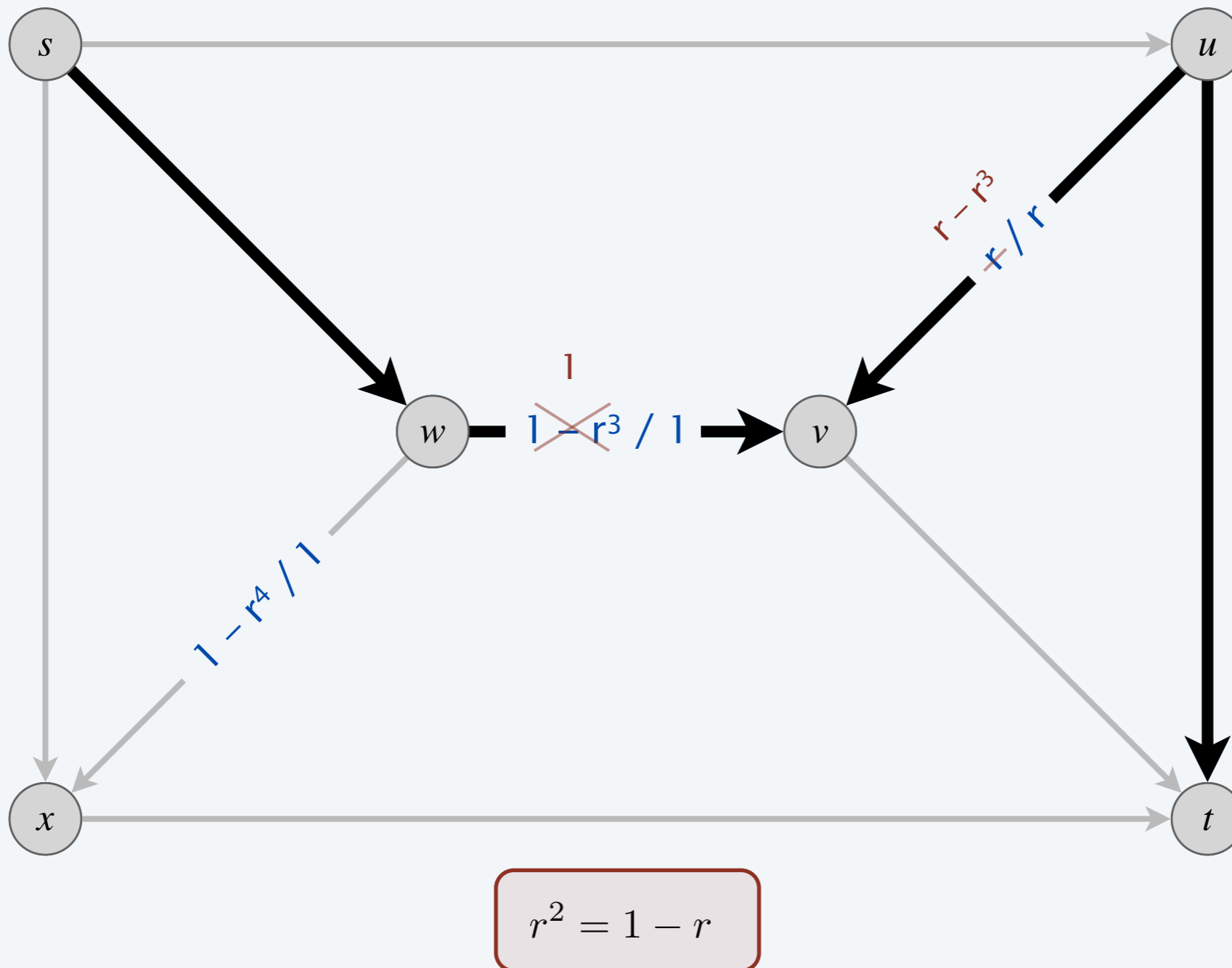
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 7: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^3)



