UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Matematica e Fisica
Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea

La Trasformata di Fourier

Canditato:
Matteo Pandolfi
Matricola: **538538**

Relatrice:
Prof.ssa Michela Procesi

Anno accademico 2020/2021

Abstract

L'obiettivo di questa tesi è quello di costruire la Trasformata di Fourier utilizzando dapprima le proprietà degli spazi L^p e, successivamente, quelle degli spazi di Schwartz, ponendo l'accento sulle differenze tra le due strategie per giungere alle dimostrazioni dei teoremi di Inversione e di Plancherel.
Verranno in seguito approfonditi alcuni esempi su come la Trasformata di Fourier venga utilizzata per risolvere equazioni alle derivate parziali lineari di interesse per la fisica matematica, come per esempio l'equazione del calore.

Indice

Introduzione **5**

1 Trasformata di Fourier attraverso gli Spazi L^p **7**
1.1 Prime proprietà e definizioni . . . 7
1.2 Teorema di Inversione . . . 10
1.3 Teorema di Plancherel . . . 15
1.3.1 Problematiche della Trasformata di Fourier in L^2 . . . 15
1.3.2 Teorema di Plancherel . . . 16

2 Trasformata di Fourier attraverso gli Spazi di Schwartz **20**
2.1 Prime definizioni e Teorema di Inversione . . . 20
2.2 Distribuzioni temperate e Teorema di Plancherel . . . 26

3 Applicazioni della Trasformata di Fourier **28**
3.1 Calcolo della Trasformata di Fourier . . . 28
3.1.1 Metodo dei Residui . . . 28
3.2 Equazione del calore . . . 30

A Misura di Lebesgue **34**

B Spazi di Hilbert **37**

C Serie di Laurent e Teorema dei Residui **40**

Ringraziamenti **42**

Bibliografia **45**

Introduzione

> "The analytical equations, unknown to the ancient geometers, which Descartes was the first to introduce into the study of curves and surfaces, are not restricted to the properties of figures, and to those properties which are the object of rational mechanics; they extend to all general phenomena. There cannot be a language more universal and more simple, more free from errors and from obscurities, that is to say more worthy to express the invariable relations of natural things.
> Considered from this point of view, mathematical analysis is as extensive as nature itself; it defines all perceptible relations, measures times, spaces, forces, temperatures; this difficult science is formed slowly, but it preserves every principle which it has once acquired; it grows and strengthens itself incessantly in the midst of the many variations and errors of the human mind.
> Its chiefs attribute is clearness; it has no marks to express confused notions. It brings together phenomena the most diverse, and discovers the hidden analogies which unite them."

Attraverso questa frase, che Jean Baptiste Joseph Fourier scrive nell'introduzione della celebre "*Analytical Theory of Heat*", egli sintetizza la ragione per cui l'approfondimento dell'analisi matematica è tanto importante da costituire il punto di partenza per lo studio non soltanto di fenomeni profondamente fisici, ma di ogni tipo di fenomeno naturale.
La sola "Trasformata di Fourier", teorizzata nel libro sopracitato e il cui studio verrà approfondito in questo elaborato, nasce principalmente con lo scopo di risolvere l'equazione del calore, per poi trovare molteplici applicazioni sia nello studio delle equazioni differenziali che in ambiti del mondo della fisica e dell'ingegneria.
Oltre al già citato studio del calore, infatti, la Trasformata di Fourier viene molto usata nella teoria dei segnali, la branca dell'ingegneria che studia quelle funzioni (dette "segnali") che descrivono le variazioni temporali di una grandezza fisica o dello stato fisico di un sistema, come ad esempio i parametri del campo elettromagnetico per i segnali radio, utili per la trasmissione di messaggi ed informazioni.
Per quanto riguarda invece l'utilizzo della Trasformata in ambiti più matematici, non si può non citare la risoluzione delle equazioni differenziali (di cui un esempio è proprio l'equazione del calore) e la soluzione di alcuni integrali il cui procedimento di risoluzione è troppo complicato per poter essere svolto in maniera efficiente.
Spendiamo ora alcune parole sulla struttura e il contenuto di questa tesi. L'obiettivo è quello di definire la Trasformata di Fourier su L^2 e, per fare ciò, consideriamo due possibili percorsi: il primo, quello proposto da Walter Rudin nel suo libro "Real and Complex Analysis", utilizza le proprietà degli spazi L^p, mentre il secondo, proposto da Michael Reed e Barry Simon nel loro "Methods of Modern Mathematical Physics", utilizza le proprietà degli spazi di Schwartz.
La differenza nei due metodi sta nel fatto che mentre Rudin inizia definendo la Trasformata

di Fourier sullo spazio L^1, ovvero nella maniera più intuitiva possibile, per poi procedere alla dimostrazione del Teorema di Inversione in un modo meno naturale e più astratto (che richiede la dimostrazione di diversi enunciati e la definizione di alcuni strumenti ausiliari), Reed e Simon definiscono la Trasformata di Fourier sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}$, il quale è forse più complesso da definire, tuttavia consente di giungere in maniera quasi ovvia al Teorema di Inversione ed al Teorema di Plancherel semplicemente dimostrando che la Trasformata di Fourier costituisce una mappa uno-a-uno da $\mathcal{S}$ in se stesso.
I primi due capitoli saranno perciò dedicati all'approfondimento di questi due percorsi, mentre nell'ultimo saranno riportati tre esempi di applicazione della Trasformata di Fourier: due di essi riguardano una computazione vera e propria, mentre l'ultimo ha a che fare con la sua correlazione con l'equazione del calore, utile anche per mostrare in che modo la Trasformata di Fourier e le equazioni differenziali sono così strettamente collegate.

Capitolo 1

Trasformata di Fourier attraverso gli Spazi L^p

1.1 Prime proprietà e definizioni

Notazione. Utilizzeremo qui la lettera m per indicare la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ divisa per $\sqrt{2\pi}$. In altre parole, se dx denota l'usuale misura di Lebesgue, secondo la nuova notazione varrà che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Rammentiamo inoltre la *norma p* di una funzione f, ovvero

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\ dm(x) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < +\infty),$$
$$\|f\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| := \inf\{M : |f(x)| < M \text{ quasi ovunque}\}.$$

e la *convoluzione di due funzioni*, ovvero

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\ dm(y) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Scriveremo inoltre L^p per indicare lo spazio $L^p(\mathbb{R})$ e C_0 per indicare lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ che si annullano ad infinito.

Ricordiamo ora due teoremi che utilizzeremo più avanti per dimostrare alcune proprietà inerenti al Teorema di Inversione.

Teorema 1.1.1 (**Disuguaglianza di Hölder**). *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia q il suo esponente coniugato. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, allora $fg \in L^1$ e vale che*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.1.2 (**Disuguaglianza di Jensen**). *Data una misura positiva μ su una $\sigma -$ algebra di un insieme X tale che $\mu(X) = 1$, se $f \colon X \to (a,b)$ è tale che $f \in L^1(\mu)$ e se $\varphi \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa, allora vale che:*

$$\varphi\left(\int_X f\ d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f)\ d\mu.$$

Possiamo ora dare la seguente:

Definizione 1.1.3 (Trasformata di Fourier). Sia $f \in L^1$. Allora la funzione

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\, dm(x) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

è definita come la **Trasformata di Fourier di** f.

Osservazione 1.1.4. *(i) Scrivere la definizione in (1.1) utilizzando l'usuale misura di Lebesgue significa scrivere che la* Trasformata di Fourier di f *è*

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\, dx \qquad (t \in \mathbb{R});$$

(ii) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione $\varphi_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$. Allora

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(x+y) &= e^{i\alpha(x+y)} = e^{i\alpha x + i\alpha y} \\ &= e^{i\alpha x}e^{i\alpha y} = \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y).\end{aligned}$$

Vale inoltre che $|\varphi_\alpha(x)| = |e^{i\alpha x}| = \sqrt{\cos^2(\alpha x) + i\sin^2(\alpha x)} = 1$. Queste due proprietà fanno della funzione φ_α un ***carattere*** *del gruppo additivo* $(\mathbb{R}, +)$.

Attraverso la precedente osservazione, e ricordando che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni (Teorema A.0.6), possiamo dimostrare le seguenti proprietà della Trasformata di Fourier.

Teorema 1.1.5 (Proprietà della Trasformata di Fourier). *Sia una funzione $f \in L^1$ e siano $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

a): Se $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, allora $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$;

b): Se $g(x) = f(x-\alpha)$, allora $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$;

c): Se $g \in L^1$ e $h = f * g$, allora $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$;

d): Se $g(x) = \overline{f(-x)}$, allora $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$;

e): Se $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ e $\lambda > 0$, allora $\hat{g}(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)$;

f): Se $g(x) = -ixf(x)$ e $g \in L^1$, allora $\hat{f}$ è differenziabile e vale $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$.

Dimostrazione. a): Basta operare per sostituzione diretta nella formula (1.1).

$$\begin{aligned}\hat{g}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ixt}\, dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}e^{-itx}\, dm(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix(\alpha-t)}\, dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix(t-\alpha)}\, dm(x) = \\ &= \hat{f}(t-\alpha).\end{aligned}$$

b): Analogamente al punto a), basta eseguire i seguenti passaggi

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ixt}\ dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha)e^{-ixt}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha)e^{-it(x-\alpha+\alpha)}\ dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha)e^{-itx+it\alpha-it\alpha}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha)e^{-it(x-\alpha)}e^{-it\alpha}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}e^{-it\alpha}\ dm(x) = \\
&= \hat{f}(t)e^{-it\alpha}.
\end{aligned}$$

Nella penultima uguaglianza si è fatto utilizzo del cambio di variabile $y = x - \alpha$ e successivamente si è tornati a denotare la variabile y con la lettera x.

c): Qui basta applicare il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dm(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)e^{-itx}\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\ dm(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\ dm(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-it(x+y-y)}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-ity}\ dm(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-it(x-y)}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-ity}\ dm(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}\ dm(x) = \\
&= \hat{g}(t)\hat{f}(t).
\end{aligned}$$

Anche qui, come nel punto *b*), si è utilizzato un cambio di variabile nei passaggi finali.

d): Segue dal fatto che $e^{-itx} = \overline{e^{itx}}$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ixt}\ dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)}e^{-ixt}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)e^{ixt}}\ dm(x) = \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)e^{ixt}\ dm(x)} = \\
&= \overline{\hat{f}(t)}.
\end{aligned}$$

e): Operiamo sempre per sostituzione diretta nella (1.1):

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-itx}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-\frac{ixt}{\lambda}\lambda}\ dm(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-i\frac{x}{\lambda}\lambda t}\ dm(x) = \\
&= \lambda\hat{f}(\lambda t).
\end{aligned}$$

Per ottenere l'ultima uguaglianza basta eseguire il cambio di variabile $y = \frac{x}{\lambda}$ e successivamente denotare nuovamente con x la variabile y.

f): Applicando la definizione osserviamo che

$$\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{-ixt}(e^{-ix(s-t)}-1)}{s-t}\, dm(x) \qquad (s \neq t),$$

quindi se poniamo $\varphi(x,u) = \frac{(e^{-ixu}-1)}{u}$ otteniamo

$$\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\varphi(x, s-t)\, dm(x) \qquad (s \neq t).$$

Poiché $|\varphi(x,u)| \leq |x|$ per ogni $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e poiché $\varphi(x,u) \to (-ix)$ per $u \to 0$, dal Teorema sulla Convergenza Equidominata otteniamo che, per $s \to t$, si ha

$$\hat{f}'(t) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixt}\, dm(x).$$

■

Osservazione 1.1.6. *L'enunciato del Teorema della Convergenza Dominata, in realtà, è valido per le successioni di funzioni* numerabili. *Quindi per ogni successione di funzioni* $\{s_n\}$ *convergente a* t *possiamo concludere che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\hat{f}(s_n)-\hat{f}(t)}{s_n-t} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixt}\, dm(t),$$

il che ci dice, esattamente, che

$$\lim_{s\to t} \frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixt}\, dm(t),$$

grazie all'utilizzo del Teorema Ponte.

