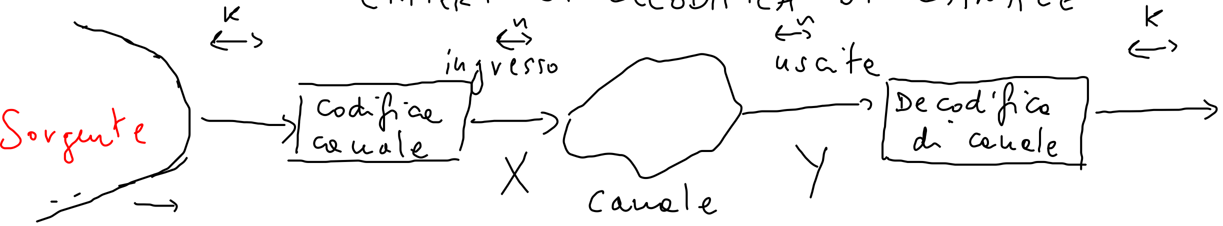
CRITERI DI DECODIFICA DI CANALE



$X \in \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}$ parole di codice (ingresso del canale)

(spesso $M = q^k$ dove q è la cardinalità dell'alfabeto della sorgente)

$Y \in \mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{q^n}\}$ n-ple di q-it possibili (uscita del canale)

Tasso: $R = \dfrac{\log_q M}{n}$ (se $M = q^k$, $R = \dfrac{k}{n}$: k = lunghezza del messaggio, n = lunghezza di una parola di codice)

Funzione di decodifica

$\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$

Tutte le $y \in \mathcal{Y}$ con $\psi(y) = x$ sono nella classe di equivalenza (stessa regione di decodifica)

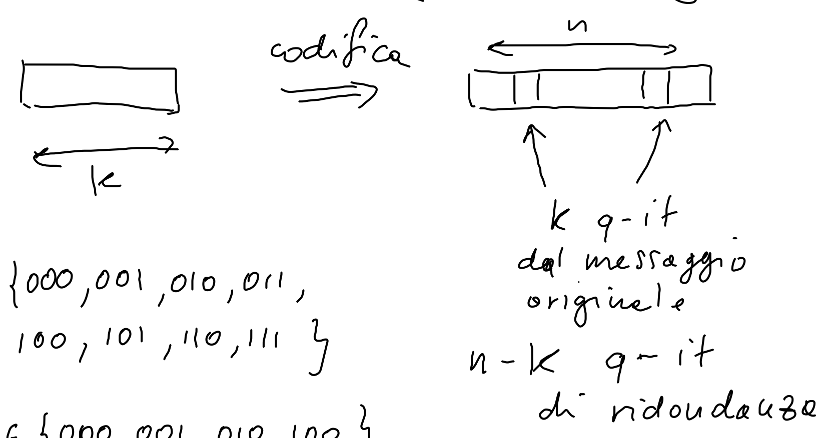
Esempio

Codice a ripetizione di lunghezza 3

$\mathcal{X} = \{\underset{\uparrow 0}{000}, \underset{\uparrow 1}{111}\}$

$M = 2 = 2^{1}$ $\quad 2 = |\{0,1\}| = |A|$

$k = 1 \quad n = 3 \quad (\Rightarrow R = 1/3)$

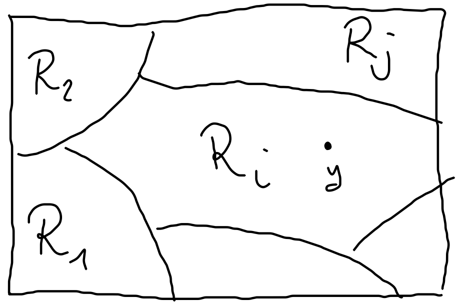


$\mathcal{Y} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Se $y \in \{000, 001, 010, 100\}$ $\longrightarrow$ decodifico 0 $\quad \to 000 = \psi(y)$