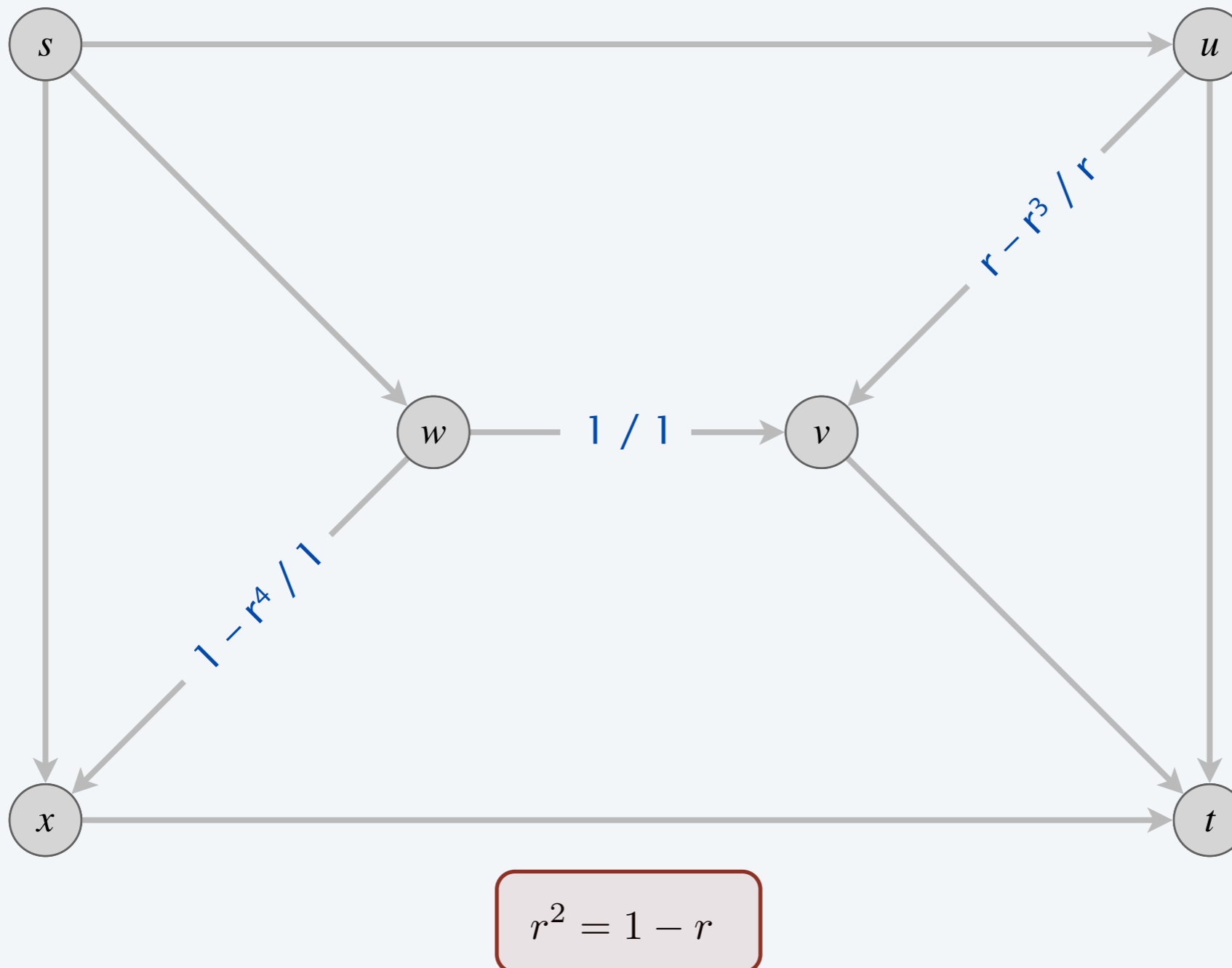
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 7: $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^3)