1.2 Teorema di Inversione

Proviamo ad invertire il processo della Trasformata di Fourier sfruttando le sue analogie con la *Serie di Fourier.*
In questo caso sappiamo che, data una funzione f, i coefficienti di Fourier di f si trovano nella seguente maniera:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

La formula di inversione, supponendo f regolare a tratti, è quindi la seguente:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

In maniera analoga, data $f \in L^1$, possiamo aspettarci, conoscendo la Trasformata di Fourier di f, cioè

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}\, dm(x),$$

che la formula di inversione sia la seguente:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{itx}\ dm(t).$$

Questo integrale è ben definito se $\hat{f}$ è in L^1 e si può dimostrare come esso sia corretto come formula di inversione, tuttavia se tentassimo di ottenere questa dimostrazione attraverso i passaggi analoghi a quelli utilizzati per le serie di Fourier, ci imbatteremmo in un integrale senza senso, ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)x}\ dx.$$

Dimostreremo dunque il *Teorema di Inversione* attraverso dei ragionamenti un po' più complicati rispetto a quelli delle serie di Fourier.

Definizione 1.2.1. Sia f una funzione a valori in $\mathbb{R}$ e sia $y \in \mathbb{R}$. Definiamo la "**traslata di** f" come:

$$f_y(x) = f(x-y) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Teorema 1.2.2. *Per ogni funzione reale $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ e per ogni $y \in \mathbb{R}$ la mappa*

$$y \mapsto f_y$$

è una mappa uniformemente continua da $\mathbb{R}$ in $L^p(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dato che $f \in L^p$ sappiamo[1] che esiste una funzione continua g il cui supporto giace in un intervallo limitato $[-A, A]$ tale che

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

L'uniforme continuità g dimostra che esiste $\delta \in (0, A)$ tale che, se $|s-t| < \delta$, allora

$$|g(s) - g(t)| < (3A)^{-\frac{1}{p}}\varepsilon.$$

Segue dunque, sempre ipotizzando che $|s-t| < \delta$ e ricordando che il supporto di g giace in $[-A, A]$, che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-s) - g(x-t)|^p\ dx < \frac{1}{3A}\varepsilon^p(2A+\delta) < \varepsilon^p.$$

Quindi

$$\|g_s - g_t\|_p^p < \varepsilon^p.$$

Applicando la radice di ordine p ad entrambi i membri otteniamo che

$$\|g_s - g_t\|_p < \varepsilon.$$

Ora, essendo la norma L^p invariante per traslazioni (cioè tale che $\|f\|_p = \|f_s\|_p$), possiamo operare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\|f_s - f_t\|_p &= \|f_s - g_s + g_s + g_t - g_t - f_t\|_p \leq \\
&\leq \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p = \\
&= \|(f-g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(g-f)_t\| = \\
&= \|f-g\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g - f\| \leq \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = \\
&= 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

[1] Infatti l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto su un insieme X è denso in $L^p(\mu)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.

Questo vale per ogni $|s-t|<\delta$ e dimostra, scegliendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$, l'uniforme continuità della mappa $y \mapsto f_y$. ■

Teorema 1.2.3. *Se $f \in L^1$, allora $\hat{f} \in C_0$, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K tale che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \notin K$. Vale inoltre che*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue banalmente dalla definizione di Trasformata di Fourier, infatti:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\ dm(x)\right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-ixt}|\ dm(x) \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\ dm(x) = \\ &= \|f\|_1 \end{aligned}$$

Essendo $\|f\|_1 < \infty$, segue che $\|\hat{f}\|_\infty < \infty$.
Sia ora $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} t$. Naturalmente segue che

$$|\hat{f}(t_n) - \hat{f}(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-it_nx} - e^{-itx}|\ dm(x).$$

L'integrando è limitato da $2|f(x)|$ e tende a 0 per ogni x quando $n \to \infty$. Ricordando che $f \in L^1$ per ipotesi, abbiamo che l'integrale di $2|f(x)|$ è finito, per cui si può applicare il Teorema sulla Convergenza Dominata, il quale ci consente di dire che $\hat{f}(t_n) \to \hat{f}(t)$. Questo dimostra la continuità di $\hat{f}$.
Ora, poiché $e^{i\pi} = -1$, possiamo dire che

$$\hat{f}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{it\left(x+\frac{\pi}{t}\right)}\ dm(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{\pi}{t}\right)e^{itx}\ dm(x).$$

Di conseguenza, unendo questo fatto alla definizione di Trasformata di Fourier,

$$\begin{aligned} 2\hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{t}\right)\right)e^{itx}\ dm(x) \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{t}\right)\right|\ dm(x) = \\ &= \|f - f_{\frac{\pi}{t}}\|_1. \end{aligned}$$

Facendo tendere $t \to \pm\infty$, otteniamo che $2|\hat{f}(t)| \leq \|f - f_{\frac{\pi}{t}}\| \to 0$ grazie al teorema 1.2.2, per cui $\hat{f}(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$, ovvero $f \in C_0$. ■

Definiamo ora due funzioni ausiliarie che risulteranno molto utili nella dimostrazione del Teorema di Inversione e vediamone alcune proprietà.
Sia

$$H(t) := e^{-|t|}$$

e sia

$$h_\lambda(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)e^{itx}\ dm(t) \qquad (\lambda > 0).$$

Osservazione 1.2.4. *Attraverso un semplice calcolo otteniamo*

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}.$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x)\ dm(x) = 1. \tag{1.2}$$

Osserviamo inoltre che $0 < H(t) \leq 1$ *e che* $H(\lambda t) \to 1$ *per* $\lambda \to 0$.

Proposizione 1.2.5. *Se* $f \in L^1$*, allora*

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{itx}\ dm(t).$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue da una semplice applicazione del Teorema di Fubini, infatti:

$$\begin{aligned}
(f * h_\lambda)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\ dm(y) \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)e^{ity}\ dm(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\ dm(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{ity}\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\ dm(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{it(x-y)}\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{itx}\ dm(t).
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.6. *Se* $g \in L^\infty$ *ed è continua in un punto* x*, allora*

$$\lim_{\lambda \to 0}(g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x)\ dm(x) = 1$ ed operiamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
(g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y)h_\lambda(y)]\ dm(y) - g(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ([g(x-y)h_\lambda(y))]\ dm(y) - g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y)\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ([g(x-y)h_\lambda(y) - g(x)h_\lambda(y)]\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)]h_\lambda(y)\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)]\frac{1}{\lambda}h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right)\ dm(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-\lambda s) - g(x)]h_1(s)\ dm(s).
\end{aligned}$$

L'ultimo integrando è dominato da $2\|g\|_\infty h_1(s)$ e converge a 0 puntualmente per ogni s se $\lambda \to 0$. Ancora una volta dal Teorema sulla Convergenza Dominata segue l'asserto. ■

Teorema 1.2.7. *Sia* $1 \leq p < +\infty$ *e sia* $f \in L^p$, *allora*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando la seguente:

- **Asserzione:** Dato q è esponente coniugato di p (quindi $q = \frac{p}{p-1}$), allora $h_\lambda \in L^q$.

    - Sia $p \neq 1$. In tal caso:

    $$\begin{aligned} \|h_\lambda\|_q^q &= \int_{-\infty}^{\infty} |h_\lambda|^q \; dm = \int_{-\infty}^{\infty} |h_\lambda|^{\frac{p}{p-1}} \; dm = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h_\lambda|^{\frac{p}{p-1}-1} |h_\lambda| \; dm = \int_{-\infty}^{\infty} \left| (h_\lambda)^{\frac{1}{p-1}} (h_\lambda) \right| \; dm \leq \\ &\leq \|(h_\lambda)^{\frac{1}{p-1}}\|_\infty \cdot \|h_\lambda\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

    Infatti dal fatto che $h_\lambda > 0$ e che $\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda \; dm = 1$, abbiamo che $h_\lambda \in L^1$. D'altra parte $h_\lambda \in L^\infty$ perché $h_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ e il suo massimo, in $x = 0$, è finito. Per quanto riguarda la penultima disuguaglianza abbiamo utilizzato la Disuguaglianza di Hölder (teorema 1.1.1).
    Se $p = 1$, allora $q = \infty$, ma abbiamo appena dimostrato che $h_\lambda \in L^\infty$, per cui l'asserzione vale per ogni $p \in [1, \infty)$.

Quanto appena dimostrato ci dice che la convoluzione $f * h_\lambda$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ora, dal fatto che $\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda \; dm = 1$, possiamo dire che

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x)) h_\lambda(y) \; dm(y).$$

Tenendo a mente questo, la relazione in (1.2) e il fatto che la funzione $|\cdot|^p$ è convessa, possiamo applicare la disuguaglianza di Jensen (teorema 1.1.2) e dire che

$$|(f * h_\lambda(x) - f(x)|^p \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y) \; dm(y).$$

Integrando ambedue i membri rispetto alla variabile x, ed applicando il teorema di Fubini, otteniamo che

$$\|f * h_\lambda - f\|_p^p \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f_y - f\|_p^p h_\lambda(y) \; dm(y). \tag{1.3}$$

Definiamo ora $g(y) = \|f_y - f\|_p^p$. Dal teorema 1.2.2 sappiamo che g è continua e limitata e, inoltre, vale l'invarianza della norma per traslazione: $\|g(y)\|_p = \|g(0)\|_p$. Ma $g(0) = 0$, quindi, facendo il limite per $\lambda \to 0$, dal teorema 1.2.6, ottengo che il membro a destra in (1.3) tende a 0, ovvero la tesi. ■

È ora possibile dimostrare il seguente:

Teorema 1.2.8 (di Inversione). *Se* $f \in L^1$ *e* $\hat{f} \in L^1$, *e se*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} \; dm(t) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

allora $g \in C_0$ *e* $f(x) = g(x)$ *quasi ovunque.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 1.2.5 sappiamo che

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{itx}\, dm(t). \tag{1.4}$$

Ora, gli integrandi sono limitati da $|\hat{f}|$ (in L^1 per ipotesi), e poiché $H(\lambda t) \xrightarrow{\lambda \to 0} 1$, dal Teorema sulla convergenza dominata vale che, se $\lambda \to 0$, l'integrale di destra in (1.4) tende a $g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Ora, poiché $\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0$ e poiché ogni successione di funzioni $\{f_n\}$ in L^1 convergente ad una funzione f ammette una sottosuccessione convergente ad $f(x)$ per ogni x, possiamo dire che esiste una successione $\{\lambda_n\}$ tale che $\lambda_n \to 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x) \quad q.o..$$

Segue dunque che $f(x) = g(x)$ quasi ovunque. Essendo, d'altra parte, $f \in L^1$, segue che $g \in C_0$ (teorema precedente) e ciò conclude la dimostrazione. ■

Corollario 1.2.9 (Teorema di Unicità). *Se $f \in L^1$ e $\hat{f}(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora $f(x) = 0$ quasi ovunque.*

Osservazione 1.2.10. *Ipotizziamo che esistano f e g in L^1 tali che le loro trasformate di Fourier, $\hat{f}$ e $\hat{g}$, coincidano quasi ovunque. In tal caso consideriamo la funzione $f - g$ e calcoliamone la Trasformata di Fourier.*

$$\widehat{(f-g)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - g(x))e^{-itx}\, dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\, dm(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}\, dm(x) = \\ = \hat{f} - \hat{g}.$$

*Quindi $\widehat{(f-g)} = \hat{f} - \hat{g} = 0$, in quanto $\hat{f} = \hat{g}$ quasi ovunque, ma dal corollario 1.2.9 abbiamo che $f - g = 0$ quasi ovunque, ovvero $f = g$ quasi ovunque. Ecco il motivo per cui il precedente corollario è stato definito come "*Teorema di Unicità*".*

1.3 Teorema di Plancherel

1.3.1 Problematiche della Trasformata di Fourier in L^2

La misura di Lebesgue dello spazio L^1 è infinita, quindi L^2 non è un sottoinsieme di L^1, ragion per cui la definizione della Trasformata di Fourier data in (1.1) non è direttamente applicabile ad ogni $f \in L^2$. É però possibile dimostrare che tale definizione vale per tutte le funzioni f in $L^1 \cap L^2$ e che, definendo sempre $\hat{f}$ come la Trasformata di Fourier di f, vale l'uguaglianza $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Da questo fatto, e da altre considerazioni basate principalmente sul fatto che L^2 è uno spazio di Hilbert, si riesce a costruire la Trasformata di Fourier di ogni funzione f in L^2.
Quanto appena introdotto, è rigorosamente esposto e dimostrato nel seguente teorema.

