UNIVERSITA' DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

FUNZIONI PERIODICHE, SERIE DI FOURIER E APPLICAZIONI

Candidato
Nicoletta Camerini
Matricola: 527578

Relatore
Prof.ssa Michela Procesi

Anno Accademico 2020/2021
27 Gennaio 2022

Indice

Introduzione

Lo studio delle funzioni periodiche tramite gli sviluppi in serie nasce agli inzi dell'ottocento quando Fourier lo introdusse per studiare la conduzione del calore nel lavoro *"Théorie analytique de la chaleur"*.
Egli ipotizzò che la distribuzione del calore potesse essere scomposta in una somma di sinusoidi, ciascuna con ampiezza, periodo e fase diverse, dette armoniche. Via via che il calore si propagava le armoniche di frequenza maggiore (armoniche superiori) tendevano a smorzarsi più rapidamente rispetto a quelle di frequenza minore, così da formare una funzione sempre più regolare e continua. Fourier intuì dunque che le sinusoidi non sono estranee alla soluzione del problema del calore, anzi, sono i mattoni stessi della soluzione, che sarà una combinazione lineare, eventualmente infinita, di funzioni sinusoidali.

Fourier cercò di dare una forma matematica a queste sue ipotesi, affermando che una funzione periodica $f(t)$ di periodo T, frequenza 1/T e pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$ può essere espressa come sommatoria di seni e coseni, e dimostrando le sue affermazioni in vari casi particolari. La nota formula:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos t + b_2 \sin t) + \\ + \cdots + (a_n \cos t + b_n \sin t) + \ldots$$

è lo sviluppo in serie di Fourier della funzione f e i numeri $a_0, a_1, b_1,$ $, a_2, b_2, \ldots$ sono i cosiddetti coefficienti di Fourier.

La novità dei suoi metodi lasciò perplessi, quanto meno inizialmente, i più importanti matematici francesi suoi contemporanei, da Lagrange a Laplace, a Poisson. Il loro scetticismo è comprensibile in quanto egli affermava in sostanza, che una funzione discontinua potesse essere ottenuta come somma di funzioni continue, di sinusoidi appunto. La scoperta coinvolse i maggiori matematici della prima metà dell'Ottocento e si fece strada con non poche difficoltà; ad esempio, Lagrange nel 1807 non permise la pubblicazione del lavoro originario.

Questa tesi vuole presentare le serie di Fourier e alcune loro applicazioni. Nel primo capitolo introduciamo le funzioni periodiche in generale, per poi soffermarci su quelle di periodo 2π (la generalizzazione a funzioni di periodo qualsiasi non verrà trattata) e sulle funzioni $\sin x$ e $\cos x$, che occupano un posto centrale in questa teoria. Si passa poi a considerare loro combinazioni lineari, ossia i polinomi trigonometrici.
L'idea è quella di approssimare funzioni 2π-periodiche con polinomi trigonometrici, fatto di cui abbiamo la sicurezza grazie al teorema di Stone-Weiestrass. Risulta naturale a questo punto considerare le serie trigonometriche come il limite di polinomi trigonometrici. Sotto opportune ipotesi sui coefficienti diamo la definizione di serie di Fourier ed enunciamo la proposizione 1.2.1 che riguarda la regolarità di una funzione $f(x)$ espressa tramite una serie trigonometrica.
Introduciamo la rappresentazione complessa della serie di Fourier, che utilizzeremo sistematicamente in questa tesi e la conseguente riformulazione della suddetta proposizione. A questo punto facciamo il ragionamento inverso: data f scritta come serie, determinare i coefficienti di Fourier complessi e reali. Sotto opportune ipotesi su f deduciamo alcune proprietà fondamentali sui coefficienti(disuguaglianza di Bessel, lemma di Riemann-Lebesgue, etc.).

Nel secondo capitolo trattiamo la convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier alla funzione f. Per farlo è necessario ricordare le nozioni di convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni. Sotto delle basse ipotesi di regolarità su f possiamo comunque dire che la serie di Fourier converge a $f(x)$ (criterio di Dini). Il vantaggio delle serie di Fourier, rispetto ad altre serie, quali ad esempio le serie di Taylor, è quindi che approssimano bene anche funzioni poco regolari. Giunti a questo punto possiamo trattare il legame che c'è fra regolarità di funzioni periodiche e il decadimento dei coefficienti di Fourier.

Il terzo ed ultimo capitolo è dedicato ad alcune applicazioni delle serie di Fourier: la risoluzione di equazioni differenziali a coefficienti costanti, lo studio della funzione di Weiestrass e, infine, qualche accenno all'analisi armonica di un segnale periodico.

Capitolo 1

Serie di Fourier

Nelle scienze naturali e tecniche si ha spesso a che fare con processi che ricorrono periodicamente quali, per esempio, il moto periodico dei corpi celesti e delle particelle elementari, le vibrazioni acustiche ed elettromagnetiche, il moto oscillatorio e rotatorio di varie parti delle macchine e dei congegni etc... Tali processi hanno sempre attirato e incuriosito l'attenzione dei fisici e dei matematici, proprio per questo loro "eterno ripetersi", che permette di conoscere (in ogni istante) quella che è stata la loro evoluzione passata e quella che sarà la loro evoluzione futura.

Dal punto di vista matematico, tutti i processi del genere sono descritti da funzioni periodiche.

1.1 Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici

Definizione 1.1.1. Una funzione f di variabile reale si dice **periodica di periodo** $T > 0$ (o anche T-periodica) se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si osservi che se f è periodica di periodo T, allora f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si dice che T è il periodo minimo se non esiste alcun periodo $T' < T$.

Esempi importanti di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$, e più in generale, le funzioni $\sin kx$, $\cos kx$ con $k = 1, 2, \ldots$ Così le loro combinazioni lineari, ossia i **polinomi trigonometrici**

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}; \tag{1.1}$$

che pure hanno periodo 2π, e sono indefinitivamente derivabili.

Osserviamo che se f è una funzione T-*periodica*, la funzione

$$g(x) = f(x\frac{T}{2\pi})$$

è 2π-*periodica.* Infatti

$$g(x + 2\pi) = f(\frac{(x + 2\pi)T}{2\pi}) = f(\frac{Tx}{2\pi} + T) = f(\frac{Tx}{2\pi}) = g(x).$$

Più in generale se f è una funzione periodica di periodo $T > 0$ allora la funzione $g(x) = f(x\frac{T}{S})$ è periodica di periodo $S > 0$. Viceversa ogni funzione g, periodica di periodo S può essere ottenuta dalla funzione $f(x) = g(\frac{S}{T}x)$.
In altre parole tutte le funzioni periodiche di periodo T possono essere facilmente ottenute con un semplice cambiamento di scala dalle funzioni periodiche di periodo S, con S fissato.

Assumiamo d'ora in poi che f sia una funzione 2π-periodica (si può quindi estendere facilmente la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi).