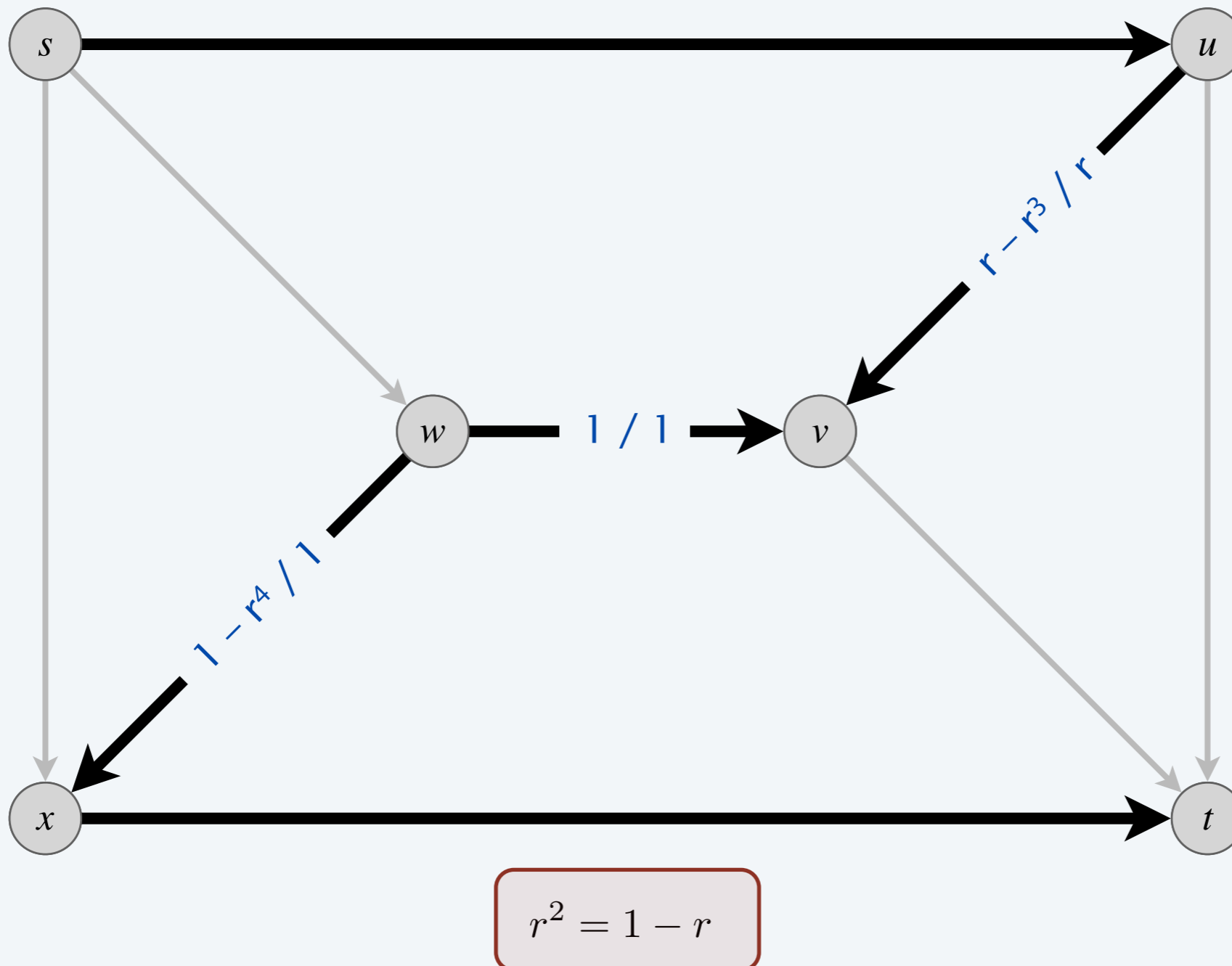
Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante δ : $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^4)