1.3.2 Teorema di Plancherel

Teorema 1.3.1 (**Teorema di Plancherel**). *Data una funzione $f \in L^2$, è sempre possibile associare ad essa una funzione $\mathring{f} \in L^2$ tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte:*

1) Se $f \in L^1 \cap L^2$, allora $\mathring{f}$ coincide con la Trasformata di Fourier $\hat{f}$ definita in (1.1);

2) $\|f\|_2 = \|\mathring{f}\|_2$ per ogni $f \in L^2$;

3) La mappa $f \mapsto \mathring{f}$ è un isomorfismo di spazi di Hilbert da L^2 in se stesso;

4) Vale la seguente relazione di simmetria tra f e $\mathring{f}$: se

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}\ dm(x) \qquad \text{e} \qquad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathring{f}(t)e^{ixt}\ dm(t),$$

allora vale che $\|\varphi_A - \mathring{f}\|_2 \to 0$ e $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$ per $A \to +\infty$.

Dimostrazione. Innanzitutto vogliamo dimostrare che

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \qquad (f \in L^1 \cap L^2). \tag{1.5}$$

Fissiamo dunque $f \in L^1 \cap L^2$ e definiamo

$$\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)} \qquad \text{e} \qquad g := f * \tilde{f}.$$

Osserviamo subito che

$$\begin{aligned} g = f * \tilde{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\tilde{f}(y)\ dm(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}\ dm(y) = \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(x+t)\overline{f(t)}\ dm(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\overline{f(t)}\ dm(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\overline{f(y)}\ dm(y). \end{aligned}$$

Spieghiamo brevemente questi passaggi: abbiamo applicato la definizione di g e di prodotto di convoluzione, successivamente abbiamo effettuato il cambio di variabile $t = -y$ e, una volta riscritta l'espressione, abbiamo denotato nuovamente la variabile t con la lettera y. Ricordando ora che L^2 è spazio di Hilbert, dalla definizione di prodotto interno possiamo scrivere

$$g(x) = (f_{-x}, f).$$

Poiché il prodotto interno è continuo, segue che g è continua.
D'altra parte, dalla Disuguaglianza di Schwarz, e ricordando l'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue, abbiamo che

$$|g(x)| = (f_{-x}, f) \leq \|f_{-x}\|_2\|f\|_2 = \|f\|_2^2.$$

Quindi g è limitata. Dal fatto che $f \in L^1$ segue anche che $\tilde{f} \in L^1$, infatti

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{f(-x)}|\ dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(-x)|\ dm(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\ dm(y) < \infty.\end{aligned}$$

Ma allora, essendo g definita come la convoluzione di due funzioni in L^1, segue che $g \in L^1$. Abbiamo quindi le ipotesi necessarie per applicare a g la proposizione 1.2.5, da cui otteniamo

$$(g * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{g}(t)e^{ixt}\ dm(t),$$

e quindi,

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{g}(t)\ dm(t).$$

Adesso, g è continua e limitata, quindi abbiamo anche le ipotesi per applicare il teorema 1.2.6 e dire che

$$\lim_{\lambda\to 0}(g * h_\lambda)(0) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\overline{f(y)}\ dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2\ dm(y) = \|f\|_2^2.$$

Grazie ora ai punti c) e d) del teorema 1.1.5, abbiamo che

$$g = f * \tilde{f} \quad \Rightarrow \quad \hat{g} = \hat{f} \cdot \hat{\tilde{f}} = \hat{f} \cdot \overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2.$$

Ricordando ora che $\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda t) = 1$, dal Teorema sulla Convergenza Monotona abbiamo che

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\ dm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\lambda\to 0} H(\lambda t) \cdot \hat{g}(t)\ dm(t) = \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) \cdot \hat{g}(t)\ dm(t) = \lim_{\lambda\to 0}(g * h_\lambda)(0) = \\ &= g(0) = \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Da qui segue che $\hat{f}$ è in L^2 e che vale la relazione in (1.5).
Definiamo ora Y come l'insieme di tutte le Trasformate di Fourier $\hat{f}$ delle funzioni in $L^1 \cap L^2$. Naturalmente, da quanto appena dimostrato, $Y \subseteq L^2$. Facciamo vedere ora che è anche denso in L^2.
Per mostrare ciò è sufficiente far vedere che $Y^\perp = \{0\}$. Infatti $Y \subseteq \overline{Y}$, quindi $\overline{Y}^\perp \subseteq Y^\perp$, ma allora se $Y^\perp = \{0\}$, necessariamente $\overline{Y}^\perp = \{0\}$, da cui seguirebbe che $\overline{Y} = L^2$.
Consideriamo le funzioni $x \mapsto e^{i\alpha x}H(\lambda x)$. Esse sono in $L^1 \cap L^2$. Infatti

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\alpha x} \cdot H(\lambda x)|\ dm(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\alpha x} \cdot \frac{1}{e^{|\lambda x|}} \right|\ dm(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x - |\lambda x|}\ dm(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x + \lambda x}\ dm(x) + \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x - \lambda x}\ dm(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x(i\alpha+\lambda)}\ dm(x) + \int_{0}^{\infty} e^{x(i\alpha-\lambda)}\ dm(x) < \infty,\end{aligned}$$

e in maniera analoga si può mostrare che tali funzioni sono anche L^2.
Da qui segue che le loro Trasformate di Fourier sono in Y. Queste sono pari a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}H(\lambda x)e^{-ixt}\ dm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\alpha-t)}H(\lambda x)\ dm(t) = h_\lambda(\alpha - t).$$

Ora, se $\omega \in L^2$ e $\omega \in Y^\perp$, allora si avrebbe che

$$(h_\lambda * \bar{\omega})(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(\alpha - t)\bar{\omega}(t)\ dm(t) = 0 \qquad \forall\ \alpha.$$

Ora, poiché dal teorema 1.2.7 abbiamo che

$$\lim_{\lambda\to 0} \|h_\lambda * \bar{\omega} - \bar{\omega}\|_2 = 0 \qquad (h_\lambda \to 0 \text{ se } \lambda \to 0),$$

segue che $\bar{\omega} = 0$, cioè che $\omega = 0$ e quindi che $Y^\perp = \{0\}$.
Denotiamo adesso la funzione $\hat{f}$ con $\Phi(f)$. Grazie alla relazione (1.5), abbiamo finora fatto vedere che $\Phi\colon L^1 \cap L^2 \to Y$ è una L^2-isometria tra due sottospazi densi di L^2. Ricordando dunque il lemma B.0.15, possiamo estendere Φ ad una isometria suriettiva da L^2 su se stesso. Le ipotesi del lemma sono infatti verificate:

1. L^2 è uno spazio di Hilbert, quindi è uno spazio di Banach, cioè uno spazio metrico, normato e completo;

2. $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2;

3. $Y = \Phi(L^1 \cap L^2)$ è denso in L^2;

4. Essendo $L^1 \cap L^2$ denso in L^2, possiamo estendere $\Phi\colon L^1 \cap L^2 \to Y$ a $\Phi\colon L^2 \to L^2$. Data, infatti, $f \in L^2$, esiste una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1 \cap L^2$ convergente ad f. Quindi $\|f_n\|_2 = \|\Phi(f_n)\|_2$, per cui, data anche la densità di Y in L^2, si ha che
$$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\Phi(f_n)\|_2 = \|\Phi(f)\|_2.$$
D'altra parte $\Phi\colon L^2 \to L^2$ è continua: infatti
$$0 \leq |\|\Phi(f)\|_2 - \|\Phi(g)\|_2| = |\|f\|_2 - \|g\|_2| \longrightarrow 0 \qquad (\text{per } g \to f).$$

Quindi $\Phi\colon L^2 \to L^2$ è isometria suriettiva, per cui per ogni $f \in L^2$ vale che $\|\Phi(f)\|_2 = \|f\|_2$. Definendo quindi $\mathring{f} := \Phi(f)$, abbiamo appena dimostrato le proprietà ***1)*** e ***2)*** del teorema. Per far vedere ora che vale la proprietà ***3)*** dell'enunciato, occorre dimostrare dapprima la seguente:

- **Asserzione:** Date $f, g \in L^2$, vale la seguente *identità di polarizzazione*:
$$4(f,g) = \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2.$$

- Basta svolgere i calcoli degli elementi al secondo membro dell'identità:
$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + (f,g) + (g,f) - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2 + (f,g) + (g,f). \\ &= 2(f,g) + 2(\bar{f},\bar{g}), \\ \|f+ig\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + (f,ig) - (\bar{f},i\bar{g}) = \\ &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - i(f,g) + i(\bar{f},\bar{g}), \\ \|f-ig\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + i(f,g) - i(\bar{f},\bar{g}). \end{aligned}$$
Otteniamo dunque
$$\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 = 2(f,g) + 2(\bar{f},\bar{g}),$$
e
$$i(\|f+ig\|_2^2 - \|f-ig\|_2^2) = 2(f,g) - 2(\bar{f},\bar{g}).$$
Mettendo insieme le due somme di sopra ottengo l'identità di polarizzazione.

Attraverso l'identità appena dimostrata possiamo far vedere che vale l'**Identità di Parseval**, infatti:

$$\begin{aligned}4(f,g) &= \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2 \\ &= \|\Phi(f+g)\|_2^2 - \|\Phi(f-g)\|_2^2 + i\|\Phi(f+ig)\|_2^2 - i\|\Phi(f-ig)\|_2^2 = \\ &= 4(\Phi(f),\Phi(g)),\end{aligned}$$

Da cui

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\ dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f(t))\Phi(g(t))\ dm(t) = (\Phi(f),\Phi(g)). \tag{1.6}$$

Consideriamo ora un insieme massimale ortonormale $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di L^2 (il quale sappiamo che esiste perché gli spazi di Hilbert ammettono sempre un insieme ortonormale massimale). Per dimostrare che $\Phi\colon L^2 \to L^2$ è isomorfismo basta far vedere che $\{\Phi(u_\alpha)\}_{\alpha\in A} =: \{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un insieme massimale ortonormale. In tal caso, infatti, avremmo due spazi di Hilbert i cui insiemi ortonormali massimali hanno la stessa cardinalità e, di conseguenza, sono isomorfi tra loro tramite Φ.
Dimostriamo che $\{\Phi(u_\alpha)\}$ è un insieme massimale ortonormale. Per ipotesi, so che se $f \in L^2$ è tale che $(f,u_\alpha) = 0\ \forall\ \alpha$, allora $f \equiv 0$. Sia ora $\hat{f} \in L^2$. Per la suriettività di Φ, so che $\hat{f} = \Phi(f)$ per qualche f. Supponiamo ora che $(\hat{f}, v_\alpha) = 0$ per ogni α ma che $f \not\equiv 0$. In tal caso, grazie all'Identità di Parseval, vale che

$$(\hat{f}, v_\alpha) = (\Phi(f),\Phi(u_\alpha)) = (f,u_\alpha) = 0 \qquad \forall\ \alpha \in A,$$

ma allora, essendo $\{u_\alpha\}$ un insieme ortonormale massimale, deve valere $f \equiv 0$, ma ciò contraddice l'ipotesi che f non sia costantemente nulla. Ne segue che $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un insieme ortonormale massimale, da cui segue che $\Phi\colon L^2 \to L^2$ è isomorfismo tra spazi di Hilbert, ovvero il punto ***3)*** dell'enunciato.
Resta da far vedere la proprietà ***4)***.
Sia χ_A la funzione caratteristica di $[-A,A]$, con $A \in \mathbb{R}$. Allora $\chi_A f \in L^1 \cap L^2$ per ogni $f \in L^2$. Inoltre, dato che

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}\ dm(x),$$

dalla proprietà ***1)*** abbiamo che

$$\varphi_A = \widehat{\chi_A f} \qquad \text{(Trasformata di Fourier)}.$$

Ora,

$$\begin{aligned}0 \le \|f-\chi_A f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f-\chi_A f|^2\ dm = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 + (\chi_A)^2 f^2 - 2\chi_A f^2\ dm = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2\ dm + \int_{-A}^{+A} f^2\ dm - 2\int_{-A}^{+A} f^2\ dm \xrightarrow{A\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{A\to\infty} \|f-\chi_A f\|_2 = 0$. Applicando ora la proprietà ***2)*** si ha che

$$\|\hat{f} - \widehat{(\chi_A f)}\|_2 = \|\widehat{(f-\chi_A f)}\|_2 = \|f-\varphi_A\| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } A \to +\infty.$$

In maniera del tutto analoga si dimostra che $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$ per $A \to +\infty$, e questo conclude la dimostrazione del Teorema di Plancherel.