L'obiettivo che ci poniamo è quello di approssimare funzioni *continue* e 2π-*periodiche* con polinomi trigonometrici. Ciò è abbastanza naturale e il fatto che una tale approssimazione sia sempre possibile, ce lo assicura il seguente teorema

Teorema 1.1.1 (**Teorema di Stone-Weierstrass**). *Sia* $A[X]$ *un'algebra di funzioni definite su un insieme compatto* X*, cioè tale che se* $f, g \in A[X]$ *anche* $fg \in A[X]$ *e* $\alpha f + \beta g \in A[X]$ *per ogni coppia di numeri reali* α *e* β*.*
Supponiamo che l'algebra $A[X]$*:*

- *contenga le costanti*
- *separi i punti di* X *(cioè* $\forall x, y \in X, \exists f \in A[X]$ *tale che* $f(x) \neq f(y)$*)*

Allora l'algebra $A[X]$ *è densa in* $C^0(X)$ *nella norma lagrangiana (*$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$*).*

In altre parole per ogni funzione $f(x)$, continua su X, esiste una successione di elementi dell'algebra che converge uniformemente ad $f(x)$.
Questo teorema non ci da una maniera algoritmica su come approssimare, ci dice solo che una approssimazione esiste.

Per quanto riguarda i polinomi trigonometrici, vale il seguente teorema:

Teorema 1.1.2 (**Teorema di Weiestrass**). *I polinomi trigonometrici*

$$S_n(x) = a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx \quad (1.2)$$

sono densi nell'insieme $C_{2\pi}$ *delle funzioni continue e periodiche di periodo* 2π*.*

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare la tesi sull'intervallo di periodicità $[0, 2\pi)$. La dimostrazione non può discendere direttamente dal precedente teorema di Stone-Weiestrass in quanto, pur essendo i polinomi trigonometrici una algebra, essa non separa la coppia di punti $x = 0$ e $y = 2\pi$.

D'altra parte escludendo un estremo, l'intervallo non è più compatto. L'ostacolo si può aggirare considerando la seguente rappresentazione parametrica del cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ v = \cos x \end{cases}$$

ed osservando che ogni polinomio trigonometrico $S_n(x)$ in $[0, 2\pi)$ può essere rappresentato con un polinomio algebrico di grado n nelle due variabili $\sin x$ e $\cos x$ (questo di dimostra con la formula di Eulero) e quindi nelle variabili u e v ristrette al cerchio.
Tale algebra separa i punti del cerchio e, essendo quest'ultimo compatto in $\mathbb{R}^2$, tutte le ipotesi del teorema di Stone-W. sono verificate. □

Tale teorema garantisce, quindi, che l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nell'insieme delle funzioni continue e 2π-periodiche, cioè che, per ogni funzione continua e 2π-periodica, esiste sempre un polinomio trigonometrico che la approssima con errore arbitrariamente piccolo.

1.2 Serie trigonometriche e serie di Fourier

A questo punto, consideriamo i limiti di polinomi trigonometrici e diamo la seguente

Definizione 1.2.1. Si dice **serie trigonometrica** l'espressione del polinomio trigonometrico dove al posto della somma finita ci sia la serie

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.3}$$

Come per ogni serie di funzioni, non è detto che converga né, in caso affermativo, che la sua somma sia una funzione con buone proprietà.

L'unica cosa che per ora è ovvia è che, se una serie trigonometrica converge, la sua somma è periodica di periodo 2π.
Osserviamo però che se gli a_n e b_n tendono a zero così velocemente che le serie $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$ convergono, allora per il criterio del confronto si ha

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

e quindi la serie trigonometrica converge totalmente, e perciò converge assolutamente e uniformemente.

Definizione 1.2.2. sotto l'ipotesi precedente, ossia, $\sum |a_n| + |b_n| < \infty$, definiamo l'espressione

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1.4}$$

serie di Fourier.

Ora se stabiliamo come vanno a zero i coefficienti a_n e b_n possiamo garantire che la serie di Fourier (1.4) sia una funzione C^p_{per}, dove

$$C^p_{per} := \{f \in C^p(\mathbb{R}) : f(x + 2\pi) = f(x)\} \tag{1.5}$$

Proposizione 1.2.1. *Siano* $\{a_n\}_{n\geq 0}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ *due successioni di numeri reali tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^p < \infty. \tag{1.6}$$

allora, la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}$ *e definisce una funzione* $f \in C^p_{per}$.

Dimostrazione. Siano $u_0 \equiv \frac{a_0}{2}$ e $u_n \equiv a_n \cos nx + b_n \sin nx$, l'ipotesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^p < \infty,$$

è equivalente a dire che la serie delle derivate

$$\sum u_n^{(p)} = \sum \pm n^p (a_n \cos nx \pm b_n \sin nx),$$

converge totalmente in $\mathbb{R} \implies$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$, per il teorema di derivazione di serie (che afferma che: *dato E un insieme aperto e $u_n \in C^1(E)$, $n \geq 1$, se $\sum u_n$ converge puntualmente e $\sum u_n{}'$ converge uniformemente in E, allora $u = \sum u_n \in C^1(E)$ e $u' = \sum u_n{}'$*) si ha quindi che

$$S_N^{(p-1)} = \sum u_n^{(p-1)} \in C^1, \quad S_N^{(p)} = \sum u_n^{(p)}.$$

Ovviamente se vale 1.6 varrà anche che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^{p-1} < \infty,$$

da cui, ripetendo il ragionamento fatto per $k = p$, si ha che la serie delle derivate $\sum u_n^{(p-1)}$ converge totalmente in $\mathbb{R}$ e il teorema implica che

$$S_N^{(p-2)} = \sum u_n^{(p-2)} \in C^1, \quad S_N^{(p-1)} = \sum u_n^{(p-1)},$$

e così via... fino ad arrivare a $k = 0$, per cui, grazie a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty,$$

si ha

$$S_N = \sum u_n \in C^1, \quad (S_N)' = \sum (u_n)'.$$

In conclusione la serie $S_N = \sum u_n$ converge ad una funzione $f \in C^P(\mathbb{R})$.

La periodicità di f deriva dalla periodicità di s_N:

$$f(x+2\pi) = \lim_{N\to\infty} S_N(x+2\pi) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x).$$

$\square$

1.3 Rappresentazione complessa delle serie di Fourier

In alcuni casi è utile avere una formulazione leggermente diversa delle serie di Fourier, che fa uso delle funzioni esponenziali complesse $e^{\pm inx}$.
Grazie alle relazioni di Eulero

$$e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx, \tag{1.7}$$

si ha

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}, \tag{1.8}$$

quindi posto

$$c_0 := \frac{a_0}{2}; \quad c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} := \frac{a_n+ib_n}{2} \quad (\forall n \geq 1), \tag{1.9}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n}{2}(e^{inx}+e^{-inx}) - \frac{i}{2}b_n(e^{inx}-e^{-inx})) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} ((\frac{a_n - ib_n}{2})e^{inx} + (\frac{a_n+ib_n}{2})e^{-inx}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-inx} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{ikx} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{inx} \\
&= \sum_{n=-N, n\in\mathbb{Z}}^{N} c_n e^{inx}, \quad c_n \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Quindi la (1.1) assume la forma

$$S_N(x) = \sum_{n=-N, n\in\mathbb{Z}}^{N} c_n e^{inx} \tag{1.10}$$

Per passare dalla (1.8) alla (1.1), basta porre

$$a_n := c_n + c_{-n}; \quad b_n := i(c_n - c_{-n}). \tag{1.11}$$

Si osservi che il polinomio (1.1) è reale se e solo se, scritto nella forma (1.8), si ha

$$c_{-n} = \overline{c_n}. \tag{1.12}$$

La **rappresentazione complessa della serie di Fourier** (1.4) è dunque:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}. \tag{1.13}$$