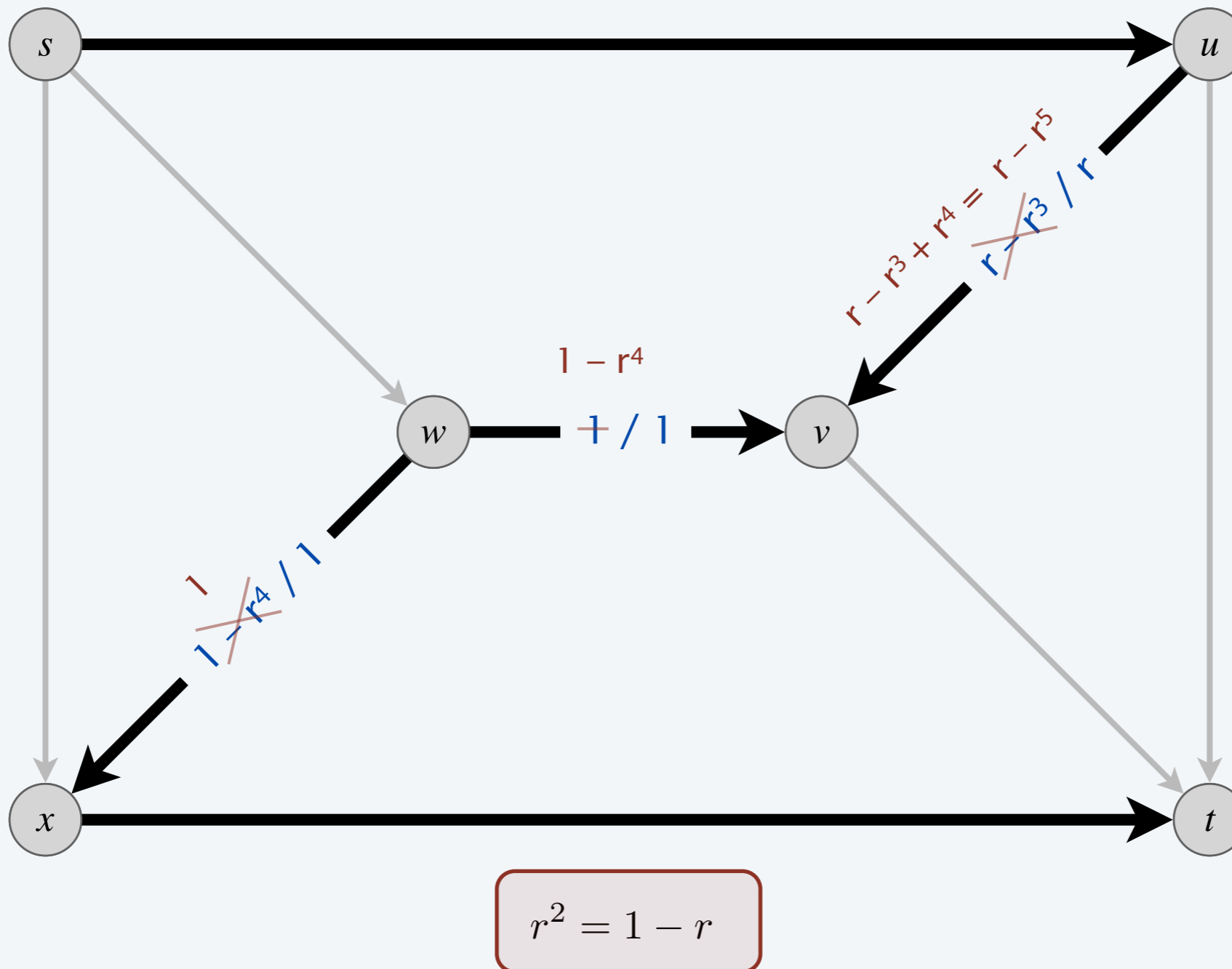
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante δ : $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^4)