■

Capitolo 2

Trasformata di Fourier attraverso gli Spazi di Schwartz

2.1 Prime definizioni e Teorema di Inversione

Definizione 2.1.1 (Spazio di Schwartz). Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^{(\beta)} f(x)|, \tag{2.1}$$

dove $D^{(\beta)}$ indica la derivata di ordine β della funzione $f(x)$. Si definisce **Spazio di Schwartz**, e si denota con $\mathcal{S}$, lo spazio funzionale

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \quad \forall\ \alpha, \beta\}, \tag{2.2}$$

dove $C^\infty(\mathbb{R})$ è lo spazio di tutte le funzioni continue insieme a tutte le loro derivate da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{C}$.

Notazione. Per semplicità, da ora in avanti denoteremo con $\mathcal{S}$ lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definizione 2.1.2 (Trasformata di Fourier). Sia $f \in \mathcal{S}$. La **Trasformata di Fourier** di f è la funzione $\hat{f}$ definita da

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda} f(x)\ dx. \tag{2.3}$$

Definizione 2.1.3 (Antitrasformata di Fourier). Sia $f \in \mathcal{S}$. La **Antitrasformata di Fourier** di f è la funzione $\check{f}$ definita da

$$\check{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda} \hat{f}(x)\ dx. \tag{2.4}$$

Enunciamo e dimostriamo ora un piccolo lemma preliminare che ci permette di dimostrare un'importante proposizione dalla quale discenderà poi il Teorema di Inversione.

Lemma 2.1.4. *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora, dato $r \in \mathbb{R}$, la funzione $x^r f(x)$ è ancora in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Calcoliamo la norma $\|x^r f(x)\|_{\alpha,\beta}$ e facciamo vedere che è finita.

$$\|x^r f(x)\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D_x^{(\beta)} x^r f(x)|. \tag{2.5}$$

Concentriamoci ora solo sul termine $D_x^{(\beta)} x^r f(x)$ e cerchiamo di capire come esso possa essere sviluppato analizzando i primi casi a partire da $\beta = 1$.

- $\beta = 1$:

$$D_x^{(1)}\left(x^r f(x)\right) = r x^{r-1} f(x) + x^r D_x^{(1)} f(x).$$

- $\beta = 2$:

$$D_x^{(2)}\left(x^r f(x)\right) = r(r-1)x^{r-2} f(x) + 2r x^{r-1} D_x^{(1)} f(x) + x^r D_x^{(2)} f(x).$$

- $\beta = 3$:

$$D_x^{(3)}\left(x^r f(x)\right) = r(r-1)(r-2)x^{r-3} f(x) + 3r(r-1)x^{r-2} D_x^{(1)} f(x) + 3r x^{r-1} D_x^{(2)} f(x) + x^r D_x^{(3)} f(x).$$

Procedendo per induzione, appare quindi evidente come la derivata di ordine β di $x^r f(x)$ sia pari a:

$$D_x^{(\beta)} x^r f(x) = \sum_{k=0}^{\beta} C_k(r) x^{r-(\beta-k)} D_x^{(k)} f(x), \tag{2.6}$$

dove $C_k(r)$ sono dei coefficienti reali dipendenti da r e da β. Continuando dunque a sviluppare la formula in (2.5), ed utilizzando la disuguaglianza triangolare, otteniamo:

$$\begin{aligned}\|x^r f(x)\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D_x^{(\beta)} x^r f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \sum_{k=0}^{\beta} C_k(r) x^{r-(\beta-k)} D_x^{(k)} f(x) \right| \leq \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(|x^\alpha C_0(r) x^{r-\beta} f(x)| + \cdots + |x^\alpha C_\beta(r) x^r D_x^\beta f(x)| \Big) = \\ &= C_0(r)\|f\|_{\alpha+r-\beta,0} + C_1(r)\|f\|_{\alpha+r-\beta+1,1} + \cdots + C_\beta(r)\|f\|_{\alpha+r,\beta}.\end{aligned}$$

Ricordando ora che $f(x)$ è nello spazio di Schwartz, abbiamo che ognuna di queste seminorme è finita. Vale dunque che

$$\|x^r f(x)\|_{\alpha,\beta} < \infty,$$

ovvero $x^r f(x) \in \mathcal{S}$. ∎

Proposizione 2.1.5. *Le mappe $\mathcal{F}\colon f \mapsto \hat{f}$ e $\mathcal{G}\colon f \mapsto \check{f}$ sono trasformazioni lineari e continue da $\mathcal{S}$ in se stesso. Vale inoltre che*

$$((i\lambda)^\alpha D^{(\beta)} \hat{f})(\lambda) = \widehat{D^{(\alpha)}((-ix)^\beta f(x))}. \tag{2.7}$$

Dimostrazione. La linearità delle due mappe segue dalla linearità dell'integrale complesso. Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}(\lambda^\alpha D^{(\beta)} \hat{f})(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^\alpha (-ix)^\beta e^{-i\lambda x} f(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-i)^\alpha} (D_x^{(\alpha)} e^{-i\lambda x})(-ix)^\beta f(x)\, dx = \\ &= \frac{(-i)^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} D_x^{(\alpha)}((-ix)^\beta f(x))\, dx.\end{aligned}$$

Per spiegare brevemente i passaggi, nella seconda uguaglianza abbiamo semplicemente riscritto $\lambda^\alpha e^{-i\lambda x}$ sotto forma di derivata di ordine α rispetto ad x della funzione $e^{-i\lambda x}$, mentre nell'ultima abbiamo svolto l'integrazione per parti integrando α volte la funzione $D_x^{(\alpha)} e^{-i\lambda x}$ e derivando, sempre α volte, la funzione $(-ix)^\beta f(x)$. Da qui segue che

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\lambda^\alpha (D^{(\beta)}\hat{f})(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |D_x^\alpha((-ix)^\beta f(x))|\, dx < \infty.$$

Ciò dimostra sia la formula dell'enunciato che il fatto che la mappa $\mathcal{F}$ va da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in se stesso. Per dimostrare invece la continuità è sufficiente far vedere la limitatezza. A tal proposito osserviamo che $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\, dx < \infty$. Quindi, dalla disuguaglianza di Hölder, vale che

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2} |D_x^\alpha(-ix)^\beta f(x)|\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \right) \|(1+x^2)|D_x^\alpha(-ix)^\beta f(x)|\|_\infty = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \frac{1}{1+x^2} \right\|_1 \|(1+x^2)|D_x^\alpha(-ix)^\beta f(x)|\|_\infty .
\end{aligned}$$

Ora, per il lemma 2.1.4, l'ultimo membro dell'equazione precedente è finito. Ciò dimostra che la mappa $\mathcal{F}$ è limitata e, di conseguenza, continua. Dato che la dimostrazione per la mappa $\mathcal{G}$ è analoga, la proposizione è completamente dimostrata. ∎

Definizione 2.1.6 (**Funzione liscia a supporto compatto**). Una funzione si dice essere **liscia a supporto compatto** se è C^∞ e se il suo supporto, ovvero

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$. L'insieme delle funzioni lisce a supporto compatto si denota C_c^∞.

Lemma 2.1.7. *Lo spazio delle funzioni C_c^∞ è denso in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{S}$. Definiamo

$$f_n(x) := \varphi\left(\frac{x}{n}\right) f(x)$$

dove $\varphi \in C_c^\infty$ tale che $\varphi(x) = 1$ per $|x| \leq 1$. Naturalmente $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in C_c^∞, quindi dobbiamo solo far vedere che

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{2.8}$$

ovvero,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^{(\beta)}(f_n(x) - f(x))| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^{(\beta)} f_n(x) - x^\alpha D^{(\beta)} f(x)| = 0.$$

Osserviamo ora che

$$D^{(\beta)} f_n(x) = D^{(\beta)} \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) f(x) \right) = \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{1}{n^k} \cdot D^{(k)} \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) \right) \cdot D^{(\beta-k)}(f(x)).$$

Da qui concludiamo che

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^{(\beta)} f_n(x) - x^\alpha D^{(\beta)} f(x)| = \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{1}{n^k} \cdot D^{(k)} \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right) \cdot D^{(\beta-k)}(f(x)) - x^\alpha D^{(\beta)} f(x) \right| = \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) D^{(\beta)} f(x) + \sum_{k=1}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{1}{n^k} \cdot D^{(k)} \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right) \cdot D^{(\beta-k)}(f(x)) - D^{(\beta)} f(x) \right) \right| \leq \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha D^{(\beta)}(f(x)) \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{1}{n^k} \cdot D^{(k)} \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right) \cdot D^{(\beta-k)}(f(x)) \right|.
\end{aligned}
$$

Ora, il secondo termine si traduce in una somma finita di β termini finiti tutti moltiplicati per un fattore $\frac{1}{n^t}$ per qualche $t > 0$, il quale fa tendere il tutto a 0.
Per quanto riguarda il primo termine, invece, osserviamo che questo è nullo laddove $|x| \leq n$, perché l'argomento della funzione φ risultera al massimo pari ad 1, per cui l'estremo superiore si riferisce al solo insieme $|x| > n$. Da qui possiamo scrivere che

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha D^{(\beta)}(f(x)) \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \right| = \\
&= \sup_{|x|>n} \left| \frac{x^{\alpha+1}}{x} D^{(\beta)}(f(x)) \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \right| \leq \\
&\leq \sup_{|x|>n} \left| \frac{x^{\alpha+1}}{n} D^{(\beta)} f(x) \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \right|.
\end{aligned}
$$

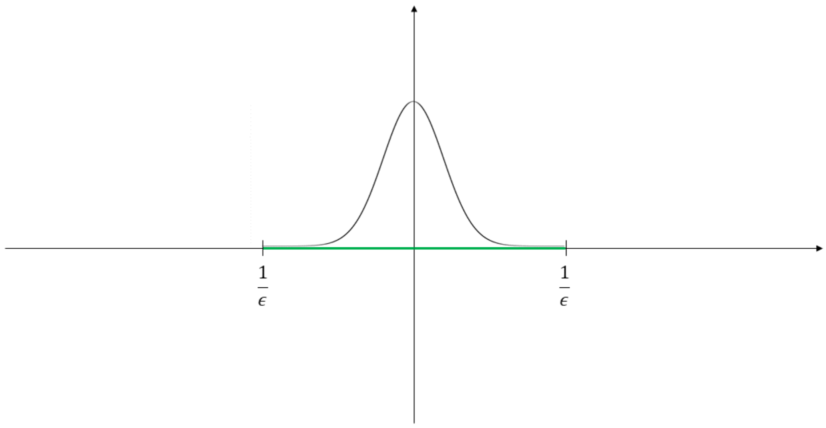
Quest'ultima per $n \to \infty$ tende naturalmente a 0. Concludiamo che la formula (2.8) vale e il lemma è dimostrato.