Osservazione 1.3.1. (i) Si noti che per ogni coppia di numeri reali α e β si ha

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \le |\alpha| + |\beta| \le \sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \tag{1.14}$$

infatti, la prima disuguaglianza si verifica elevando al quadrato, e la seconda invece deriva dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
|\alpha| + |\beta| &= \alpha(\pm 1) + \beta(\pm 1) \\
&= |(\alpha, \beta)(\pm 1, \pm 1)| \\
&\leq |(\alpha, \beta)|\,|(\pm 1, \pm 1)| \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

(ii) Si noti anche che, se a_n, b_n e c_n sono legati dalle relazioni (1.9), (e $b_0 = 0$), si ha

$$
|c_n| = |c_{-n}| = \left| \frac{a_n \pm i b_n}{2} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \forall n \geq 0. \tag{1.15}
$$

Alla luce di quest'ultima osservazione la condizione (1.6) è equivalente a

$$
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|\,|n|^p < \infty. \tag{1.16}
$$

Per vederlo basta usare le relazioni in (i) e (ii).

Definendo ora

$$
w^{1,p} := \left\{ \{c_n\} \;\middle|\; c_{-n} = \overline{c_n}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|\,|n|^p < \infty \right\} \tag{1.17}
$$

e associando a questa sequenza $f = \mathscr{F}(\{c_n\})$, possiamo riformulare la proposizione 1.2.1 come segue

Proposizione 1.3.1. *Se* $f \in \mathscr{F}(w^{1,p}) \implies f \in C^p_{per}$.

Osservazione 1.3.2. La proposizione vuol dire, in particolare, che $\mathscr{F}(w^{1,p}) \subseteq C^p_{per}$.

In generale possiamo definire

$$
w^{q,p} := \left\{ \{c_n\} \;\middle|\; c_{-n} = \overline{c_n}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|c_n|\,|n|^p)^q < \infty \right\} \tag{1.18}
$$

che ci interesserà particolarmente nella prossima sezione, con $q = 2$.

1.4 Coefficienti di Fourier

Finora abbiamo preso in considerazione una funzione f identificata dai suoi coefficienti. Ci chiediamo ora: *possiamo fare il contrario? Data f, come possiamo esprimere i coefficienti in termini di f?* Le risposte sono contenute nella seguente

Proposizione 1.4.1. *Siano c_n, per $n \in \mathbb{Z}$, numeri complessi tali che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ e sia $f(x) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Allora*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{1.19}$$

Dalle relazioni 1.9 ne consegue che i numeri a_n e b_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad (n \geq 0) \tag{1.20}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad (n \geq 1). \tag{1.21}$$

Prima di dimostrare la proposizione vediamo che le funzioni esponenziali complesse e^{ikx} per $k \in \mathbb{Z}$ soddisfano le seguenti relazioni di ortogonalità, per $n, m \in \mathbb{Z}$:

Osservazione 1.4.1.

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 2\pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

Infatti dalle relazioni

$$\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

segue che

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx &= \int_0^{2\pi}\cos(n-m)x\,dx + i\int_0^{2\pi}\sin(n-m)x\,dx\\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m\\ 2\pi & \text{se } n = m.\end{cases}\end{aligned}$$

Dimostrazione. (della proposizione)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx})e^{-inx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lim_{N\to\infty}\sum_{|m|\leq N} c_m e^{imx})e^{-inx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{|m|\leq N} c_m\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{|m|\leq N} c_m\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\,dx\end{aligned}$$

ma per l'osservazione 1.4.1, tutti gli integrali che appaiono nella somma sono zero tranne quello in cui $m = n$, che vale 2π. Ne segue che

$$\begin{aligned} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{|m|\leq N} c_m\delta_{m,n}\\ &= c_n.\end{aligned}$$

□

Notiamo che per calcolare i coefficienti di Fourier è sufficiente che f sia integrabile.

Definizione 1.4.1. f funzione periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi)$. Si chiamano **coefficienti di Fourier di f** i **numeri complessi**

$$\hat{f}_n \equiv c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{1.23}$$

Osservazione 1.4.2. I numeri a_n e b_n definiti in (1.20) e (1.21) vengono chiamati **coefficienti "reali" di Fourier di** f.

E' conveniente discutere le proprità dei coefficienti di Fourier chiedendo che f sia a "quadrato sommabile". Quest'ultima è un'ipotesi più forte rispetto all'integrabilità.

Proposizione 1.4.2. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica "a quadrato sommabile" (cioè* f^2 *è integrabile) su* $[0, 2\pi)$*. Allora*

(i) $|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$

(ii) $\overline{\hat{f}_n} = \hat{f}_{-n}$

(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx}|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 - \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}_n|^2$

Dimostrazione. (i)

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)e^{-inx}|\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

(ii) Segue dal fatto che il coniugato di e^{-inx} è e^{inx}.
(iii) Espandendo l'integrando si trovano, oltre $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2$, i seguenti due termini

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx}|^2\, dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx})(\sum_{|m|\leq N} \overline{\hat{f}_m} e^{-imx})\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n \sum_{|m|\leq N} \overline{\hat{f}_m}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\, dx \\ &= (\frac{1}{2\pi}\sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n \sum_{|m|\leq N} \overline{\hat{f}_m})\delta_{m,n} \\ &= \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}_n|^2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2Re\left(f(x)\sum_{|n|\leq N}\hat{f}_n e^{inx}\right)dx &= 2Re\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{|n|\leq N}\hat{f}_n\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\,dx\right)\\
&= 2Re\left(\sum_{|n|\leq N}\hat{f}_n\hat{f}_{-n}\right)\\
&= 2\sum_{|n|\leq N}|\hat{f}_n|^2.
\end{aligned}$$

Mettendo assieme tali termini si ha la tesi. □

Proposizione 1.4.3 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica "a quadrato sommabile" (cioè* f^2 *è integrabile) su* $[0,2\pi)$*. Allora*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx. \tag{1.24}$$

Dimostrazione. la proprietà (iii) della precedente proposizione mostra che

$$\sum_{|n|\leq N}|\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx, \quad \forall N.$$

prendendo il limite per $N\to\infty$ si ottiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

□

Vedremo in un teorema successivo che, sotto certe ipotesi, la disuguaglianza di Bessel diventa un'uguaglianza.