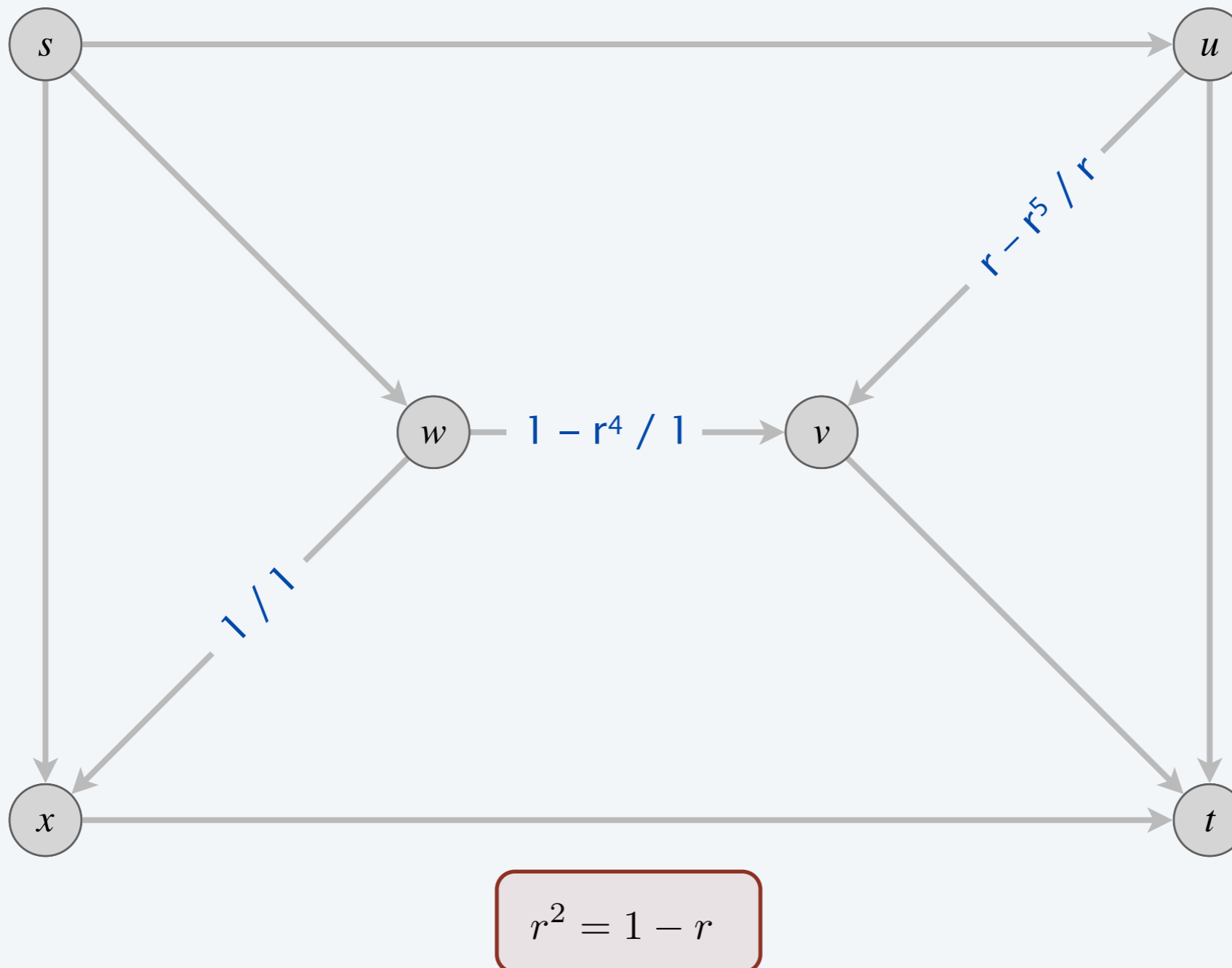
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante δ : $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^4)