■

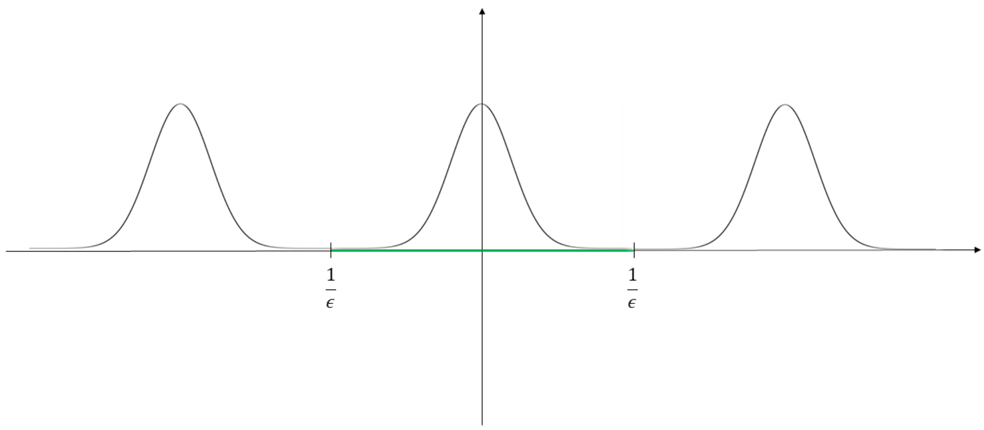
Teorema 2.1.8 (di Inversione). *La Trasformata di Fourier è una trasformazione biiettiva e con inversa continua da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$. La sua inversa è l'Antitrasformata di Fourier. In altre parole,*

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)).$$

Dimostrazione. Dimostriamo soltanto che $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f$, in quanto $\mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) = f$ si dimostra in maniera analoga. Dimostrare infatti che $\mathcal{F}(\mathcal{G}(f) = f$ significa far vedere la suriettività, mentre dimostrare che $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f$ significa far vedere l'iniettività. Poiché sia $\mathcal{F}$ che $\mathcal{G}$ sono mappe continue da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, è sufficiente far vedere che $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f$ nell'insieme denso C_c^∞.
Scelta dunque $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, definiamo C_ε come il segmento di lunghezza $\frac{2}{\varepsilon}$ centrato nell'origine di $\mathbb{R}$, in altre parole, $C_\varepsilon = \left[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. Scegliamo ora ε abbastanza piccolo da avere il supporto di f interamente contenuto in C_ε (come nella figura seguente, dove f è una funzione generica nello spazio di Schwartz).



Estendo a questo punto f per periodicità a $f_\#$ su tutto $\mathbb{R}$.



Definisco ora $g(y) = f_\# \left(\frac{y}{\pi\varepsilon}\right)$, la quale è 2π-periodica, infatti vale che

$$g(y + 2\pi) = f_\# \left(\frac{y + 2\pi}{\varepsilon}\right) = f_\# \left(\frac{y}{\pi\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon}\right) = f_\# \left(\frac{y}{\pi\varepsilon}\right).$$

Posso quindi esprimere g tramite la sua Serie di Fourier, ovvero

$$g(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat{g}_h e^{ihy},$$

dove $\hat{g}_h = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{ihy}\,dy$.
Ora, eseguendo alcuni calcoli su $\hat{g}_h$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\hat{g}_h &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{ihy}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\#}\left(\frac{y}{\pi\varepsilon}\right)e^{ihy}\,dy = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi\varepsilon}\right)e^{ihy}\,dy = \\
&= \frac{\pi\varepsilon}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)e^{-ih\pi\varepsilon x}\,dx = \\
&= \frac{\pi\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ih\pi\varepsilon x}\,dx = \\
&= \pi\varepsilon\sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}f(h\pi\varepsilon).
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che

$$g(y) = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}f(h\pi\varepsilon)e^{ihy}.$$

Ricordando ora che $g(y) = f_{\#}\left(\frac{y}{\pi\varepsilon}\right) = f\left(\frac{y}{\pi\varepsilon}\right)$ su C_ε, osserviamo che $f(x) = g(x\pi\varepsilon)$, quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}f(h\pi\varepsilon)e^{ihx\pi\varepsilon} = \\
&= \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\pi\varepsilon\mathbb{Z}}\mathcal{F}f(k)e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Se definisco $K_\varepsilon := \left\{k\in\mathbb{R} : \frac{k}{\pi\varepsilon}\in\mathbb{Z}\right\}$, otteniamo

$$f(x) = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in K_\varepsilon}\mathcal{F}f(k)e^{ikx}. \tag{2.9}$$

Facendo tendere ε a 0 abbiamo che $\pi\varepsilon\to 0$ e la somma in (2.9) diventa somma di Riemann di funzioni continue, in altre parole vale che

$$f(x) = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in K_\varepsilon}\mathcal{F}f(k)e^{ikx} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}f(k)e^{ikx}\,dx,$$

ma questa è proprio la definizione di Antitrasformata di Fourier. In altre parole abbiamo fatto vedere che $f(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$, ovvero la tesi.
La dimostrazione del fatto che $f = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f))$ è analoga. Ciò conclude la dimostrazione del teorema. ■

Proposizione 2.1.9. *Sia $f\in\mathcal{S}$. Allora vale che*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2\,dk.$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto dapprima per $f\in C_c^\infty$. In tal caso, per ε abbastanza piccolo, e ricordando le definizioni date nella dimostrazione del precedente Teorema di Inversione, vale che

$$f(x) = \sum_{k\in K_\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}e^{ikx}, f(x)\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}e^{ikx},$$

ovvero, f si può esprimere sotto forma di Serie di Fourier pari a

$$f(x) = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in K_\varepsilon} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Ora, poiché l'insieme $\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} e^{ikx}\right\}_{k \in K_\varepsilon}$ è una base ortonormale per lo spazio $L^2(C_\varepsilon)$, vale che

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_{C_\varepsilon} |f(x)|^2 \, dx = \\ &= \sum_{k \in K_\varepsilon} \left| \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} e^{ikx}, f(x) \right) \right|^2 = \\ &= \sum_{k \in K_\varepsilon} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \cdot \sqrt{\pi\varepsilon}.\end{aligned}$$

A questo punto, proprio come nella dimostrazione del teorema di Inversione, basta osservare che per $\varepsilon \to 0$ l'argomento dell'ultima uguaglianza tende a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \, dk.$$

A questo punto, per poter estendere quanto appena dimostrato a tutto lo spazio di Schwartz, basta osservare che le funzioni $\mathcal{F}$ e $\| \cdot \|_2$ sono funzioni continue su $\mathcal{S}$ e che C_c^∞ è denso in esso, come dimostrato nel lemma 2.1.7.

■

2.2 Distribuzioni temperate e Teorema di Plancherel

Ci poniamo ora l'obiettivo di estendere la Trasformata di Fourier or ora definita ad una mappa biiettiva da L^2 in L^2. Per farlo utilizzeremo lo spazio delle **distribuzioni temperate**, ovvero il duale dello spazio di Schwartz $\mathcal{S}'$, il quale contiene lo spazio L^2.

Notazione. Anche in questo caso denoteremo con $\mathcal{S}'$ lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Definizione 2.2.1 (**Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata**). Sia $T \in \mathcal{S}'$ una distribuzione temperata. Definiamo la **Trasformata di Fourier della distribuzione temperata** T, e la denotiamo $\hat{T}$, come la distribuzione temperata $\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$, dove $\varphi \in \mathcal{S}$.
Definiamo inoltre

$$T_g(\varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x)\varphi(x) \, dx, \qquad \text{per ogni } \varphi, g \in \mathcal{S}. \tag{2.10}$$

Lemma 2.2.2. *Sia $g \in \mathcal{S}$. Allora vale che $\hat{T}_g(\varphi) = T_{\hat{g}}(\varphi)$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\hat{T}_g(\varphi) = T_g(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x)\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iyx} \, dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iyx} \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{g}}(y)\varphi(y) \, dy = T_{\hat{g}}(\varphi).\end{aligned}$$

■

Essendo $L^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}'$, possiamo definire $\hat{T}_f(g) \in \mathcal{S}'$ come in (2.10) per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{S}$.

Proposizione 2.2.3. *Data una qualunque $f \in L^2(\mathbb{R})$ esiste una funzione $F \in L^2(\mathbb{R})$ tale per cui $\hat{T}_f = T_F$.*

Dimostrazione. Sappiamo che lo spazio di Schwartz è denso in $L^2(\mathbb{R})$, quindi esiste una successione $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$h_n \xrightarrow{L_2} f, \qquad \text{ovvero,} \qquad \lim_{n\to\infty} \|h_n - f\|_{L_2} = 0.$$

Ora, $\hat{T}_{h_n}(g) \to \hat{T}_f(g)$ per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, dal lemma precedente, abbiamo che $\hat{T}_{h_n}(g) = T_{\hat{h}_n}(g)$. Adesso,

$$\begin{aligned} T_{\hat{h}_n}(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{h}}_n(x)g(x)\ dx \overset{(1.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \check{\bar{\hat{h}}}_n(x)\hat{g}(x)\ dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}_n(x)\hat{g}(x)\ dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\hat{g}(x)\ dx = T_f(\hat{g}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Consideriamo ora $\hat{h}_n \in \mathcal{S}$. Dalla proposizione 2.1.9 abbiamo che

$$\|\hat{h}_n\|_{L^2} = \|h_n\|_{L^2} < \infty,$$

in particolare, $\hat{h}_n$ è successione limitata, per cui è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente in L^2, ovvero tale che esiste $F \in L^2(\mathbb{R})$ per cui, per ogni $l \in L^2(\mathbb{R})$, vale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{h}}_{n_k}(x)l(x)\ dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x)l(x)\ dx.$$

Ma poiché $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R})$, quanto appena detto vale a fortiori per ogni $g \in \mathcal{S}$, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{h}}_{n_k}(x)g(x)\ dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x)g(x)\ dx. \tag{2.12}$$

Mettendo quindi assieme (2.11) e (2.12) otteniamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\hat{g}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x)g(x)\ dx \qquad \forall\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

cioè $\hat{T}_f(g) = T_F(g)$. Ciò dimostra che l'immagine di $L^2(\mathbb{R})$ tramite la Trasformata di Fourier è proprio $L^2(\mathbb{R})$. ■

Teorema 2.2.4 (Plancherel). *La Trasformata di Fourier si estende in maniera unica ad una mappa unitaria da $L^2(\mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R})$. La sua inversa si estende in maniera unica al suo aggiunto.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1.9, il lemma 2.2.2 e la proposizione 2.2.3 sappiamo già che vale l'asserto per la Trasformata di Fourier. Per quanto riguarda la sua inversa è sufficiente invertire i passaggi, in quanto le ipotesi di partenza sono esattamente le stesse. ■

Capitolo 3

Applicazioni della Trasformata di Fourier

3.1 Calcolo della Trasformata di Fourier

Cominciamo con il mostrare un esempio di calcolo vero e proprio della Trasformata di Fourier, così da mostrarne il funzionamento e l'utilizzo concreto.
Calcoliamo la Trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{\frac{-\alpha x^2}{2}}$, dove $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha x^2}{2}} e^{-i\lambda x} \, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2} - i\lambda x} \, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{-y^2 - i\lambda\sqrt{\frac{2}{\alpha}} y} \, dy = \\
&= \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y + i\frac{\lambda}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2} \, dy = \\
&= \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \\
&= \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}.
\end{aligned}$$