Osservazione 1.4.3. Sotto le stesse ipotesi delle proposizioni precedenti e come conseguenza della disuguaglianza di Bessel vale che

$$\lim_{n\to\pm\infty} |\hat{f}_n| = 0. \tag{1.25}$$

La disuguaglianza di Bessel ci ha permesso di affermare che i coefficienti di Fourier di qualsiasi funzione a quadrato sommabile tendono a 0. Il prossimo lemma, di Riemann-Lebesgue, ci dice che questo non vale solo per le funzioni a quadrato sommabile, ma è vero anche per qualsiasi funzione integrabile.
Notiamo che se f fosse limitata (f integrabile e limitata implica f a quadrato sommabile) il fatto che i coefficienti di Fourier tendono a 0 sarebbe evidente. Bisogna considerare quindi che f non sia limitata e che l'integrale sia definito in senso improprio. Potremmo quindi avere un numero finito di punti in cui f non è limitata. Senza perdita di generalità supponiamo di avere un unico punto in cui f non è limitata (un solo asintoto in 2π)

Lemma 1.4.1 (di Riemann-Lebesgue). *f integrabile su $[0, 2\pi)$ $\implies$ $\hat{f}_n \to 0$ per $n \to \infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, 2\pi - \frac{1}{k}]; \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 2\pi - \frac{1}{k}]; \end{cases}$$

Tale funzione è a quadrato sommabile(essendo limitata) ed inoltre si ha

$$\int_0^{2\pi} |f - f_k| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Dunque, dato $\epsilon > 0$ sia k tale che

$$\int_0^{2\pi} |f - f_k| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.26}$$

Essendo $f_k(x)$ a quadrato sommabile, possiamo considerare i coefficienti di Fourier e sappiamo che tendono a zero ossia che esiste N tale che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| > N$ si ha

$$|\hat{f}_{k,n}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.27}$$

Allora, per ogni $|n| > N$ si ha

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_n| &\leq |\hat{f}_n - \hat{f}_{k,n}| + |\hat{f}_{k,n}| \\
&= \left| \int_0^{2\pi} (f(x) - f_k(x)) e^{-inx} \, dx \right| + |\hat{f}_{k,n}| \\
&\leq \int_0^{2\pi} |f(x) - f_k(x)| \, dx + |\hat{f}_{k,n}| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue l'asserto. □

Torniamo a considerare ora le funzioni a quadrato sommabile e vediamo cosa possiamo dire su $f^{(k)}(x)$

Proposizione 1.4.4. *Sia* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica "a quadrato sommabile" (cioè* f^2 *è integrabile) su* $[0, 2\pi)$*. Allora*

(i) $\widehat{(f^{(k)})}_n = (in)^k \hat{f}_n$

(ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2k} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2 \, dx$

Dimostrazione. (i) Si noti che se $f \in C^1_{per}$ allora $f' \in C_{per}$. Dunque sia ora $n = 0$

$$\widehat{(f')}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} f(x) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

dal momento che $f(2\pi) = f(0+2\pi) = f(0)$ poichè f è 2π-periodica. Poichè questa relazione può essere iterata, la (i) è vera per $n = 0$ e per ogni $k \leq p$.
Sia ora $n \neq 0$. Essendo $f \in C^1_{per}$ itegrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{in}\widehat{(f')}_n.
\end{aligned}$$

ossia

$$\widehat{(f')}_n = in\hat{f}_n.$$

che è la (i) per $k = 1$ e $n \neq 0$. Iterando tale relazione si ottiene l'asserto.
(ii) Applichiamo la disuguaglianza di Bessel con $f^{(k)}(x)$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{(f^{(k)})}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2\,dx.$$

ma sappiamo per il punto precedente che $\widehat{(f^{(k)})}_n = (in)^k\hat{f}_n$, dunque si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2|n|^{2k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{(f^{(k)})}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2\,dx.$$

□

Notiamo che se definiamo

$$w^{2,p} := \left\{ \{c_n\} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2|n|^{2p} < \infty \right\} \tag{1.28}$$

e definiamo H^p come l'insieme delle funzioni $f \in C^{p-1}$ tali che $f^{(p)}$ è a quadrato sommabile, allora il punto (ii) della precedente proposizione si scrive anche

Proposizione 1.4.5. $f \in H^p \implies \{\hat{f}_n\} \in w^{2,p}$.

Osservazione 1.4.4. Questa proposizione è un parziale "viceversa" della proposizione 1.3.1. Infatti $\{\hat{f}_n\} \in w^{2,p}$ vuol dire che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2|n|^{2p} < \infty$, ma quest'ultima condizione è più debole della condizione $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n||n|^p < \infty$.

Osservazione 1.4.5. Invece, per quanto riguarda le funzioni C^∞_{per} vale che $f \in C^\infty_{per}$ *se e solo se i coefficienti di Fourier* $|\hat{f}_n|$ *decadono più rapidamente di ogni potenza inversa di* $|n|$.

Capitolo 2

Convergenza puntuale e uniforme di serie di Fourier

In questo capitolo studiamo la convergenza puntuale e uniforme di serie di Fourier.
Più precisamente, daremo alcune diverse condizioni sufficienti per una funzione affinché la sua serie di Fourier converga puntualmente o uniformemente alla funzione di partenza.

2.1 Convergenza puntuale e Criterio di Dini

Premettiamo la definizione di convergenza puntuale di serie di funzioni

Definizione 2.1.1. Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, con $f_n : A \to \mathbb{R}$, si dice *convergente puntualmente* ad una funzione f su un insieme $E \subseteq A$ se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in A. \tag{2.1}$$

Iniziamo con un risultato che dà condizioni sufficienti affinché il troncamento di una serie di Fourier converga a $f(x)$ in un punto:

Lemma 2.1.1 (di Dini). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periodica e integrabile su $[0, 2\pi)$. Fissato $x \in [0, 2\pi)$, se il rapporto incrementale*

$$y \to F(y) \equiv \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$$

è integrabile (come funzione di y) in un intorno di $y = 0$ allora

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e^{inx} = f(x). \tag{2.2}$$

Osservazione 2.1.1. Nota che $f(x)$ fuori da $y = 0$ è continua e limitata e quindi integrabile. Ciò che ci serve è che esista un δ tale che

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\rho\le|y|\le\delta} |F(y)|\, dy < \infty \tag{2.3}$$

Una ipotesi che implica la validità del "test di Dini" è che f **sia derivabile in** x.
Infatti, se f è derivabile in x, $\exists\delta > 0$ per cui vale (2.2), ossia tale che

$$|F(y) - f'(x)| < 1, \quad |y| < \delta \tag{2.4}$$

Dunque

$$|F(y)| \le |F(y) - f'(x)| + |f'(x)| \le 1 + |f'(x)| \equiv M. \tag{2.5}$$

Quindi $\forall 0 < \rho < \delta$ vale che

$$\int_{\rho\le|y|\le\delta} |F(y)|\, dy \le 2\delta M, \tag{2.6}$$

e quindi F è integrabile su $[-\delta, \delta]$.

