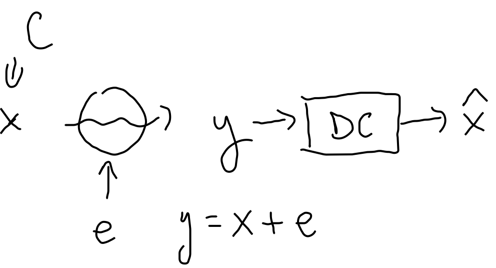
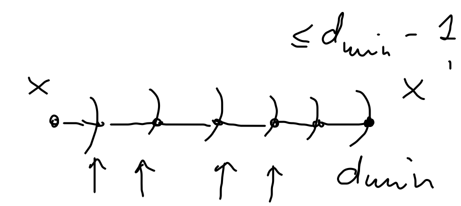
$$H \cdot y^T \triangleq s(y) = s(x+e) = H(x+e)^T = \overbrace{H x^T}^{\vec{0}} + H e^T = H e^T = s(e)$$

→ la sindrome di y coincide con la sindrome della configurazione di errore e.



Per rilevare errore:

1. Ricevi y e calcola $s(y)$
2. Se $s(y) = \vec{0}$, poni $\hat{x} = y$
3. Se $s(y) \neq \vec{0}$, riporta errore di trasmissione.



Come correggere errori? Formiamo la seguente tabelle (tabella di Slepian):

$\underbrace{x}_{1\times n}$

k q-ario → Tutte le q^k parole del codice →

q^n

Generatori dei laterali

righe è q^{n-k}

$\leftarrow q^k \rightarrow$						Sindromi
$\vec{0}$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{q^k-1}	$s_0 = \vec{0} = s(\vec{0})$
e_1	x_1+e_1	x_2+e_1	$\underbrace{x_3+e_1}_{y}$	$\dots$	$x_{q^k-1}+e_1$	$s_1 = s(e_1)$
e_2	x_1+e_2	x_2+e_2	x_3+e_2	$\dots$	$x_{q^k-1}+e_2$	$s_2 = s(e_2)$
		$\vdots$				

$$\underbrace{H}_{(n-k)\times n}\ \underbrace{x^T}_{n\times 1} = \underbrace{s(x)}_{(n-k)\times 1}$$

C'è un gruppo rispetto alla somma di sequenze

Due elementi e ed y sono sulla stessa riga $\Longleftrightarrow$

e ed y sono nello stesso laterale del gruppo C $\Longleftrightarrow$

$\longrightarrow \quad y - e \in C \Longleftrightarrow s(y-e) = \vec{0} \Longleftrightarrow s(y) = s(e)$

$$H(y-e)^T = \underbrace{Hy^T} - \underbrace{He^T} = \vec{0}$$

Ricostruiamo $\hat{x}$ cercando la parola di codice che sta nella stessa colonna della y ricevuta. La decodifica dipende dalla scelta dei generatori dei laterali.

È opportuno scegliere n-ple d'errore con peso basso come generatori.

Esempio (6.7). $n = 4,\ k = 2$ $\quad n-k$

$q^k = 2^2 = 4$ $\quad q^n = 2^4$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (HG^T = 0)$$

Tabella di Slepian

					Sindromi
	0000	0110	1011	1101	00
$e_1 =$	1111	1001	0100	0010	11
$e_2 =$	1000	1110	0011	0101	10
$e_3 =$	0111	0001	1100	1010	01

$$H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La decodifica avviene in modo corretto <u>sse</u> la n-pla di errore che si verifica sul canale è uno dei generatori dei laterali.

Per esempio, se $x = 0110$ e $y = 0111$, allora la config. di errore è $e = y - x = 0001$

Usando la tabella, $\hat{x} = 0000$, che è errata.