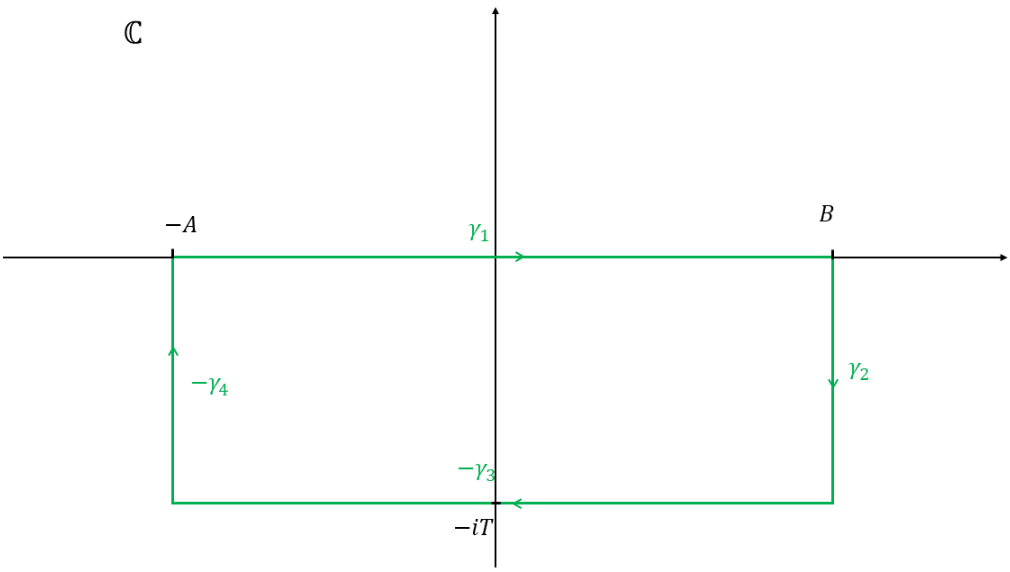
3.1.1 Metodo dei Residui

Poiché non sempre calcolare la Trasformata di Fourier di una funzione risulta semplice al pari del caso della Gaussiana, è bene introdurre un metodo che consenta di aggirare questa difficoltà.
Supponiamo di voler calcolare la Trasformata di Fourier di una funzione $f(x)$, per cui vogliamo calcolare

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, dx \qquad \text{dove } \xi > 0.$$

Utilizzare il metodo dei Residui consiste nell'utilizzare il teorema C.0.6 e, per farlo, abbiamo bisogno di considerare la funzione f come una funzione di $\mathbb{C}$, ovvero di considerare la funzione $f(z)$, con $z \in \mathbb{C}$.
Ciò che vogliamo fare adesso è definire un ciclo γ sul quale integrare la funzione $f(z)e^{-iz\xi}$

in modo da ottenere lo stesso risultato che si otterrebbe integrando la funzione in $\mathbb{R}$. Come fare?
Definiamo il ciclo $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ come indicato in figura:



Dati dunque $A, B > 0$ e $T := A + B$, siano:

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 \colon & [-A, B] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & t \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_2 \colon & [0, T] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & B - it \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_3 \colon & [-A, B] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & t - iT \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_4 \colon & [0, T] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & -A - it. \end{array}$$

Consideriamo l'integrale

$$\int_\gamma f(z)e^{-iz\xi}\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)e^{-iz\xi}\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)e^{-iz\xi}\, dz + \int_{\gamma_3} f(z)e^{-iz\xi}\, dz + \int_{\gamma_4} f(z)e^{-iz\xi}\, dz$$

e calcoliamolo pezzo per pezzo.
Osserviamo subito che

$$\int_{\gamma_1} f(z)e^{-iz\xi}\, dz = \int_{-A}^{B} f(t)e^{-it\xi}\, dt \xrightarrow{A,B\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}\, dt,$$

cioè l'integrale lungo la prima curva coincide con l'integrale che vogliamo calcolare.
Osserviamo ora l'integrale lungo γ_2. L'idea sarebbe quella di far tendere questo (e di conseguenza gli altri tre integrali), a 0 e, per far ciò, occorre aggiungere un'ipotesi alla funzione f. Deve valere cioè che

$$|f(z)| < \frac{K}{|z|} \qquad \text{per qualche } K > 0 \text{ e per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ tale che } |z| \gg 1.$$

Osserviamo che chiedere che ciò valga in $\mathbb{C}$ equivale a chiedere che ciò valga per la funzione $f(x)$ in $\mathbb{R}$, essendo quest'ultimo un sottocampo del campo complesso.
Calcoliamo ora l'integrale lungo la seconda curva.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)e^{-iz\xi}\ dz\right| = \left|\int_0^T f(B-it)e^{-i(B-it)\xi}(-i)\ dt\right| &\leq \int_0^T |f(B-it)|e^{-t\xi}\ dt \leq \\ &\leq \frac{K}{|B|}\int_0^T e^{-t\xi}\ dt \leq -\frac{K}{|B|\xi}\left[e^{-t\xi}\right]_0^T = \\ &= -\frac{K}{|B|}\xi[e^{-T\xi}-e] \xrightarrow{A,B\to\infty} 0.\end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga avviene il calcolo lungo la curva $-\gamma_4$ (il segno negativo è necessario per mantenere coerente il verso di percorrenza della curva). Osserviamo l'integrale lungo la curva γ_3.

$$\begin{aligned}\left|-\int_{\gamma_3} f(z)e^{-iz\xi}\ dz\right| = \left|-\int_{-A}^B f(t-iT)e^{-i(t-iT)\xi}\ dt\right| &\leq \int_{-A}^B |f(t-iT)|e^{-T\xi}\ dt < \\ &< \frac{K}{T}e^{-T\xi}\int_{-A}^B\ dt = \frac{K}{T}e^{-T\xi}(B+A) = Ke^{-T\xi} \xrightarrow{A,B\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Ciò dimostra che, per $A, B \to \infty$, vale che

$$\int_\gamma f(z)e^{-iz\xi}\ dz \to \int_{\gamma_1} f(z)e^{-iz\xi}\ dz. \tag{3.1}$$

Dal Teorema dei Residui però sappiamo che

$$\int_\gamma f(z)e^{-iz\xi}\ dz = 2\pi i\sum[\text{Residui di } f(z) \text{ all'interno della curva } \gamma]. \tag{3.2}$$

Mettendo assieme quanto ottenuto in (3.1) e (3.2), otteniamo il seguente risultato, che qui enunciamo come teorema.

Teorema 3.1.1. *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, con un numero finito di poli e che non giace sull'asse reale. Supponiamo inoltre che esista una costante $K > 0$ tale per cui*

$$|f(z)| < \frac{K}{|z|} \qquad \textit{per ogni } z \textit{ tale che } |z| \gg 1.$$

Sia infine $\xi > 0$. Allora vale che

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} = 2\pi i\sum[\textit{Residui di } f(z)e^{-iz\xi} \textit{ nel semipiano inferiore.}] \tag{3.3}$$

3.2 Equazione del calore

Si definisce **equazione del calore** l'equazione differenziale

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u, \tag{3.4}$$

dove $u := u(t,x)$ è una funzione di due variabili definita su $[0,\infty)\times\overline{U}$ ed $U \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto. Essa descrive la propagazione del calore su una sbarretta unidimensionale. Risolvere l'equazione del calore significa risolvere il seguente sistema dove alla (3.4) è associato un preciso dato iniziale:

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases} . \tag{3.5}$$

Applicando la Trasformata di Fourier si potrebbe risolvere questo problema piuttosto facilmente. Supponiamo infatti di poter scrivere $u(t,x)$ in termini della sua Antitrasformata di Fourier:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{u}(t,\xi)\ d\xi.$$

Devono, in tal caso, potersi scambiare le derivate con gli integrali e, di conseguenza, deve valere che

$$0 = \partial_t[u(t,x)] - \frac{1}{2}\partial_{xx}^2[u(t,x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\xi x} \left(\partial_t[\hat{u}(t,\xi)] - \frac{(i\xi)^2}{2}\hat{u}(t,\xi) \right) \right]\ d\xi,$$

da cui

$$\partial_t \hat{u} + \frac{\xi^2}{2}\hat{u} = 0.$$

A questo punto non resta che risolvere l'equazione per separazione di variabili, ottenendo

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}t}\hat{u}(0,\xi).$$

Ricordando ora che $u(0,x) = \varphi(x)$ otteniamo

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}t}\hat{\varphi}(\xi). \tag{3.6}$$

Antitrasformando quanto ottenuto in (3.6) si ha:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}(e^{-\frac{\xi^2}{2}t}\hat{\varphi}(\xi))\ d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} d\xi dy\ e^{i\xi x} e^{-\frac{\xi^2}{2}t} e^{-iy\xi}\varphi(y) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} d\xi dy\ e^{i\xi(x-y)} e^{-\frac{\xi^2}{2}t}\varphi(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-y)} e^{-\frac{\xi^2}{2}t}\ d\xi \right] \varphi(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t, x-y)\varphi(y)\ dy. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Poniamo ora $z := x - y$. La funzione $H(t,z)$ viene detta **nucleo del calore** e il suo valore preciso risulta essere

$$H(t,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}},$$

per cui la soluzione finale dell'equazione del calore è

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \varphi(y)\ dy. \tag{3.8}$$

Come abbiamo accennato all'inizio, tutto questo vale *se* possiamo applicare la Trasformata di Fourier. Quali sono quindi le ipotesi necessarie sulla funzione f affinché ciò valga?

Per poter rispondere, occorre osservare i seguenti punti:

a) $H(t,z) > 0$ per ogni t, z;

b) $H(t,z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$;

c) $H(t,z) = H(t,-z)$, ovvero la funzione H è simmetrica nella variabile z;

d) $\int_{-\infty}^{\infty} H(t, x-y)\ dy = 1$;

e) Per $t > 0$ vale che $\partial_t H(t, x-y) = \partial^2_{xx} H(t, x-y)$.

Il punto alla lettera *e)* ci dice che la soluzione del problema è definita per ogni $t > 0$. A questo punto l'unica cosa da far vedere è che sia possibile scambiare derivate e integrali, ovvero:

$$\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} H(t, x-y)\varphi(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x[H(t, x-y)]\varphi(y)\ dy.$$

Aggiungiamo dunque una prima ipotesi al dato iniziale ed assumiamo che $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Definiamo quindi

$$M := \|\varphi\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x) = \inf\{M : |\varphi(x)| < M\ q.o.\} < \infty.$$

A questo punto notiamo che

$$|\partial_x H(t, x-y)\varphi(y)| \le M|\partial_x H(t, x-y)| = M\left|\partial_x \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right| =$$
$$= \frac{M}{\sqrt{2\pi t}}\left|e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\left(-\frac{(x-y)}{t}\right)\right| = \frac{M(x-y)}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

Se chiamiamo $F(x) := \frac{(x-y)}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$, abbiamo ottenuto che

$$|\partial_x H(t, x-y)\varphi(y)| \le M \cdot F(x).$$

Poiché $F \in L^1(\mathbb{R})$, segue che lo scambio tra derivata ed integrale è possibile. Non resta che far vedere che la soluzione risolve il problema in (3.5), ovvero che

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \varphi(x)$$

Sostituendo il valore ottenuto per $u(t,x)$ e operando il cambio di variabile $y = \xi\sqrt{2t} + x$ otteniamo

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\varphi(\xi\sqrt{2t} + x)\ d\xi.$$

Per far vedere che il risultato è $\varphi(x)$ procedo come segue:

$$|u(t,x) - \varphi(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi\sqrt{2t} + x)\ d\xi - \varphi(x)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}|\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)|\ d\xi.$$

Scriviamo l'ultimo integrale come somma dei tre seguenti integrali:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\infty}^{-N} e^{-\xi^2}|\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)|\ d\xi + \int_{-N}^{N} e^{-\xi^2}|\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)|\ d\xi +$$
$$\int_{N}^{\infty} e^{-\xi^2}|\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)|\ d\xi).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ ed aggiungiamo la continuità come nuova ipotesi su φ. Essendo già $L^\infty(\mathbb{R})$ abbiamo che questa è uniformemente continua, ovvero

$$\exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : |\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ \sqrt{2t} < \delta(\varepsilon),$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-\xi^2} |\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)|\ d\xi < 2N\varepsilon.$$

Per quanto invece riguarda le code abbiamo che

$$\int_N^\infty e^{-\xi^2} |\varphi(\xi\sqrt{2t} + x) - \varphi(x)|\ d\xi \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^\infty e^{-\xi^2}\ d\xi = \frac{2M}{N\sqrt{\pi}} e^{-N^2} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Con l'altra coda il procedimento è analogo. Abbiamo dunque ottenuto che

$$|u(t,x) - \varphi(x)| < 3\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad u(t,x) \xrightarrow{t\to 0^+} 0.$$

A questo punto possiamo enunciare il seguente:

Teorema 3.2.1 (Esistenza della soluzione all'equazione del calore). *Data $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ e continua, il problema (3.5) ammette una soluzione pari a*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \varphi(y)\ dy.$$