Dimostrazione. (del lemma di Dini) Sia

$$G(y) \equiv \frac{f(x-y)-f(x)}{e^{-iy}-1}.$$

Per ipotesi

$$F(y) = \frac{f(x-y)-f(x)}{y}$$

che sappiamo essere integrabile, e chiamiamo

$$g(y) \equiv \frac{e^{iy}-1}{y},$$

che scritto in termini di seni e coseni è

$$g(y) = \frac{\cos y - 1 + i \sin y}{y} \to i, \quad y \to 0.$$

Quindi si ha che $G(y) = \frac{F(-y)}{g(-y)}$ in cui manca da dimostrare che $\frac{1}{g(-y)}$ è integrabile per dire che G è integrabile (ricorda: il prodotto di funzioni integrabile è ancora una funzione integrabile).
Vogliamo mostrare che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(-y)}\, dy < \infty.$$

osserviamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(-y)}\, dy = \int_0^{\epsilon} \frac{1}{g(-y)}\, dy + \int_{\epsilon}^{2\pi} \frac{1}{g(-y)}\, dy$$

Il secondo integrale è ben definito, $\frac{1}{g}$ è continua dovunque tranne in $y = 0$, ma quando $y \to 0$ $\frac{1}{g} \to \frac{1}{i}$. Possiamo quindi costruire una funzione

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq 0; \\ 0 & \text{se } y = 0; \end{cases}$$

che è una funzione continua.

Ora
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(-y)}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tilde{g}(-y)}\,dy < \infty,$$
$\frac{1}{\tilde{g}(-y)}$ è una funzione continua su un compatto $\implies$ $\frac{1}{g(-y)}$ è integrabile. Possiamo quindi dire che
$$G(y) = \frac{F(-y)}{g(-y)}$$
è integrabile.
Dunque
$$f(x-y) - f(x) = G(y)e^{-iy} - G(y),$$
essendo ambo i membri di tale identità (come funzioni di y) periodici ed integrabili su $[0, 2\pi)$ possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier (ovvero moltiplicare ambo i membri per $\frac{e^{-iny}}{2\pi}$ ed integrare da 0 a 2π):
$$\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-iny}\,dy - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-iny}\,dy) = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n$$
Se $n = 0$:
$$-f(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,dy = \hat{G}_1 - \hat{G}_0$$
$$-f(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+y}^{\pi+y} f(z)\,dz = \hat{G}_1 - \hat{G}_0$$
ossia
$$\hat{f}_0 = \hat{G}_1 - \hat{G}_0 + f(x).$$
Se $n \neq 0$:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-iny}\,dy = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n$$
$$\frac{1}{2\pi}e^{-inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{inx-iny}\,dy = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n$$

$$e^{-inx} \int_{-\pi+y}^{\pi+y} f(z)e^{inz}\, dz = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n$$

ossia

$$\hat{f}_{-n}e^{-inx} = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n.$$

Dunque $\forall N \geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_{-n} e^{-inx} = f(x) + \sum_{|n|\leq N} (\hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n) \\ = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_{-N} + f(x).\end{aligned}$$

per il lemma di Riemann-Lebesgue, G integrabile $\implies$ $\hat{G}_N \to 0$ per $N \to \infty$ e dunque, prendendo il limite per $N \to \infty$ nella relazione sopra, si ottiene la tesi. $\square$

Il corollario che segue ci dà, sotto opportune ipotesi, informazioni sulla convergenza sella serie di Fourier in punti dove $f(x)$ ha un salto. Ricordiamo prima le notazioni

$$f(x^+) = \lim_{y\to x^+} f(y); \quad f(x^-) = \lim_{y\to x^-} f(y); \tag{2.7}$$

Corollario 2.1.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi)$. Se $x \in [0, 2\pi)$ è tale che esistono finiti i limiti $f(x\pm)$ e tale che la funzione*

$$F(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y)-f(x+)}{y} & se\ y > 0; \\ \frac{f(x+y)-f(x-)}{y} & se\ y < 0; \\ 0 & se\ y = 0; \end{cases} \tag{2.8}$$

è integrabile in un intorno di $y = 0$, allora

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \tag{2.9}$$

2.2 Convergenza uniforme e uguaglianza di Parseval

Premettiamo la definizione di convergenza uniforme di serie di funzioni

Definizione 2.2.1. Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, con $f_n : A \to \mathbb{R}$, si dice *convergente uniformemente* ad una funzione f su un intervallo I se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{uniformemente su I.} \tag{2.10}$$

Enunciamo a questo punto un teorema che ci fornisce condizioni sufficienti per la convergenza uniforme di una serie di Fourier associata a una funzione f

Teorema 2.2.1. *Assumiamo che $f \in C^p_{per}$ per un qualche $p \geq 1$. Allora, per ogni ϵ, esiste N_0 tale che, se $N \geq N_0$, si ha*

$$\sup_{\mathbb{R}} |f(x) - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx}| \leq \frac{\epsilon}{N^{p-\frac{1}{2}}}. \tag{2.11}$$

Inoltre vale la seguente "uguaglianza di Parseval"

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2. \tag{2.12}$$

Dimostrazione. Per ipotesi f è derivabile in x, quindi valgono le ipotesi del lemma di Dini e si ha convergenza puntuale.

$$f(x) - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \lim_{M\to\infty} \sum_{N<|n|\leq M} \hat{f}_n e^{inx}. \tag{2.13}$$

Dalla proprietà (ii) della proposizione 1.4.4 (con $k = p$), se $f \in C^p_{per}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(p)}(x)|^2 \, dx,$$

che è equivalente a dire che la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2|n|^{2p}$ converge. Dunque tutte le code del tipo

$$\sum_{n>N} |\hat{f}_n|^2|n|^{2p}$$

tendono a zero per $N \to \infty$, ossia $\forall\delta > 0\ \exists N = N(\delta)$ tale che se $N > N(\delta)$ allora

$$\sum_{n>N} |\hat{f}_n|^2|n|^{2p} < \delta. \tag{2.14}$$

Scegliamo allora

$$\delta = \epsilon^2\left(p - \frac{1}{2}\right). \tag{2.15}$$

Usando la disugliaanza di Cauchy-S. e la relazione (2.8) sopra, si ottiene, per ogni $M > N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{N<|n|\leq M} \hat{f}_n e^{inx}\right| &\leq \sum_{N<|n|\leq M} |\hat{f}_n| \\
&= \sum_{N<|n|\leq M} (|\hat{f}_n||n|^p)|n|^{-p} \\
&\leq \left(\sum_{N<|n|\leq M} |\hat{f}_n|^2|n|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{N<|n|\leq M} |n|^{-2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{|n|>N} |\hat{f}_n|^2|n|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \epsilon\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_N^{\infty} \frac{1}{x^{2p}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \epsilon\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}\frac{N^{\frac{1-2p}{2}}}{(2p-1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\epsilon}{N^{P-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Prendendo, in tale relazione, il limite per $M \to \infty$, e ricordando la (2.8) si ottiene la (2.6).
In particolare, (2.6) mostra che la convergenza della serie

$$\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx}$$

a f è uniforme; quindi si può passare al limite, per $N \to \infty$, nella formula (iii) della proposizione 1.4.2, ottenendo l'identità di Parseval. □

Diamo ora due definizioni

Definizione 2.2.2. Una funzione $f(x)$ si dice *continua a tratti* in un intervallo $[a, b)$ se è continua in $[a, b)$ tranne al più in un numero finito di punti nei quali esistono finiti il limite destro e sinistro. Una funzione continua a tratti di dirà *regolare a tratti* in $[a, b)$ se è derivabile in $[a, b)$ eccetto che nei punti in cui non è continua ed eventualmente in altri punti, sempre in numero finito, e se f' è continua (dove esiste) e limitata.