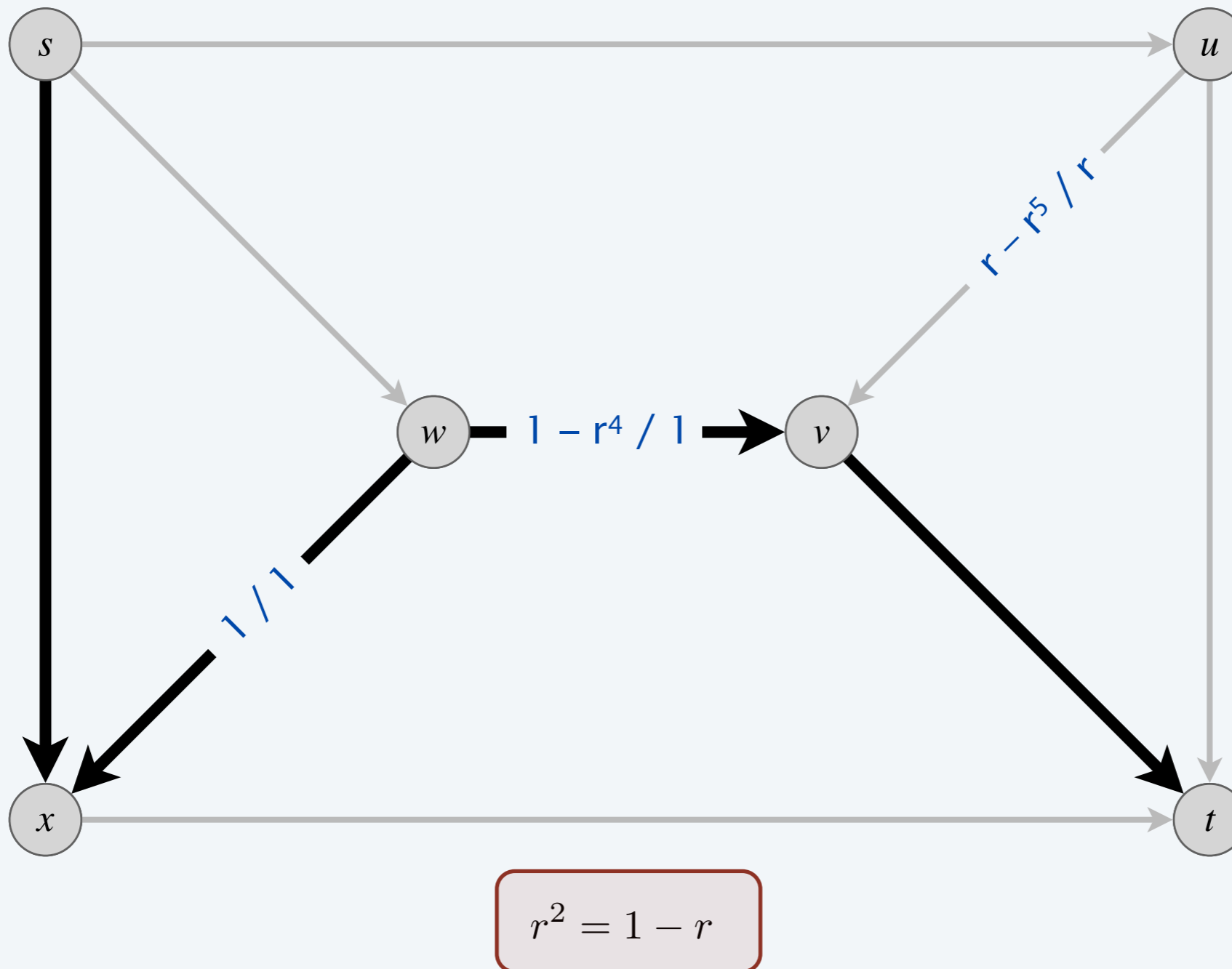
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 9: $s \rightarrow x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^4)