Tabella alternativa per lo stesso codice

q^n

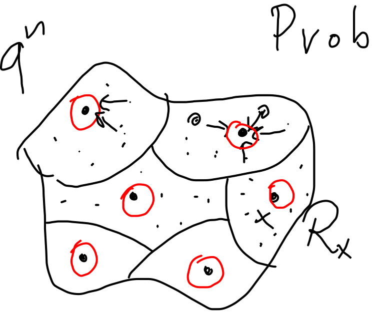
~~0000~~
0001
~~0010~~
0011
0100
⋮

		x			
	0000	0110	1011	1101	00
$e_1 =$	0100	0010	1111	1001	11
$e_2 =$	1000	1110	0011	0101	10
$e_3 =$	0001	0111	1010	1100	01
		y			

Procedura di decodifice con sindrome (correzione d'errore)

1. Ricevi y dal canale e calcola la sindrome $s(y) = H \cdot y^T$
2. Se $s(y) = \vec{0}$ restituisci $\hat{x} = y$
3. Se $s(y) \neq \vec{0}$, determina dalla tabelle il generatore del laterale $(\hat{e})$ e restituisci $\hat{x} = y - \hat{e}$

$(w = \text{peso di } e)$



Probabilità di avere corretta decodifica (canale BSC(ε)) : $p_{corr} = \sum_{e : e \text{ è un generatore}} \underbrace{\varepsilon^w (1-\varepsilon)^{n-w}}$

Prob. di avere una specifica configurazione di errore di peso ε

$\varepsilon^{w_1}(1-\varepsilon)^{n-w_1} + \varepsilon^{w_2}(1-\varepsilon)^{n-w_2} + \dots$

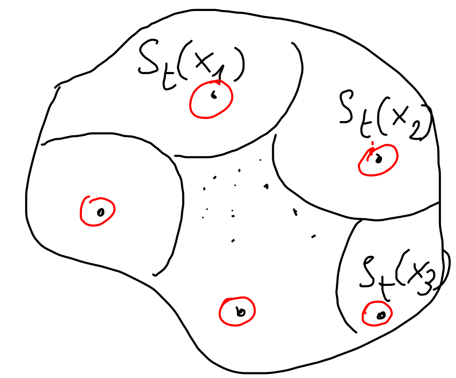
$w_1 = \text{peso di } e_1$ $\quad w_2 = \text{peso di } e_2$

\# di generatori (dei laterali) con peso w

$$\Rightarrow p_{corr} = \sum_{w=0}^{n} n_w \, \varepsilon^w (1-\varepsilon)^{n-w}$$

Le colonne delle tabella corrispondono alle regioni di decodifice

Def. Codice (lineare) è perfetto se le sfere di Hamming di raggio $t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$ centrate sulle parole del codice partizionano $V^{(n)}$.

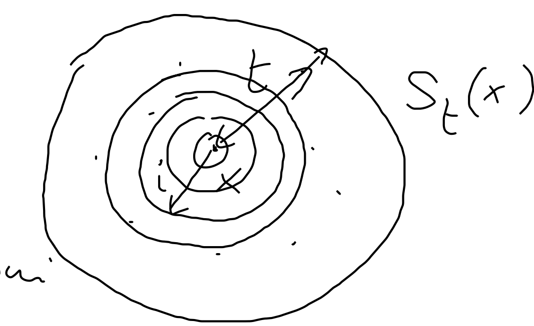


In questo caso, dobbiamo avere:

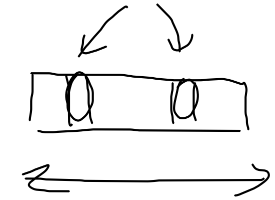
$$\underbrace{vol(V^{(n)})}_{\#\text{ di n-ple}} = \underbrace{(\#\text{ di sfere})}_{\#\text{ di parole di codice}} \times \underbrace{vol(S_t)}_{\#\text{ di n-ple contenute nelle sfere}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{q^n}_{2^5=32} = \underbrace{q^k}_{2} \times \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i \right)}_{16}$$



Esempio. $G = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$



$n = 5$ Codice $C(5,1)$ a ripetizione

$k = 1$

$q = 2$

$q-1 = 1$ $C = \{00000, 11111\}$

è un codice perfetto.

$q^n = 2^5 = 32$

$q^k = 2^1 = 2$

$t = 2$

q-ario

$q-1$

$$vol(S_t) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 1 + 5 + 10 = 16$$