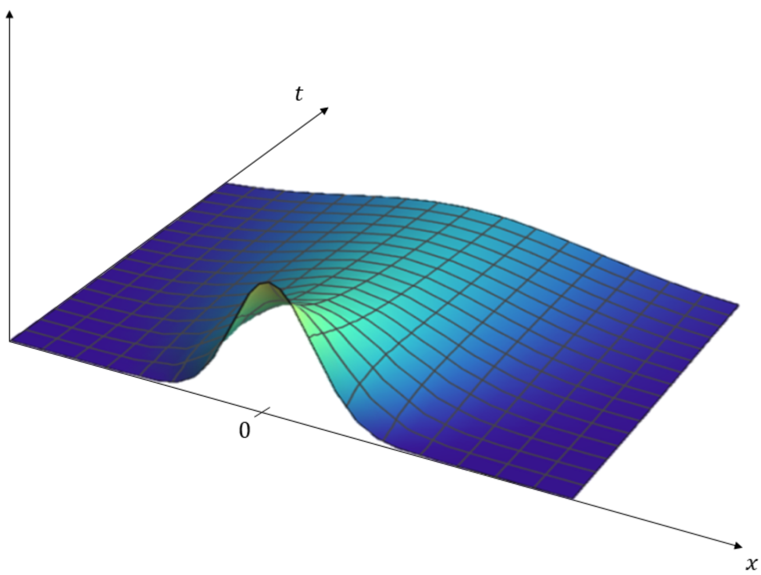


Figura 3.1: Un modo per rappresentare l'evoluzione del calore è dato da un grafico in 3 dimensioni, dove sul piano xy viene rappresentato il dato iniziale (che per questo esempio corrisponde alla funzione $\varphi(x) = e^{-x^2}$) e lungo l'asse z viene rappresentata l'evoluzione del dato iniziale al passare del tempo. Ciò che si nota è che la situazione di partenza presenta una funzione con una certa forma la quale via via tende ad "allisciarsi" sempre di più con lo scorrere del tempo, fino a tendere ad una superficie piana giacente sul piano xz.

Appendice A

Misura di Lebesgue

Per poter parlare della misura di Lebesgue occorre dapprima dare alcune definizioni preliminari riguardo agli spazi di misura.

Definizione A.0.1.
- Una collezione $\mathfrak{M}$ di sottoinsiemi di una insieme X si dice essere una **σ-algebra in** X se gode delle seguenti proprietà:
  - $X \in \mathfrak{M}$;
  - Se $E \in \mathfrak{M}$, allora $E^c \in \mathfrak{M}$, dove $E^c := X \setminus E$;
  - Data una collezione $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$, allora l'insieme $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}$. In altre parole, $\mathfrak{M}$ è chiuso rispetto alle unioni numerabili.
- La più piccola σ-algebra su X contenente tutti gli aperti dell'insieme$X$ stesso, si chiama **σ-algebra dei Boreliani** e si denota con $\mathcal{B}$;
- Una **misura positiva** è una funzione

$$\begin{array}{cccc} \mu\colon & \mathfrak{M} & \to & [0,\infty] \\ & E & \mapsto & \mu(E) \end{array} \tag{A.1}$$

  che gode della **σ-additività**, ovvero se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una collezione numerabile di insiemi in $\mathfrak{M}$, vale che

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{A.2}$$

- Uno **spazio di misura** è una terna $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ dove X è un insieme, $\mathfrak{M}$ la σ-algebra su di esso definita e μ una misura positiva definita su $\mathfrak{M}$.

Teorema A.0.2. *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\mathfrak{M}^*$ la collezione di tutti gli insiemi $E \subseteq X$ per cui esistono due insiemi $A, B \in \mathfrak{M}$ tali che $A \subseteq E \subseteq B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$. Definiamo $\mu(E) := \mu(A)$. La collezione $\mathfrak{M}^*$ è una σ-algebra e μ è una misura su $\mathfrak{M}^*$.*

Definizione A.0.3. L'estensione di una misura μ alla σ-algebra $\mathfrak{M}^*$ del teorema (A.0.2) è chiamata **misura completa**, in quanto rende misurabili anche gli insiemi di misura nulla.

Concluso questo cappello introduttivosugli spazi di misura, possiamo dedicarci alla misura di Lebesgue, partendo anche qui da alcune definizioni preliminari.

Definizione A.0.4. Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo n-dimensionale.

- Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo il **traslato di** E **tramite** x come l'insieme
$$E + x := \{y + x : y \in E\}; \tag{A.3}$$
- Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sono punti di $\mathbb{R}^n$ fissati, definiamo come n**-cella** il seguente insieme:
$$W := \{x : \alpha_i < x_i < \beta_i\} \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \dots, n. \tag{A.4}$$
La definizione rimane la stessa anche rimpiazzando alcuni dei "$<$" con dei "$\leq$". Il **volume di** W è definito come
$$\mathrm{vol}(W) = \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i); \tag{A.5}$$
- Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia $\delta > 0$. Definiamo come δ**-scatola con angolo in** α l'insieme
$$Q(\alpha, \delta) = \{x : \alpha_i < x_i < \alpha_i + \delta\} \qquad i = 1, \dots, n; \tag{A.6}$$
- Indicando con $x_1, \dots, x_n$ le coordinate di un generico punto $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo infine l'insieme
$$P_k := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \text{ è multiplo di } 2^{-k},\ k \in \mathbb{N}\}, \tag{A.7}$$
e l'insieme
$$\Omega_k := \{Q(x, 2^{-k}) : x \in P_k\}. \tag{A.8}$$

Osservazione A.0.5. *Gli insiemi definiti nella definizione (A.0.4) godono delle seguenti proprietà:*

a) Per k fissato, ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ giace in un solo membro di Ω_k;

b) Se $Q' \in \Omega_k$ e $Q'' \in \Omega_r$, e se $r < k$, allora $Q' \subseteq Q''$ oppure $Q' \cap Q'' = \emptyset$;

c) Se $Q \in \Omega_r$, allora $\mathrm{vol}(Q) = 2^{-rn}$. Inoltre se $k > r$, l'insieme P_k ha esattamente $2^{(k-r)n}$ punti in Q;

d) Ogni insieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di scatole disgiunte appartenenti a $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$.

A partire da queste definizioni, ed utilizzando l'osservazione (A.0.5) si dimostra il seguente teorema, il quale fornisce le giuste proprietà per definire la *misura di Lebesgue.*

Teorema A.0.6. *Data $\mathfrak{M}$ σ-algebra su $\mathbb{R}^n$, è possibile definire una misura positiva completa m con le seguenti proprietà:*

i) $m(W) = \mathrm{vol}(W)$ per ogni n-cella W;

ii) $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{M}$, ovvero $\mathfrak{M}$ contiene i Boreliani di $\mathbb{R}^n$. Più precisamente, $E \in \mathfrak{M}$ se e soltanto se esistono $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $A \subseteq E \subseteq B$, dove A è F_σ, B è G_δ[1], e $m(B \setminus A) = 0$. Vale inoltre che m è misura regolare;

[1] Un F_σ è un'unione numerabile di chiusi mentre un G_δ è un'intersezione numerabile di aperti.

iii) *m è invariante per traslazioni, ovvero*

$$m(E+x) = m(E) \qquad \forall\ E \in \mathfrak{M},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n;$$

iv) *Sia μ una qualsiasi misura positiva di Borel su $\mathbb{R}^n$ invariante per traslazioni tale che $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto K. Allora esiste una costante c tale che $\mu(E) = cm(E)$ per ogni boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^n$;*

v) *Ad ogni trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in se stesso corrisponde un numero reale $\Delta(T)$ tale che*

$$m(T(E)) = \Delta(T)m(E) \qquad \forall\ E \in \mathfrak{M}.$$

In particolare $m(T(E)) = m(E)$ se T è una rotazione.

Definizione A.0.7. La misura m ottenuta dal teorema (A.0.6) è definita come **misura di Lebesgue su** $\mathbb{R}^n$ e i membri di $\mathfrak{M}$ sono detti **insiemi Lebesgue-misurabili**.

Osservazione A.0.8. *Sia f una funzione continua su $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, allora l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue su I coincidono, ovvero*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_I f\ dm.$$

Appendice B

Spazi di Hilbert

Definizione B.0.1 (**Spazio unitario**). Uno spazio vettoriale complesso H si dice **spazio unitario** se ad ogni coppia di vettori $x, y \in H$ è associato un numero complesso $(x, y) \in \mathbb{C}$, chiamato **prodotto interno**, tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

a) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;

b) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, dove $x, y, z \in H$;

c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, dove $x, y \in H$ e $\alpha \in \mathbb{C}$;

d) $(x, x) \geq 0$ per ogni $x \in H$;

e) $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Osservazione B.0.2. *Alcune conseguenze subito deducibili da questa definizione sono le seguenti:*

- $(0, y) = (y, 0) = 0$ *per ogni* $y \in H$*;*
- $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{C}$*;*
- *La mappa* $x \mapsto (x, y)$ *è un funzionale lineare su* H *per ogni* $y \in H$*;*
- *Vale anche la seconda legge distributiva, ovvero*

$$(z, x + y) = (z, x) + (z, y) \qquad \forall\ x, y, z \in H.$$

Definizione B.0.3 (**Norma**). Dato un vettore $x \in H$ spazio unitario, la **norma di** x è definita come

$$\|x\| = \left| \sqrt{(x, x)} \right|.$$

Due importanti proprietà che valgono negli spazi unitari sono le seguenti:

Teorema B.0.4 (**Disuguaglianza di Schwarz**). *Per ogni* $x, y \in H$ *vale che*

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Teorema B.0.5 (**Disuguaglianza triangolare**). *Per ogni* $x, y \in H$ *vale che*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Osservazione B.0.6. *Qualora ci fosse il segno negativo la disuguaglianza triangolare si rovescia, ovvero*

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Definizione B.0.7 (Distanza). Dati due vettori $x, y \in H$, con H spazio unitario, definiamo la **distanza tra x e y** come

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

A questo punto H è diventato uno spazio metrico e normato.

Definizione B.0.8 (Spazio di Hilbert). Uno spazio unitario H si definisce **spazio di Hilbert** se è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto hermitiano.

Esempio B.0.9. *Tutti i seguenti sono spazi di Hilbert:*

- *Lo spazio $\mathbb{C}^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è uno spazio di Hilbert con prodotto interno definito come*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n \text{ e } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)).$$

- *Lo spazio $L^2(\mu)$, con μ misura positiva, è uno spazio di Hilbert con prodotto interno definito come*

$$(f, g) = \int_X f\bar{g}\ d\mu.$$

  Questo è l'unico spazio L^p che sia anche uno spazio di Hilbert.

Teorema B.0.10. *Per ogni $y \in H$ spazio di Hilbert fissato, le mappe*

$$x \mapsto (x, y) \qquad \text{e} \qquad x \mapsto \|x\|$$

sono funzioni continue su H.

Teorema B.0.11 (Legge del parallelogramma). *Dato H spazio di Hilbert, per ogni $x, y \in H$ vale che*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Definizione B.0.12 (Insieme ortonormale). Un insieme di vettori u_α, con $\alpha \in A$ insieme di indici, si dice **ortonormale** se $(u_\alpha, u_\beta) = 0$ per ogni $\alpha \neq \beta \in A$ e se $\|u_\alpha\| = 1$ per ogni $\alpha \in A$. Un tale insieme si dice **massimale** se nessun vettore di H può essere aggiunto all'insieme in modo tale che che esso sia ancora ortonormale.

Osservazione B.0.13. *Se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ è un insieme ortonormale di H, ad ogni vettore $x \in H$ possiamo associare una funzione complessa $\hat{x}$, definita sull'insieme di indici A, tale che*

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) \qquad (\alpha \in A).$$

Teorema B.0.14. *Uno spazio di Hilbert ammette sempre un insieme ortonormale massimale di vettori.*

Lemma B.0.15. *Supponiamo che:*

1. X *e* Y *siano spazi metrici, con* X *completo;*
2. $f \colon X \to Y$ *sia continua;*
3. X *abbia un sottoinsieme denso* X_0 *su qui* f *sia un'isometria;*
4. $f(X_0)$ *sia denso in* Y.