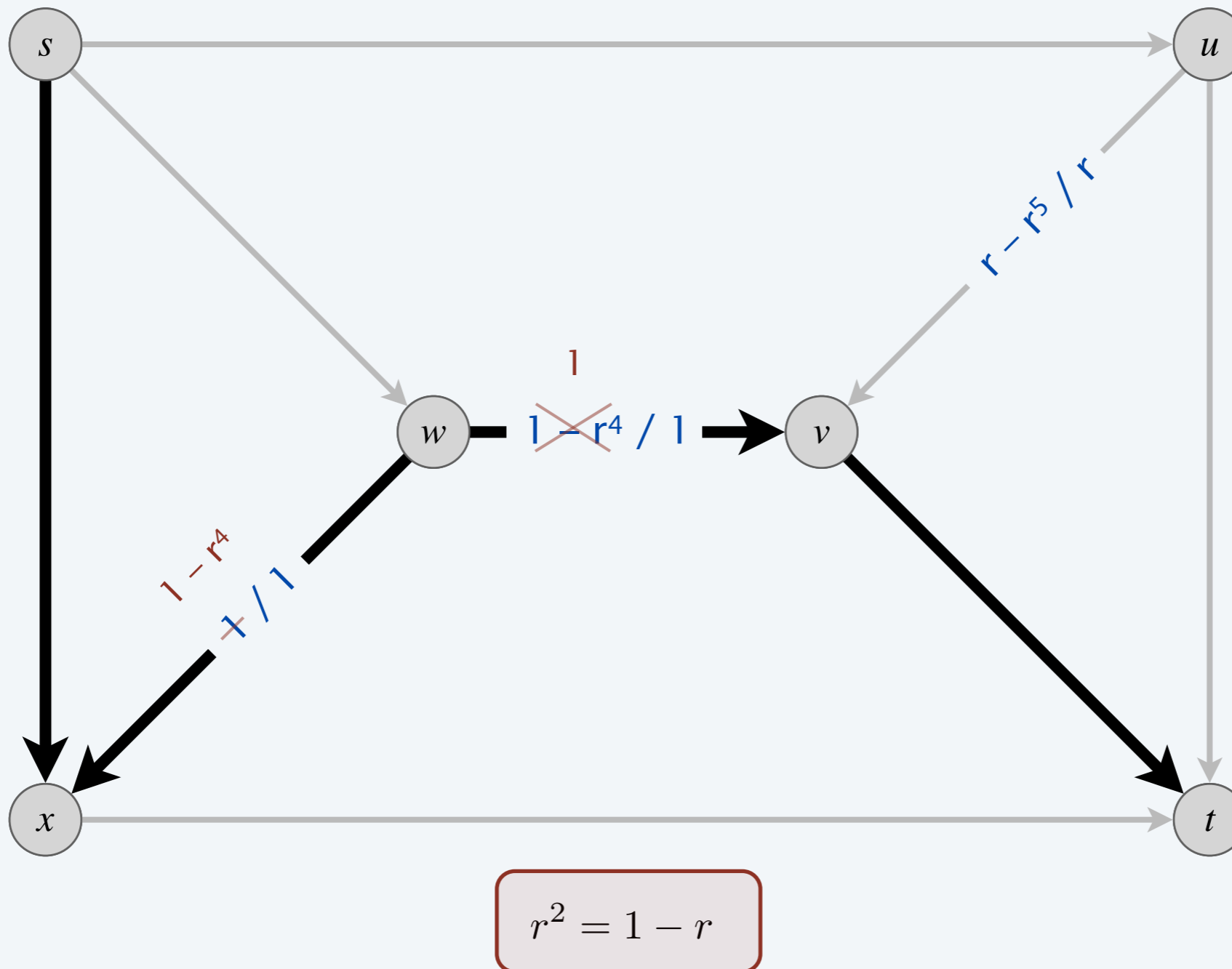
Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 9: $s \rightarrow x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^4)