Definizione 2.2.3. Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, con E intervallo di $\mathbb{R}$, *è* C^1 *a tratti* se esistono N punti in E $a_1 < \cdots < a_N$ per cui $f \in C^1((a_{k-1}, a_k))$, per $2 \leq k \leq N$, ed esistono finiti i limiti, rispettivamente, da destra e da sinistra di f e f' in a_{k-1} ed a_k.

Lemma 2.2.1. *Se* $f \in C^0_{per}$ *è* C^1 *a tratti* $\implies \widehat{(f')}_n = in\hat{f}_n$.

Dimostrazione. Supponiamo $f \in C^0_{per}$ e C^1 a tratti. Vogliamo calcolare i coefficienti di Fourier,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

Supponendo che f abbia un solo punto di discontinuità a si ha che l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{a} f(x)e^{-inx}\,dx + \int_{a}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx =$$

$$= -\int_{-\pi}^{a} f'(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx + f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{a} +$$

$$+ f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{a}^{\pi} - \int_{a}^{\pi} f'(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{e^{-inx}}{in}\,dx + \frac{f(-\pi^+)e^{in\pi}}{in} - \frac{f(a^-)e^{-ina}}{in} + \frac{f(a^+)e^{-ina}}{in} -$$

$$- \frac{f(\pi^-)e^{-in\pi}}{in} = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{e^{-inx}}{in}\,dx.$$

L'ultima uguaglianza vale se f è continua. Infatti se f è continua $f(a^+) = f(a^-)$ e $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$. Dunque

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{e^{-inx}}{in}\,dx = \frac{1}{in2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{in}\widehat{(f')}_n.$$

Quindi

$$\widehat{(f')}_n = in\hat{f}_n.$$

□

Corollario 2.2.1. *Se $f \in C^0_{per}$ è C^1 a tratti $\implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty$ e quindi la serie di Fourier di f converge totalmente a f.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente, date le ipotesi, segue che $\widehat{(f')}_n = in\hat{f}_n$, ossia che

$$\hat{f}_n = \frac{\widehat{(f')}_n}{in}. \tag{2.16}$$

Allora dal lemma e dalla disuguaglianza di Cauchy-S. segue che

$$\sum_{n\neq 0} |\hat{f}_n| = \sum_{n\neq 0} \left| \frac{\widehat{(f')}_n}{in} \right| = \sum_{n\neq 0} \frac{|\widehat{(f')}_n|}{n} \leq \sqrt{\sum \frac{1}{n^2} \sum |\widehat{(f')}_n|^2}$$

Poichè f' è periodica e continua a tratti, f' è integrabile e dunque dalla disuguaglianza di Bessel segue che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{(f')}_n|^2 < \infty.$$

Segue, per il criterio del confronto, la convergenza della serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|$. Infine per dimostrare la convergenza totale della serie di Fourier basta mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{[0,2\pi)} |\hat{f}_n e^{inx}| < \infty.$$

ma questo segue dal fatto che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty$. □

A questo punto siamo pronti a completare il legame che c'è tra regolarità di funzione periodica ed il decadimento, per $|n| \to \infty$, dei suoi coefficienti di Fourier.

2.3 Legame fra la regolarità di funzioni periodiche reali analitiche ed il decadimento dei suoi coefficienti di Fourier

Riprendendo l'osservazione 1.4.5, un'altra classe di funzioni, oltre a C^∞, che è possibile caratterizzare esattamente tramite una condizione sul decadimento dei coefficienti di Fourier è la classe C^ω_{per} delle funzioni periodiche e reali analitiche su $\mathbb{R}$

Definizione 2.3.1. Una funzione $f \in C^\infty(\{x_0\})$ a valori reali si dice analitica (reale) in x_0 se la sua serie di Taylor ha raggio di convergenza positivo e se $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, con $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, in un intorno di x_0. Una funzione $f \in C^\infty(E)$ si dice analitica (reale) su E se f è (reale) analitica in ogni punto x_0 di E; la classe di tali funzioni si denota con $C^\omega(E)$.

Vale la seguente caratterizzazione di C^ω

Teorema 2.3.1. *$f \in C^\omega$ se e solo se $f \in C^\infty$ ed esistono, per ogni $x_0 \in [0, 2\pi)$, due costanti positive $M_{x_0}, r_{x_0} > 0$ tali che*

$$\sup_{|x-x_0|<r(x_0)} |f^{(k)}(x)| \le M(x_0) r_{x_0}^{-k} k!. \tag{2.17}$$

Per la dimostrazione si veda il libro *Lezioni di analisi matematica 2* di Luigi Chierchia.

Conlcudiamo discutendo allora in dettaglio la relazione fondamentale che c'è tra la regolarità della funzione $f \in C^\omega_{per}$ e il decadimento dei suoi coefficienti di Fourier

Proposizione 2.3.1. *$f \in C^\omega_{per} \iff f$ è continua e periodica e*

$$\exists C, \sigma > 0 : |\hat{f}_n| \le \frac{C}{e^{\sigma|n|}}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.18}$$

Nel corso della dimostrazione faremo uso della seguente stima

Lemma 2.3.1. *Sia $\alpha > 0$ e sia k un intero non negativo, allora*

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\alpha j} j^k \le (1 + \frac{1}{\alpha}) \alpha^{-k} k!. \tag{2.19}$$

di cui però ometteremo la dimostrazione.

Dimostrazione. Supponiamo prima che f sia continua e periodica e che esistano due valori $C, \sigma > 0$ tali che $|\hat{f}_n| \le Ce^{-\sigma|n|}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Dobbiamo dimostrare che $f \in C^\omega_{per}$.

Grazie all'ipotesi di continuità possiamo calcolare i coefficienti di Fourier e inoltre per l'ipotesi che gli $\hat{f}_n$ decadono più rapidamente, per l'osservazione 1.4.5 allora $f \in C^{\infty}_{per}$.
Osserviamo che

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^k \hat{f}_n e^{inx}, \tag{2.20}$$

di cui calcoliamo

$$\begin{aligned}\sup_{[0,2\pi)} |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |\hat{f}_n| &\underset{\text{per l'hp (1.23)}}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k C e^{-\sigma|n|} \\ &\leq 2C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma j} j^k \underset{\text{lemma 1.5.1}}{\leq} (1+\frac{1}{\sigma})\sigma^{-k} k!.\end{aligned}$$

Quindi $\sup|f^{(k)}(x)| \leq M_{x_0} r_{x_0}^{-k} k!$ per ogni x_0 e per ogni $k \geq 0$ se scegliamo $r_{x_0} = \sigma$ e $M_{x_0} = (1+\frac{1}{\sigma})$. Dal teorema 1.5.1 segue l'asserto.