Se $y \in \{110, 101, 011, 111\}$ $\longrightarrow$ decodifico 1 $\quad \to 111 = \psi(y)$

Tutte le possibili n-ple di q-it ($\mathcal{Y}$)



$\rightarrow \psi(y) = x_i$

R_1	R_2
000	110
001	101
010	011
100	111
0	1

$\hat{X} = 000 \qquad \hat{X} = 111$

$\mathcal{C} = \{000, 111\}$

$\mathcal{Y}$ è partizionato in M regioni: $R_1, R_2, \dots, R_M$

$\bar{R}_i \triangleq \mathcal{Y} \setminus R_i$

Se trasmetto x_i ma ricevo $y \notin R_i$ ($y \in \bar{R}_i$), commetto errore.

Probabilità di errore per l'ingresso x_i: $P_{err}(x_i) = \sum_{y \in \bar{R}_i} p(y|x_i)$

Probabilità di errore complessiva (media): $P_{err} = \sum_{i=1}^{M} p(x_i)\, P_{err}(x_i)$

$$= \sum_{i=1}^{M} \underbrace{p(x_i)}_{\text{ingresso}} \sum_{y \in \overset{\text{decodifica}}{\bar{R}_i}} \underbrace{p(y|x_i)}_{\text{canale}}$$

Per minimizzare P_{err}, dobbiamo scegliere opportunamente le regioni R_i

Criterio dell'osservatore ideale

X : parole di codice spedita sul canale

Y : n-pla ricevuta in uscita del canale

$\hat{X}$: stima delle parole di codice ($\hat{X} = \psi(Y)$)

$P_{err}(y)$ (probabilità di errore quando l'uscita è y)

$$P_{err}(y) = \Pr[\hat{X} \neq X \mid y] = 1 - \Pr[\hat{X} = X \mid y]$$

Mediando sulle uscite :

$$P_{err} = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y)\, P_{err}(y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y) \left[1 - \Pr[\hat{X} = X \mid y] \right]$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y) \Pr[\hat{X} = X \mid y]}$$

Per minimizzare perr, devo massimizzare questa quantità

Voglio

$$\boxed{p(\hat{x} \mid y) = \max_{x_i} p(x_i \mid y)} \rightarrow \hat{x} = \arg\max_{x_i} p(x_i \mid y)$$

$$\left(f(x^*) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow x^* = \arg\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \right)$$

Criterio : se per ogni $i \neq j$ risulta $\boxed{p(x_i \mid y) \geq p(x_j \mid y)}$

allora poni $\hat{x} = \psi(y) = x_i$ quando ricevi y $(\Rightarrow y \in R_i)$

$$p(x_i | y) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\overbrace{p(x_i) \cdot p(y|x_i)}^{p(x_i, y)}}{p(y)}$$

$$\left(p(x_i, y) = p(y) \cdot p(x_i | y) = p(x_i)\, p(y | x_i) \right)$$

dipende da P_X (distribuzione sugli ingressi) dipende dalla sorgente / dalla codifica di sorgente

dipende solamente dal canale

Criterio di massima verosimiglianza

In genere conosciamo $p(y|x_j)$ (canale) ma non $p(x_j|y)$ (sorgente + canale)

Un buon codificatore di sorgente rende la d.p. di ingresso uniforme (o quasi uniforme).

Se la P_X è uniforme ($p(x) = \text{costante}$), allora

sono uguali

$$p(x_i|y) \geq p(x_j|y) \overset{\text{Bayes}}{\Longleftrightarrow} \frac{p(x_i)\, p(y|x_i)}{\cancel{p(y)}} \geq \frac{p(x_j)\, p(y|x_j)}{\cancel{p(y)}} \Longleftrightarrow p(y|x_i) \geq p(y|x_j)$$

Dipende solo dal canale

Criterio : Se per ogni $i \neq j$ risulta $\boxed{p(y|x_i) \geq p(y|x_j)}$

allora poni $\hat{x} = \psi(y) = x_i$ quando ricevi y $\quad (\rightarrow y \in R_i)$

Più la d.p. dell'ingresso si discosta dall'essere uniforme

più il criterio si discosta dall'ottimalità.