Algoritmo Ford-Fulkerson: esempio patologico

cammino aumentante 9: $s \rightarrow x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ (capacità di strozzatura = r^4)

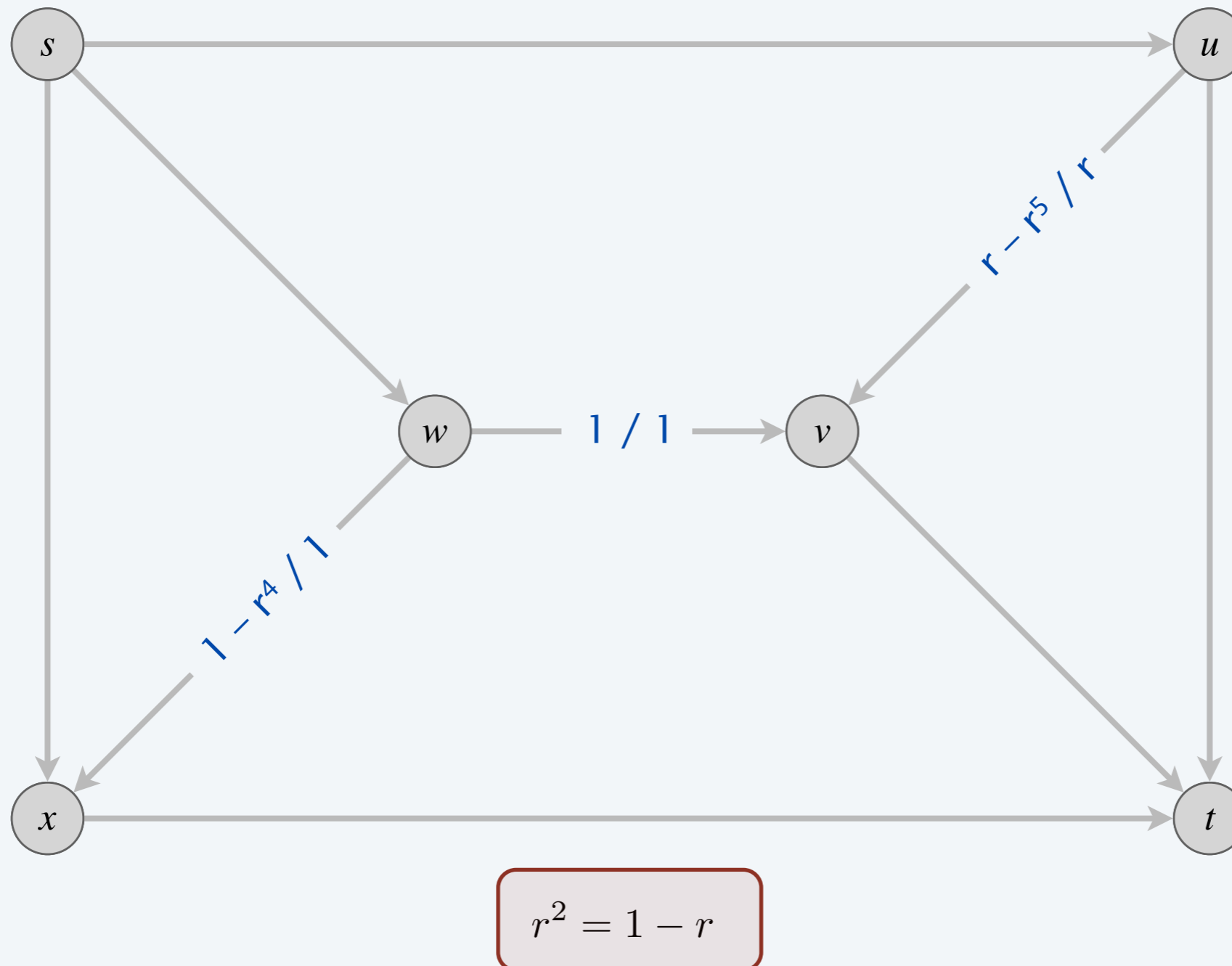


Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

flusso dopo passata 1: $\{ r - r^1, 1, 1 - r^0 \}$ (valore del flusso = 1)

flusso dopo passata 5: $\{ r - r^3, 1, 1 - r^2 \}$ (valore del flusso = $1 + 2r + 2r^2$)

flusso dopo passata 9: $\{ r - r^5, 1, 1 - r^4 \}$ (valore del flusso = $1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + 2r^4$)



Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Pf.

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Pf.

- Dopo $(1 + 4k)$ cammini aumentanti della forma fin qui descritta, il valore del flusso

$$= 1 + 2 \sum_{i=1}^{2k} r^i$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Pf.

- Dopo $(1 + 4k)$ cammini aumentanti della forma fin qui descritta, il valore del flusso

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 \sum_{i=1}^{2k} r^i \\ &\leq 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r^i \end{aligned}$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Pf.

- Dopo $(1 + 4k)$ cammini aumentanti della forma fin qui descritta, il valore del flusso

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 \sum_{i=1}^{2k} r^i \\ &\leq 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r^i \\ &= 1 + \frac{2r}{1-r} \end{aligned}$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Pf.

- Dopo $(1 + 4k)$ cammini aumentanti della forma fin qui descritta, il valore del flusso

$$= 1 + 2 \sum_{i=1}^{2k} r^i$$

$$\leq 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r^i$$

$$= 1 + \frac{2r}{1-r}$$

$$< 5$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Algoritmo Ford–Fulkerson: esempio patologico

Teorema. L'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare; inoltre, può convergere ad un valore diverso da quello del flusso massimo.

Pf.

- Dopo $(1 + 4k)$ cammini aumentanti della forma fin qui descritta, il valore del flusso

$$= 1 + 2 \sum_{i=1}^{2k} r^i$$

$$\leq 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r^i$$

$$= 1 + \frac{2r}{1-r}$$

$$< 5$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

- Il valore del flusso massimo è $= 2C + 1$. ■



Theoretical Computer Science 148 (1995) 165–170

Theoretical
Computer Science

Note

The smallest networks on which the Ford–Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate

Uri Zwick*

Department of Computer Science, Tel Aviv University, Ramat Aviv, 69978 Tel Aviv, Israel

Received November 1993
Communicated by M. Nivat

Abstract

It is widely known that the Ford–Fulkerson procedure for finding the maximum flow in a network need not terminate if some of the capacities of the network are irrational. Ford and Fulkerson gave as an example a network with 10 vertices and 48 edges on which their procedure may fail to halt. We construct much smaller and simpler networks on which the same may happen. Our smallest network has only 6 vertices and 8 edges. We show that it is the smallest example possible.



Theoretical Computer Science 148 (1995) 165–170

Theoretical
Computer Science

Note

The smallest networks on which the Ford–Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate

Uri Zwick*

Department of Computer Science, Tel Aviv University, Ramat Aviv, 69978 Tel Aviv, Israel

Received November 1993
Communicated by M. Nivat

Abstract

It is widely known that the Ford–Fulkerson procedure for finding the maximum flow in a network need not terminate if some of the capacities of the network are irrational. Ford and Fulkerson gave as an example a network with 10 vertices and 48 edges on which their procedure may fail to halt. We construct much smaller and simpler networks on which the same may happen. Our smallest network has only 6 vertices and 8 edges. We show that it is the smallest example possible.
