TEOREMA DELLA CODIFICA DI SORGENTE PER CODICI B-LV

Una codifica ottima per una sorgente (s.s.m.) $\mathcal{S}$ con blocchi di lunghezza $n=1$ soddisfa

$$H_D(\mathcal{S}) \leq \overbrace{E[L]}^{= R \text{ (tasso)}} < H_D(\mathcal{S}) + 1 \qquad (D = |\mathcal{B}|)$$

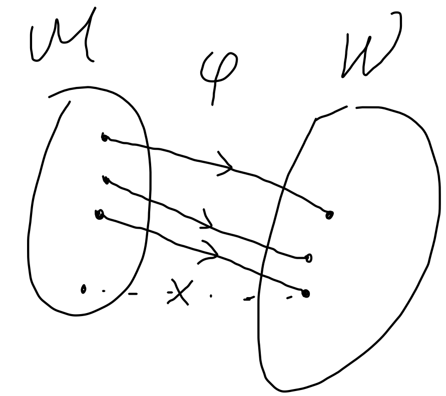
Con blocchi di lunghezza $n \geq 1$, abbiamo

$$H_D(\mathcal{S}) \leq \underbrace{\frac{E[L^{(n)}]}{n}}_{= R_n \text{ (tasso)}} < H_D(\mathcal{S}) + \frac{1}{n}$$

Quindi:

- il tasso di qualunque codifica è $\geq$ all'entropia della sorgente
- esiste una successione di codifiche (indicizzata da n) il cui tasso tende all'entropia

Codici B-B



Se $\mathcal{A}=\{a_1,\dots,a_K\}$, $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_D\}$

e usiamo blocchi sorgente lunghi n ($\in\mathbb{N}$)

blocchi secondari lunghi ℓ ($\in\mathbb{N}$)

per avere u.d. # possibili parole di codice $\geq$ # possibili messaggi

$$D^\ell \geq K^n \iff \ell \geq n\log_D K$$

Il minimo intero ℓ che soddisfa $\ell \geq n\log_D K$ è $\lceil n\log_D K\rceil$

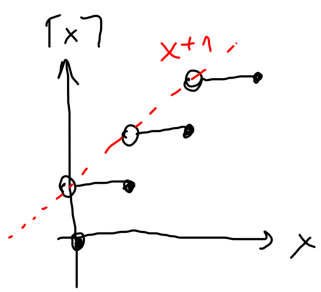
Il tasso è $R_n = \dfrac{\ell}{n} = \dfrac{\lceil n\log_D K\rceil}{n}$

$H_D(\vec{p}) = \log_D K$

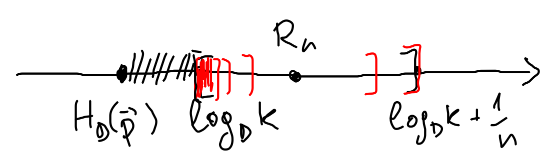
$$H_D(\vec{p}) \leq \log_D K \leq R_n \leq \frac{(n\log_D K)+1}{n} = \log_D K + \frac{1}{n}$$

R_n non potrà mai raggiungere l'entropia (a meno che $\vec{p}$ non sia uniforme)