Teorema della codifica di canale

→ Relazione tra tasso di un codice, capacità di un canale e la probabilità di errore

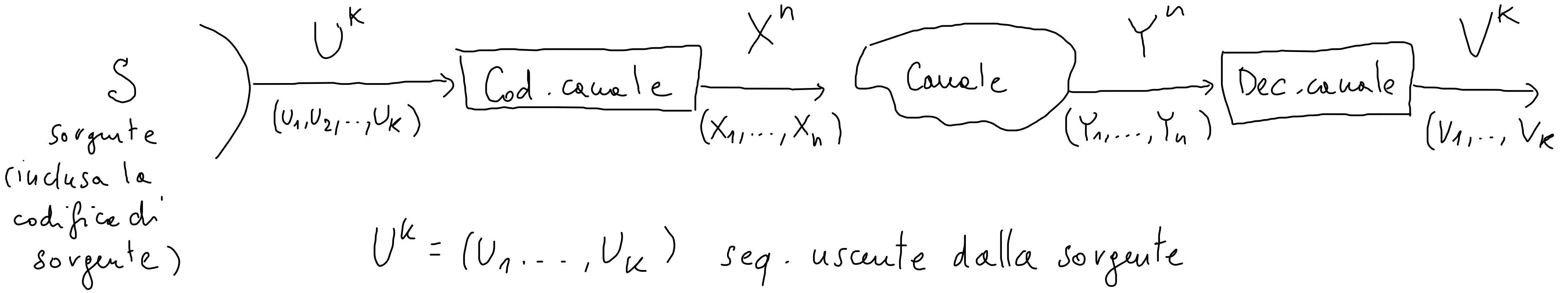
Parte diretta (risultato positivo)

⊕ esistono codici di canale con prob. d'errore infinitesima ($\rightarrow 0$) se il tasso è minore della <u>capacità</u>

→ Parte inversa (risultato negativo)

⊕ non esistono codici di canale con prob. d'errore infinitesima se il tasso è maggiore della <u>capacità</u>

(anzi: in quel caso la prob. d'errore di qualunque codice tende a 1)



$U^k = (U_1, \dots, U_K)$ seq. uscente dalla sorgente

$X^n = (X_1, \dots X_n)$ ingresso del canale

$Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ uscita del canale

$V^k = (V_1, \dots, V_K) = \hat{U}^k$ stima di U^k

Codice di canale : $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_M\}$ (dizionario)

Regola di decodifica : $y \overset{\Psi}{\longmapsto} R_i$

Lemma (4.1) : In ogni canale stazionario e senza memoria di capacità C si ha : $I(X^n; Y^n) \le nC$.

Lemma (4.1): In ogni canale stazionario e senza memoria di capacità C si ha: $I(X^n; Y^n) \leq nC$.

Dim. Ricordiamo che stazionarietà e assenza di memoria implica

$$p(\vec{y} \mid \vec{x}) = \prod_{r=1}^{n} p(y_{i_r} \mid x_{j_r})$$

Quindi (per un risultato già visto) $I(X^n; Y^n) \leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y_i)$

Quindi $I(X^n; Y^n) \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\max_{P_X} I(X; Y_i)}_{= C \text{ (capacità)}} = \sum_{i=1}^{n} C = nC$. QED.

L'entropia media per simbolo di sorgente è:

$$\frac{H(U^K)}{K}$$; se $U_1, U_2, \dots, U_K$ sono indipendenti e identicamente distribuiti (sorgente stazionaria e senza memoria)

allora $H(U^K) = k \cdot H(U_i) \quad \forall i$

→ in questo caso l'entropia media per simbolo di sorgente è $H(U_1)$ $(= H(U))$.