Sia ora $f \in C^{\omega}_{per}$. Dal teorema 1.5.1 segue che esistono, per ogni $x_0 \in [0, 2\pi)$, due costanti positive $M_{x_0}, r_{x_0} > 0$ tali che

$$\sup_{|x-x_0|<r_{x_0}} |f^{(k)}(x)| \leq M_{x_0} r_{x_0}^{-k} k!, \quad \forall k \geq 0. \tag{2.21}$$

Gli intervalli $I_{x_0} = \{x : |x - x_0| \leq r(x_0)\}$ di centro x_0 e lunghezza $2r_{x_0}$ formano un ricoprimento aperto dell'insieme compatto $[0, 2\pi]$ ed è dunque possibile trovare un ricoprimento finito I_{x_1}, I_{x_2}, ..., I_{x_N}. Definendo $M := \max_{i=1,\ldots,N} M_{x_i}$ e $r := \min_{i=1,\ldots,N} r_{x_i}$ si ha allora

$$\sup|f^{(k)}(x)| \leq M r^{-k} k!, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \geq 0.$$

Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \frac{(-1)^p}{2\pi(in)^p}\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)e^{-inx}\, dx,$$

e passando al modulo

$$|\hat{f}_n| = \frac{1}{2\pi|n|^p}\left|\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)e^{-inx}\,dx\right|$$
$$\underset{\text{stima con k=p}}{\leq} \frac{1}{2\pi|n|^p}\left|\int_0^{2\pi} Mr^{-p}p!\,dx\right| \leq \frac{M}{|n|^p}r^{-p}p! \leq M\left(\frac{p}{r|n|}\right)^p.$$

Se $|n| \geq \frac{2}{r}$, scegliendo $p \equiv [\frac{|n|r}{2}]$ si ha che (rem. $x-1 \leq [x] \leq x$)

$$|\hat{f}_n| \leq M\left(\frac{[\frac{|n|r}{2}]}{r|n|}\right)^{[\frac{|n|r}{2}]} \leq M\left(\frac{|n|r}{2|n|r}\right)^{[\frac{|n|r}{2}]} = M2^{-[\frac{|n|r}{2}]}$$
$$\leq 2Me^{-|n|\frac{ln2r}{2}}.$$

Basta porre $\sigma = \frac{ln2r}{2}$ e $C = 2M$ per avere

$$|\hat{f}_n| = Ce^{-\sigma|n|}.$$

Se invece $|n| \leq \frac{2}{r}$, basta prendere

$$C_* = \max_{|n|<\frac{2}{r}} |\hat{f}_n|e^{\sigma|n|}, \quad \sigma = \frac{ln2r}{2},$$

per avere che

$$|\hat{f}_n| < C_*e^{-\sigma|n|}.$$

Infine se poniamo:

$$\sigma = \frac{ln2r}{2}, \quad C_* = \max_{0\leq|n|\leq\frac{2}{r}} |\hat{f}_n|e^{\sigma|n|}, \quad C = \max\{2M, C_*\}$$

abbiamo finito. $\square$

Capitolo 3

Applicazioni

3.1 Applicazione alla risoluzione delle equazioni differenziali a coefficienti costanti

Supponiamo di avere un'equazione differenziale a coefficienti costanti del secondo ordine

$$u'' + au' + u = f(x), \tag{3.1}$$

(ciò che vedremo è vero per qualunque ordine) dove a è una costante ed f è 2π-periodica e C^1.
Si può dimostrare che la soluzione più generale dell'equazione sopra è la somma $u(x) = u_o(x) + u_p(x)$, dove $u_o(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $u'' + au' + bu = 0$ e $u_p(x)$ è una soluzione particolare della non omogenea.
Supponiamo che e^{ikx}, $\forall k$, non sia soluzione dell'omogenea $u'' + au' + bu = 0$.

Cerchiamo allora una soluzione particolare della non omogenea di questa forma:

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{inx},$$

e scrivo f in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}.$$

Se è vero che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_n| n^2 < \infty \tag{3.2}$$

allora possiamo conlcudere che $u(x) \in C^2$ almeno, infatti: se è vera la 3.2 allora , per il teorema di derivazione di serie (rivedere pag. 11 per l'enunciato),

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{inx} \in C^1, \quad (u(x))' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\hat{u}_n e^{inx}.$$

e ancora

$$(u(x))' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\hat{u}_n e^{inx} \in C^1, \quad (u(x))'' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2\hat{u}_n e^{inx}.$$

Possiamo quindi sostituire nell'equazione (3.1)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2\hat{u}_n e^{inx} + a\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\hat{u}_n e^{inx} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx},$$

da cui

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n^2 + ain + 1)\hat{u}_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx},$$

infine abbiamo la soluzione

$$\hat{u}_n = \frac{\hat{f}_n}{-n^2 + ain + 1}.$$

Per concludere basta vericare che vale $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_n|n^2 < \infty$ con $\hat{u}_n = \frac{\hat{f}_n}{-n^2+ain+1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{\hat{f}_n}{-n^2+ain+1}\right| n^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| \frac{n^2}{\sqrt{(1-n^2)^2+(an)^2}} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^2}{\sqrt{(1-k^2)^2+a^2k^2}} \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^2}{k^2-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(k^2-1)}{k^2-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| \\
&\leq 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|.
\end{aligned}$$

Quest'ultima converge, e per il teorema del confronto converge la serie di partenza.

3.2 La funzione di Weierstrass: una funzione continua che non è derivabile in nessun punto

Sia x una variabile reale, a un intero dispari, b una costante positiva, minore di 1, e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi), \tag{3.3}$$

allora $f(x)$ *è una funzione continua* della quale si può dimostrare che, se il valore del prodotto ab supera una determinata soglia, *non è derivabile in nessun punto.*

Siccome a è un intero, la serie è una serie trigonometrica; inoltre, poichè $0 < b < 1$, la serie $\sum b^n$ converge, e dunque la serie data è totalmente convergente. Ne segue che la funzione $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, e la serie (3.3) è la serie di Fourier di f.

Facciamo ora vedere che, se si scelgono opportunamente a e b, la funzione $f(x)$ non è derivabile in nessun punto. Innanzitutto possiamo supporre $x \geq 0$, dato che $f(x) = f(-x)$. Vogliamo far vedere che il rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{non esiste o non è finito.} \tag{3.4}$$

Basta che lo facciamo vedere per una successione $h_m \to 0$ per $m \to \infty$. Scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \{\cos\left(a^n(x+h)\right) - \cos\left(a^n x\right)\} \\ &= R_m + S_m, \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove si è posto

$$R_m = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \{\cos\left(a^n(x+h)\right) - \cos\left(a^n x\right)\} \tag{3.6}$$

$$S_m = \frac{1}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n \{\cos\left(a^n(x+h)\right) - \cos\left(a^n x\right)\}. \tag{3.7}$$

Cominciamo col valutare R_m. Poiché $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, risulta:

$$|R_m| \leq \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < \frac{a^m b^m}{ab - 1} \tag{3.8}$$

non appena $ab > 1$.
Veniamo ora a S_m. Fissato $x \geq 0$, osserviamo che si può scrivere

$$a^m x = \pi(\alpha_m + \xi_m) \tag{3.9}$$

dove α_m è un intero non negativo, e $-\frac{1}{2} < \xi_m < \frac{1}{2}$.