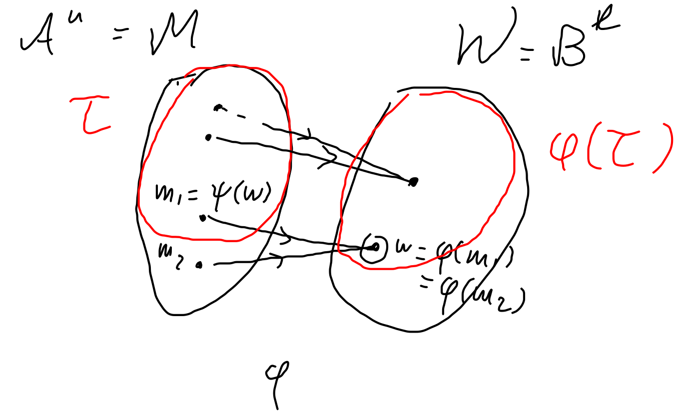
$\lceil x\rceil < x+1$



$$H_D(\vec{p}) = -\sum_{i=1}^{K} p_i\log_D p_i \leq \log_D K$$



→ i codici B-B univocamente decodificabili non sono in grado di comprimere



Supponiamo di rinunciare alla condizione <u>u.d.</u>

→ introduce errori di decodifica

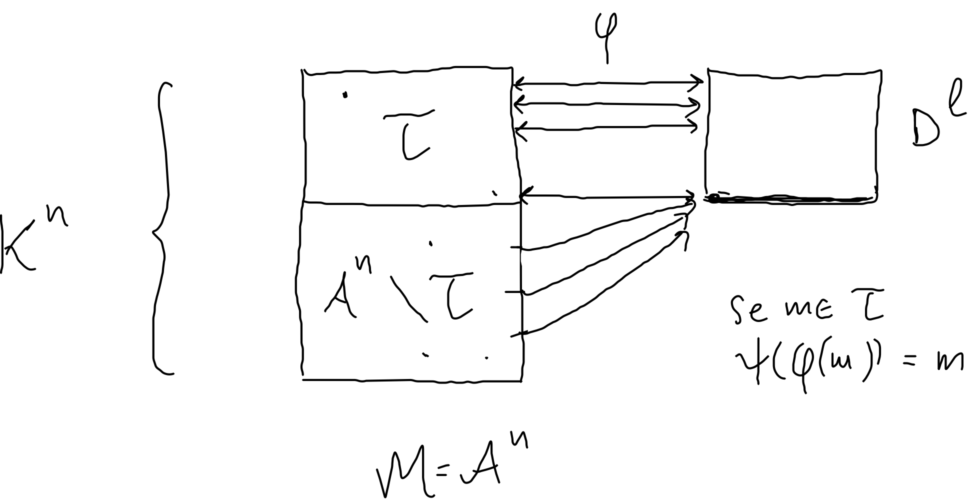
Codifica $\varphi : \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}^\ell$, decodifica : $\psi : \mathcal{B}^\ell \to \mathcal{A}^n$

Probabilità di errore : $P_{err} \triangleq \Pr_{\vec{X}}[\psi(\varphi(\vec{X})) \neq \vec{X}]$

Messaggi decodificati correttamente $\tau = \{\vec{x} \in \mathcal{A}^n : \psi(\varphi(\vec{x})) = \vec{x}\}$

Tutte le n-ple di τ hanno parole di codice associate che sono distinte tra loro, $|\tau| \leq D^\ell$

$\log_D |\tau| \leq \ell$



se $m \in \tau$
$\psi(\varphi(m)) = m$

$P_{err}^{(n)} = 1 - \Pr[\vec{X} \in \tau]$

Tasso : $R_n = \dfrac{\lceil \log_D |\tau| \rceil}{n}$

Se $m \notin \tau$,
errore di decodifica

$\boxed{\text{Vogliamo } \tau \text{ piccolo ma ad alta probabilità}}$

Scegliamo $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(n,\delta)} = \left\{ \vec{x} : \left| \frac{1}{n} I(\vec{x}) - H_D(\vec{p}) \right| \leq \delta \right\}$

Abbiamo visto che $\Pr[\vec{X} \in \mathcal{T}^{(n,\delta)}] \geq 1 - \varepsilon$ $\qquad \varepsilon = \varepsilon(n,\delta) \xrightarrow{\text{per } n \to \infty} 0$

e $(1-\varepsilon)\, 2^{n[H(\vec{p}) - \delta]} \leq |\mathcal{T}^{(n,\delta)}| \leq 2^{n[H(\vec{p}) + \delta]}$

codifica D-aria

$\rightarrow (1-\varepsilon)\, D^{n[H_D(\vec{p}) - \delta]} \leq |\mathcal{T}^{(n,\delta)}| \leq D^{n[H_D(\vec{p}) + \delta]}$

$D^{H_D(\vec{p})} = (2^{\log D})^{H_D(\vec{p})} = 2^{H(\vec{p})}$

perché $\log_D x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 D}$

Se prendiamo $\ell : D^{\ell} \geq D^{n[H_D(\vec{p}) + \delta]} \geq |\mathcal{T}^{(n,\delta)}|$

ottieniamo probabilità di errore $\leq \varepsilon$

e il tasso è $R_n = \dfrac{\ell}{n} = H_D(\vec{p}) + \delta$

parole di codice

Se invece volessimo : $R_n \leq H_D(\vec{p}) - 2\delta \;\rightarrow\; \dfrac{\ell}{n} \leq H_D(\vec{p}) - 2\delta \;\rightarrow\; |W| \leq D^{\ell} \leq D^{n[H_D(p) - 2\delta]}$

$H_D(\vec{p}) - 2\delta$

$H_D(p)$

Allora $\Pr\left[\begin{matrix} X \in \mathcal{T}^{(n,\delta)} \text{ e} \\ X \text{ corrett. decodif.} \end{matrix}\right] \leq$ (prob. max di 1 messaggio in $\mathcal{T}$) $\times$ (# messaggi univocamente decodificati)

$= D^{-n[H_D(\vec{p}) - \delta]} \cdot D^{n[H_D(\vec{p}) - 2\delta]} = D^{-n\delta}$

$$1 - P_{err} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{messaggio} \\ \text{in } \mathcal{T}}}{D^{-n\delta}} + \varepsilon \xrightarrow{n \to \infty} \underline{\varepsilon}$$

$$P_{err} \geq 1 - \varepsilon$$

Teo (3.1.8) (Teorema B-B di Shannon / Teorema della codifica di sorgente per codici B-B)

Sia $\delta > 0$.

Parte diretta: Se $R_n \geq H_D(\vec{p}) + \delta$, allora esiste una famiglia di codici per S^n tale che $\lim_{n \to \infty} P_{err}^{(n)} = 0$.

Parte inversa: Se $R_n \leq H_D(\vec{p}) - 2\delta$, allora $\lim_{n \to \infty} P_{err}^{(n)} = 1$ per qualunque codice B-B.

Costruzioni esplicita di codici sorgente

- Descrizione statistica della sorgente → Shannon-Fano, Huffman, Fano, Shannon-Fano-Elias
  codifica aritmetico
- Codici universali → Codice multinomiale, codice Ziv-Lempel

.zip '77