Allora f *è un'isometria di* X *su* Y.

Teorema B.0.16. *Sia* $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *un insieme ortonormale in* H. *Ciascuna delle seguenti condizioni su* $\{u_\alpha\}$ *implica le altre tre:*

1. $\{u_\alpha\}$ *è un insieme ortonormale massimale in* H*;*
2. *L'insieme* P *di tutte le combinazioni lineari finite di membri di* $\{u_\alpha\}$ *è denso in* H*;*
3. *L'uguaglianza*
$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$$
vale per ogni $x \in H$*;*
4. *L'uguaglianza*
$$\sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)} = (x, y) \qquad \text{(Identità di Parseval)}$$
vale per ogni $x \in H$ *e per ogni* $y \in H$.

Teorema B.0.17. *Due spazi di Hilbert i cui insiemi ortonormali massimali hanno stessa cardinalità sono isomorfi tra loro.*

Appendice C

Serie di Laurent e Teorema dei Residui

Definizione C.0.1 (**Serie di Laurent**). Una serie del tipo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \tag{C.1}$$

viene detta **Serie di Laurent**.
Definiamo ora

$$f^+(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad \text{e} \qquad f^-(z) := \sum_{n<0} a_n z^n. \tag{C.2}$$

Una Serie di Laurent si dice che **converge assolutamente** o **converge uniformemente** se le due funzioni definite in (C.2) convergono, rispettivamente, assolutamente o uniformemente su Ω. In tal caso si ha

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

Teorema C.0.2. *Siano $r, R > 0$ due reali positivi tali che $r < R$. Sia C la corona circolare comprendente tutti i numeri complessi tra la circonferenza di raggio r e quella di raggio R, ovvero*

$$C := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}.$$

Sia ora f una funzione olomorfa su C e siano s, S tali che

$$r < s < S < R.$$

Allora f ha un'espansione di Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

che converge assolutamente e uniformemente per tutti i valori z tali che $s \leq |z| \leq S$.
Vale inoltre che, definendo come γ_r e γ_R i cerchi, rispettivamente, di raggio r ed R, allora i coefficienti a_n si ottengono come segue:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta & n \geq 0 \\ a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta & n < 0 \end{cases}$$

Teorema C.0.3. *Sia* $f\colon B_r(z_0)\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ *una funzione olomorfa e sia*

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n$$

la sua Serie di Laurent. Vi sono allora tre casi possibili:

1. *f è limitata in $B_r(z_0)$. In tal caso non esistono i termini negativi nella Serie di Laurent. La funzione può essere estesa ad una funzione olomorfa su tutta la palla e z_0 prende il nome di* ***singolarità rimuovibile****;*

2. $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$*. In tal caso esistono finiti termini negativi nella Serie di Laurent e z_0 prende il nome di* ***polo****;*

3. *f è non limitata in z_0 e non esiste* $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$*. In tal caso esistono infiniti termini negativi nella Serie di Laurent e z_0 prende il nome di* ***singolarità essenziale****.*

Definizione C.0.4 (**Funzione meromorfa**)**.** Una funzione $f\colon\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, con Ω aperto, si dice essere **meromorfa** se è olomorfa su Ω tranne che per un numero finito di punti $\{z_1,\dots,z_n\}$ nei quali la funzione ha dei poli.

Definizione C.0.5 (**Residuo**)**.** Sia

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n$$

una funzione dotata di una espansione di Laurent nel punto z_0. Si definisce **Residuo di f in z_0** il coefficiente

$$a_{-1}:=\mathrm{Res}_{z_0}f. \tag{C.3}$$

Teorema C.0.6 (**dei Residui**)**.** *Sia $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ un aperto e siano $a_1\dots,a_n\in\Omega$. Sia $f\colon\Omega\setminus\{a_1,\dots a_n\}\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia infine γ un ciclo in $\Omega\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ tale che* $\mathrm{Ind}_\alpha(\gamma)=0$[1] *per ogni $\alpha\notin\Omega$. Allora vale che*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{a_i}f\cdot\mathrm{Ind}_{a_i}(\gamma) \tag{C.4}$$

[1]Si definisce **Indice di una curva γ rispetto ad un punto z_0** il valore

$$\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}\qquad(z\in\Omega).$$

Ringraziamenti

Sebbene la mia tesi finisca qui, non posso permettermi di concludere questo elaborato senza ringraziare alcune persone che si sono rivelate determinanti, in questi tre anni, nel raggiungimento di questo traguardo, il primo di tanti ai quali dovrò arrivare per coronare il mio sogno.

Ringrazio la *Professoressa Michela Procesi*, mia relatrice per questa tesi di laurea triennale. Vorrei ringraziarla per aver accettato di accompagnarmi in questo percorso e per avermi aiutato a preparare questo elaborato nel migliore dei modi, mostrando una disponibilità ed una gentilezza che hanno reso il tutto ancora più bello. Vorrei ringraziarla per la passione che mette nel suo modo di insegnare e di spiegare, capace non solo di far capire gli argomenti che espone in maniera chiara, ma anche di farli apprezzare nella loro interezza, trovando sempre il modo di renderli semplici da comprendere senza tralasciare alcun particolare. La ringrazio per tutti i consigli che mi ha dato su come affrontare meglio la mia vita universitaria e, infine, la ringrazio per avermi fatto entrare nel gruppo dei "Dinamici a Roma Tre", i cui seminari mi hanno dato modo di vedere la matematica sotto un'ottica nuova ed affascinante.

Ringrazio la *Professoressa Livia Corsi.* Vorrei ringraziarla per la sua disponibilità e per avermi dato molti consigli che si sono rivelati fondamentali per la mia crescita sia accademica che personale.

Ringrazio tutti i membri del gruppo dei *Dinamici a Roma Tre.* Vi ringrazio perché, con i vostri seminari, mi avete aiutato a scrivere questa tesi e mi avete fatto vedere la materia che amo in un nuovo modo, insegnandomi che per quanto grande possa essere la conoscenza di chiunque in questo ambito, ci sarà sempre qualcosa di nuovo da scoprire.

Ringrazio *Elisabetta* ed *Igino*, i miei genitori. Non sono sempre stato in grado di capire ed accettare ciò che facevate per me, tuttavia, e lo riconosco solo ora, avete fatto tutto il possibile per starmi vicino e supportarmi, gioendo dei miei successi ed aiutandomi a trovare risposte sul perché dei miei insuccessi, spingendomi sempre a non lamentarmi ma a reagire. Avete sempre creduto in me, e questo traguardo lo devo a voi più di quanto avrei immaginato. Grazie di tutto!

Ringrazio *Silvano*, mio zio. Ti ringrazio per esserti sempre interessato al mio percorso e per essere sempre stato pronto a consigliarmi nelle situazioni più critiche.

Ringrazio *Angela* ed *Anna Maria*, amiche di famiglia. La vostra professione di insegnanti ha fatto sì che buona parte dei miei successi in questi tre anni fosse dovuta ai vostri consigli ed al vostro aiuto, tra i più validi che potessi ricevere.

Ringrazio *Michela*. Ti ringrazio per tutto ciò che hai fatto e che stai continuando a fare per me. Mi sei sempre rimasta accanto in questi anni, ed in ogni momento, anche il più buio in cui sembrava non esserci più nulla ad impedirmi di rinunciare, ho sempre saputo di poter contare su di te. Non deve essere stato facile da parte tua supportarmi e, soprattutto, sopportarmi per tutto questo tempo, lo so... eppure l'hai fatto senza mai smettere, facendomi credere nelle mie capacità e trovando sempre il lato positivo di ogni passo falso che commettevo. Conoscerti è stata una delle cose migliori che potesse capitarmi. Grazie di tutto!

Ringrazio *Chiara* e *Massimiliano*. Solitamente si dice che un vero amico lo si riconosce nel momento del bisogno, tuttavia, nel vostro caso, questa frase risulta incompleta. Vi siete fatti riconoscere nel momento del bisogno, nel momento di sconforto, nel momento di gioia, nel momento di solitudine e nel momento di festa. C'eravate prima della pandemia, quando tutto andava bene, siete rimasti durante, quando ogni rapporto interpersonale sembrava essere stato irreversibilmente minato, e non siete andati via neppure dopo, quando la situazione ha cominciato a tornare alla normalità. Forse è proprio questo il punto: i veri amici si riconoscono nel momento del bisogno, ma i "migliori amici", come lo siete voi, si riconoscono in ogni momento. Ogni confidenza, ogni riflessione ed ogni singolo momento condiviso con voi due ha contribuito a darmi la forza di fare tutto. Grazie!

Ringrazio *Cristina*. Ti ringrazio in qualità di amico e collega. Ti ringrazio per i momenti di studio condivisi e per tutti i consigli, universitari e non, che non hai mai esitato a darmi e che, posso assicurarti, sono sempre serviti a molto.

Ringrazio il gruppo di *Ubuntu*. Siete i primi colleghi con cui ho stretto un legame di amicizia e vi ringrazio per aver reso, con la vostra simpatia, più piacevole e più leggero il tempo passato in facoltà.

Ringrazio *Gian Marco* e *Pietro*. Parlare di matematica con voi è stato tanto stimolante da nutrire continuamente la mia curiosità e la mia volontà di espandere la mia conoscenza in questo ambito.

Ringrazio *Shulamit*. Non scriverò in cosa il tuo contributo per la mia laurea è stato determinante perché dovrei raddoppiare il numero di pagine della mia tesi. Mi limiterò perciò a ringraziarti per tutte le volte in cui ti ho chiesto delucidazioni su un qualsiasi argomento che riguardava l'università ed hai prontamente risposto. Sappi che sei stata un punto di riferimento importantissimo all'interno della facoltà.

Ringrazio l'*Oratorio di San Marco* e, in particolare, ringrazio *don Andrea* e gli animatori *Roberto*, *Martina* e *Maria Francesca*, con i quali collaboro nel guidare il gruppo apostolico *ξένος*. Siete una splendida realtà, e la vostra disponibilità nel dare senza pretendere nulla in cambio è una perpetua fonte di ispirazione.

Ringrazio inoltre tutti coloro che mi sono rimasti vicino e che, in maniera più o meno diretta, hanno contribuito a farmi andare avanti in questo percorso di studi, anche solo attraverso la disponibilità di una chiacchierata nel momento giusto, ovvero *Gabriele*, *Luca*, *Marco*, *Sara*, *Clizia*, *Eleonora*, *Gioele* e *Benedetta*.

Ringrazio infine, in maniera speciale, due professoresse del liceo. Comincio ringraziando la *Professoressa Stefania Castaldo*, professoressa di matematica e fisica. La ringrazio perché mi ha insegnato ad amare questa materia ed a vedere ogni difficoltà che in essa si incontra non come un ostacolo, bensì come l'opportunità di risolvere un problema il cui risultato può portare a fatti incredibili, rendendo il tutto ancora più soddisfacente. La ringrazio inoltre per l'infinita disponibilità che ha mostrato nel corso dei cinque anni e per tutto l'aiuto che ha dato a me (e a tutta la mia classe) nella preparazione della temutissima seconda prova dell'esame di maturità.

Concludo questa sezione ringraziando la *Professoressa Ida Gaveglia*. Ovunque lei sia, professoressa, sappia che non esistono parole per esprimere l'importanza che lei ha avuto nella mia crescita. Non solo era una bravissima insegnante, ma era anche capace di essere un esempio di correttezza ed onestà e, al tempo stesso, di disponibilità nell'aiutare i suoi studenti. Ha lasciato un ricordo indelebile che, nonostante non sia più fisicamente tra noi, non si dissolverà mai.

Bibliografia

[1] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1987.

[2] Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, Inc., 1980.

[3] Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, Inc., 1975.

[4] Walter Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.

[5] Serge Lang, *Complex Analysis*, Springer, 1999.

[6] Jean Baptiste Joseph Fourier, *Analytical Theory oh Heat*, English Edition translated by Alexander Freeman, Cambridge, 1878.