$\varepsilon < 1/2$ $\quad (1-\varepsilon) > \varepsilon$

Es. (6.8 del libro) Si consideri il codice (binario) $C(5,1)$ con $G = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ ($k \times n$)

Costruire le parole del codice e una tabella di Slepian.

Sol. $u \cdot G$, con tutte le k-ple binarie u: $u=0$, $u=1$ (poiché $k=1$)

$0 \cdot G = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]$, $1 \cdot G = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ $\rightarrow \mathcal{C} = \{00000, 11111\}$

00000
11111
10110

Parole di codice

$2^5 = 32$ $\quad$ 30 $\quad$ 15

2^5

$1 = \binom{5}{0}$ $\quad \binom{5}{5} = 1$

$5 = \binom{5}{1}$ $\quad \binom{5}{4} = 5$

$10 = \binom{5}{2}$ $\quad \binom{5}{3} = 10$

15 $\quad$ 15

Generatori		Sindrome
00000	11111	0000
00001	11110	0001
00010	11101	0010
00100	11011	0100
01000	10111	1000
10000	01111	1111
00011	11100	0011
00101	11010	
01001	10110	
10001	01110	
00110	11001	
01010	10101	
10010	01101	
01100	10011	
10100	01011	
11000	00111	

y

$s(y) = H \cdot y^T$

$(n-k) \times n$
4×5

$y = 00110$

$V^{(n)}$

$\boxed{rk(H) = n-k}$

$H\,(\underbrace{uG}_{y})^T = \vec{0} \quad \forall u$

$\boxed{H G^T = 0_{(n-k)\times k}}$

Decodifica a maggioranza

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big\} 4$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{5}$

Es. Codice di Hamming

$(m=2 \quad C(3,1))$
$(m=3 \quad C(7,4))$

Nel caso binario, un codice di Hamming ha $n = 2^m - 1$ e $k = 2^m - m - 1$, per qualche intero $m \geq 2$. La matrice di controllo H è composta da <u>tutti</u> i possibili vettori binari non-nulli di lunghezza m.

$d_{min} = 3$

Correggo 1 errore

$n-k = m$

Per esempio, con $m=3$ $(n=7, k=4)$, una possibile matrice di controllo di Hamming è:

$$m = n-k \ (=3) \left\{ H = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right. \qquad -A^T \quad I_3 = I_m$$

$$\underbrace{3 \ 5 \ 6 \ 7 \ 4 \ 2 \ 1}_{n\ (7)}$$

$$H = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \vec{h}_3 & & & & \vec{h}_7 \end{array} \end{array}$$

$$[I_k \ A] = G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \qquad I_k \quad A$$

$k \times n$

4×7

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricevo y

$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$
$\quad\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ 0 \dots 0$

7

$e_1, e_2, \dots, e_n$

$s(y) = H \cdot y^T = H \cdot e^T = s(e)$

$= \sum_{e_i \neq 0} e_i \cdot \vec{h}_i$ (comb. lineare delle colonne di H)

Se e contiene 1 solo errore,

$$\boxed{s(y) = s(e) = e_i \cdot \vec{h}_i} \quad \text{per qualche } i$$

Errore in posiz. 2: $1 \cdot \vec{h}_2$

" " " 3: $1 \cdot \vec{h}_3$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\ \text{Esempio:} & (x & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \quad \text{trasmessa}) \end{array}$$

$$y = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \quad \text{ricevuto}$$

$$y - x = e = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \quad \text{configurazione di errore}$$

$$H y^T = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}}_{\substack{H \\ 3 \times 7}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{y^T \\ 7 \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{sindrome}} \Big\} 3 \times 1$$

$$s(y) = s(e)$$

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$$

$$\to \hat{x} = y - (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$$

$$\hat{x} = y - (\underbrace{0\ 0\ 0\ \overset{i}{e_i}\ 0\ 0\ 0}_{e_i \text{ in posizione i-esima}})$$

$$\underset{\vec{h}_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \longleftrightarrow \underset{2 \cdot \vec{h}_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Decodifica per un codice di Hamming:

1. Ricavi y dal canale e calcola la sindrome $s(y)$
2. Se $s(y) = \vec{0} \Rightarrow \hat{x} = y$
3. Se $s(y) = e_i \cdot \vec{h}_i$, correggi la i-esima posizione con ampiezza e_i