Ora vogliamo prendere un h in modo che $a^m x + a^m h$ sia un multiplo di π. In questo modo avremo che $\cos(a^n x + a^n h) = \pm 1$. Ossia

$$(\alpha_m + 1)\pi = a^m x + a^m h = \pi(\alpha_m + \xi_m) + a^m h$$

da cui viene che

$$\pi = \pi\xi_m + a^m h$$

e quindi

$$h = \frac{\pi(1-\xi_m)}{a^m} =: h_m. \tag{3.10}$$

Risulta

$$a^n(x + h_m) = a^{n-m}a^m(x + h_m) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1),$$

e dunque, tenuto conto che a è dispari si ha

$$\cos(a^n(x + h_m)) = (-1)^{\alpha_m+1}.$$

Analizziamo ora

$$\begin{aligned}
\cos(a^n x) &= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m + a^{n-m}\pi\xi_m) \\
&= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m) \\
&- \sin(a^{n-m}\pi\alpha_m)\sin(a^{n-m}\pi\xi_m) \\
&= (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m),
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
S_m &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\{(-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\} \\
&= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{\infty} b^n(1 + \cos(a^{n-m}\pi\xi_m)).
\end{aligned}$$

Osserviamo che $1 + \cos(a^{n-m}\pi\xi_m) \geq 0$ perciò togliamo la somma tranne il termine $n = m$

$$\begin{aligned}
S_m &\geq \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m} b^m(1 + \cos(\pi\xi_m)) \\
&\geq \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m} b^m,
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per il fatto che $\cos(\pi\xi_m) \geq 0$. Inoltre se $h_m = \frac{\pi(1-\xi_m)}{a^m}$ con $-\frac{1}{2} < \xi_m < \frac{1}{2}$ allora

$$|S_n| \geq \frac{b^m}{h_m} = \frac{b^m a^m}{\pi(1-\xi_m)} \geq \frac{2b^m a^m}{3\pi}. \tag{3.11}$$

Ricordando (3.8), purché $ab > 1$, risulterà:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+h_m) - f(x)|}{h_m} &\geq |S_m| - |R_m| \\ &\geq \frac{2b^m a^m}{3\pi} - \frac{b^m a^m}{ab-1} \\ &\geq a^m b^m \left[\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{ab-1}\right]. \end{aligned}$$

Se ora scegliamo a e b in modo tale che $\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{ab-1} > 0$ il membro di destra tende all'infinito (rem $ab > 1$), e dunque il limite non è finito e la funzione $f(x)$ non è derivabile.

3.3 Serie di Fourier e analisi armonica di un segnale periodico

L'operazione di scomporre una funzione periodica f di periodo T in somma (finita o infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo $\cos n\omega t$ e $\sin n\omega t$ (con $\omega = \frac{2\pi}{T}$) costituisce l'*analisi armonica* della funzione f: il termine

$$a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

si chiama *armonica fondamentale*; il termine

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t, (n = 2, 3, \dots)$$

si chiama *armonica n-esima*. Questa terminologia è derivata dall'acustica. Quando un diapason, colpito, si mette a vibrare, le sue vibrazioni possono essere descritte da una funzione periodica semplice come

$$x(t) = a\cos\omega t \quad \text{oppure} \quad a\sin\omega t$$

($x(t)$ misura lo spostamento, al tempo t, di un corno del diapason dalla sua posizione di riposo). Il numero positivo a misura l'*ampiezza* dell'oscillazione e viene percepito dall'orecchio come *intensità* o *volume del suono*; $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ è la *frequenza* tipica del diapason: essa viene percepita dall'orecchio come *altezza* del suono. Il diapason ha la proprietà di emettere suoni puri, cioè suoni di una determinata frequenza.

In generale i suoni emessi dagli strumenti musicali non sono puri, ma risultano dalla sovrapposizione di diverse armoniche. Ciò è dovuto al fatto che una corda fissata agli estremi può oscillare in diversi modi, cioò con diverse frequenze: queste frequenze (teoricamente infinite) sono multipli di una *frequenza fondamentale* propria della corda. La vibrazione effettiva di un dato punto della corda risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni corrispondenti ai singoli modi: essa è perciò descritta da una somma (teoricamente infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo:

$$a_n\cos\omega nt \quad \text{oppure} \quad b_n\sin\omega nt, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

cioè da una serie di Fourier. L'identità trigonometrica

$$a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos(\omega nt - \phi_n)$$

con $\phi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}$, mostra che in realtà ogni armonica $a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t$ si può esprimere come una sola cosinusoide (o sinusoide), a patto però di inserire in essa una fase ϕ_n. L'ampiezza complessiva di questa armonica risulta quindi $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.
In altre parole, possiamo anche dire: una vibrazione periodica si può vedere come sovrapposizione di vibrazioni elementari tutte di

tipo cosinusoidale, che hanno frequenze multiple di una frequenza fondamentale, ampiezze diverse e sono inoltre sfasate tra loro.

La stessa terminologia (ampiezza, frequenza, armoniche. . .) viene utilizzata al di fuori dell'ambito acustico, nell'analisi di segnali (periodici) di vario tipo, per esempio elettromagnetici.

Il fatto che i coefficienti di Fourier tendano a zero per $n \to \infty$ (lemma di Riemann-Lebesgue) corrisponde al fatto che, in pratica, solo le prime armoniche sono rilevanti nella descrizione di un segnale periodico: quelle successive hanno ampiezza talmente piccola da essere praticamente trascurabili. Più numerose sono le armoniche presenti (in modo rilevante) in un segnale, più il segnale potrà avere una forma complicata e irregolare, per la presenza di molte armoniche di alta frequenza, che oscillano rapidamente. Viceversa, la presenza di pochi termini nello sviluppo di Fourier significa la presenza delle sole basse frequenze, perciò un segnale lentamente variabile e dalla forma "liscia".

Abbiamo visto che più regolare è una funzione periodica (cioè maggiore il numero di derivate che possiede su tutto $\mathbb{R}$), più rapida è la convergenza a zero dei suoi coefficienti di Fourier. Per quanto detto, questo fatto significa in pratica che è minore il numero di termini effettivamente presenti nello sviluppo. Quindi

$$\text{funzione molto regolare} \implies \text{poche armoniche significative nello sviluppo di Fourier;}$$

$$\text{funzione poco regolare} \implies \text{molte armoniche di alta frequenza nello sviluppo di Fourier.}$$

Bibliografia

[1] Bellen A. Università degli studi di Trieste, dipartimento di matematica e geoscienze: *Approssimazione delle funzioni*, pag. 123-124, 1994.

[2] Bramanti M., Pagani C.D, Salsa S. *Analisi matematica 2*, Zanichelli, Bologna, 2009.

[3] Chierchia L. *Lezioni di analisi matematica 2*, Aracne, Roma, 1997.

[4] Giusti E. *Analisi matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003.

[5] Manca M.L, Murri L. Dipartimento di Neuroscienze, Università di Pisa: *Fourier ed il ruolo della sua trasformata nella ricerca neurologica*, pag. 9-10, 2006.

[6] Prestini E. *Applicazioni dell'analisi armonica*, Ulrico Hoepli, Milano, 1996.

[7] Weiestrass K. *Über continuirliche functionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten besitzen.* In: Mathematische Werke, vol. 2, pag. 71– 74, Mayer & Müller, Berlin, 1895.