Dipartimento di Matematica e Fisica
Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea

Sistemi dinamici, ODE e Teoremi di Rettificazione

Canditato:
Giulia Bassanelli
Matricola:
546594

Relatrice:
Prof.ssa Michela Procesi

Anno accademico 2021/2022

Abstract
In questa tesi ci occuperemo di alcuni aspetti della teoria dei sistemi dinamici. Un sistema dinamico è un'equazione del primo ordine del tipo $x' = f(t,x)$ dove il campo vettoriale ha sufficiente regolarità. Discuteremo questioni di esistenza, unicità, prolungabilità e regolarità rispetto ai dati iniziali. Questo è di particolare interesse per generare cambi di coordinate utili per semplificare la forma di un campo vettoriale. Come applicazioni considereremo il Teorema di rettificazione di Poincarè e la sua estensione al caso di più campi vettoriali che commutano tra loro: il Teorema di Frobenius.

Indice

Introduzione
In questa tesi ci occuperemo di alcuni aspetti della teoria dei sistemi dinamici.
Un sistema dinamico è un modello matematico che descrive il moto di un sistema fisico con un numero finito di gradi di libertà che evolve nel tempo secondo una legge. Un sistema dinamico in forma normale è quindi descritto da un'equazione differenziale del primo ordine del tipo $x' = f(t, x)$ dove il campo vettoriale f ha sufficiente regolarità.Un primo esempio di sistema dinamico sono i "sistemi lineari a coefficienti costanti" $u' = Au$ dove $A \in Mat(n \times n)$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Per tali sistemi la soluzione del problema di Cauchy esiste ed è unica per ogni t ed è data da $u(t) = e^{A(t-t_0)}u(t_0)$. Nella tesi ci concentreremo sullo studio di sistemi dinamici non linearu e sui teoremi di linearizzazione. Vedremo che sotto opportune ipotesi di regolarità sul campo vettoriale, più precisamente che esso sia una funzione di classe C^1 o anche più semplicemente che sia localmente lipschitz, è ancora possibile dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione, che tuttavia sarà solo locale, cioè definita solo per un intervallo di tempo limitato.
Questa prima differenza con i sistemi lineari, in cui invece la soluzione esiste, è unica ed è definita globalmente, sarà dimostrata nel capitolo 2 con il Teorema di esistenza e unicità di Lindelhof tramite un procedimento induttivo.
Una seconda differenza rispetto al caso lineare è che, nel caso di un campo vettoriale qualsiasi non esiste alcun metodo generale per trovare una soluzione e bisogna quindi accontentarsi di trovare soluzioni numeriche. I diversi casi possibili sono pertanto analizzati singolarmente e spesso ci si limita a studiare il comportamento qualitativo della soluzione senza che sia possibile ottenerne un'espressione analitica. Le equazioni lineari risultano quindi più semplici perchè si possono sempre ricondurre ad un sistema di equazioni lineari del primo ordine.
Nel capitolo 2 verrà discussa la possibilità di prolungare le soluzioni nel tempo fuori dall'intervallo di definizione individuato dal Teorema di esistenza e unicità ed eventualmente ottenere soluzioni globali. Questo porterà alla definizione di soluzione massimale e intervallo massimale d'esistenza.
Analizzeremo poi la questione della regolarità rispetto ai dati iniziali e riusciremo a dimostrare che il campo vettoriale f ha una dipendenza C^1 dai dati iniziali. In questa dimostrazione useremo il Teorema della funzione implicita in dimensione infinita descrivendone prima anche ilmcaso in dimensione finita. Questo è di particolare interesse perchè i flussi delle ODE possono essere usati per generare cambi di coordinate utili per semplificare un campo vettoriale e ciò è reso possibile dal fatto che per tempi piccoli e in una piccola palla di dati iniziali $(t, x) \to \phi(t, x)$ è C^1 in tutti i suoi argomenti.
Negli ultimi due capitoli troviamo due applicazioni utili: il Teorema di Ret-

tificazione di Poincarè e il teorema di Frobenius.
Nel Teorema di Rettificazione di Poincarè, anche detto scatola di flusso, si mostra che nelle vicinanze di un punto non singolare in un campo vettoriale esiste un intorno in cui il flusso del campo è un flusso lineare. Seguiranno poi delle osservazioni sulle informazioni che la forma normale può darci: nel caso di una sorgente si hanno infatti soluzioni per tempi limitati, mentre nel caso di soluzioni periodiche si hanno informazioni per tempi infiniti.
Infine il Teorema di Frobenius è l'estensione del teorema precedente nel caso di più campi vettoriali indipendenti che commutano tra loro, cioè tale rettificazione può essere effettuata sotto l'ipotesi necessaria che le "coordinate non dipendano dal percorso".

1 Definizioni di base

1.1 Equazione differenziale

Un'*equazione differenziale ordinaria di ordine* n per una funzione incognita $t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$, I intervallo, è un'equazione della forma

$$F\big(u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n)}(t), t\big) = 0, \tag{1.1}$$

dove $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un aperto $E \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ e $u^{(j)}(t)$ denota la derivata di ordine j rispetto alla variabile t. Una soluzione di (1.1) con F continua è una funzione $u \in C^n(I, \mathbb{R})$ che verifica (1.1) per ogni $t \in I$. L'equazione (1.1) si dice in *forma normale* se esiste una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tale che 1.1 abbia la forma $u^{(n)}(t) = f\big(u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n-1)}(t), t\big)$ o più sinteticamente

$$u^{(n)} = f\big(u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-1)}, t\big).$$

Un'equazione differenziale si dice *lineare* se la funzione incognita u e le sue derivate appaiono linearmente: la forma più generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n è

$$a_n(t)u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u^{(1)} + a_0(t)u = q(t). \tag{1.2}$$

Tale equazione si dice *omogenea* se $q \equiv 0$, ed in tal caso, se u_1 e u_2 sono soluzioni, allora lo sono anche $au_1 + bu_2$ per ogni scelta delle costanti a, b (in particolare, $u \equiv 0$ è soluzione di (1.2) con $q = 0$). Un'equazione differenziale si dice *autonoma* se non dipende esplicitamente da t.
Data un'equazione differenziale ordinaria della forma $y' = f(t, y)$, il *problema di Cauchy* associato è

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Una soluzione del problema di Cauchy (1.3) in un intervallo I è una funzione $y : I \to \mathbb{R}^n$ tale che

- y è soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ in I;
- $t_0 \in I$ e vale $y(t_0) = y_0$.

1.2 Regolarità della soluzioni

Per la continuità di f le soluzoni $y(t)$ sono automaticamente di classe C^1; infatti la funzione $t \to f(t, y(t))$ è continua, dunque $y'(t) = f(t, y(t))$ è continua, cioè $y(t)$ è di classe C^1. Allo stesso modo, se f è di clesse C^1 le soluzioni sono di classe C^2; infatti, ora $t \to f(t, y(t)$ è di classe C^1 perchè lo sono f e y, quindi $y'(t)$ è di classe C^1 ovvero $y(t)$ è di classe C^2. In generale, per induzone si dimostra facilmente che se f è di classe C^k allora ogni soluzione è di classe C^{k+1}.

1.3 Considerazioni sulla forma normale

Per esplicitare un sistema di equazioni differenziali in forma normale si usa il seguente teorema(conseguenza del Teorema della funzione implicita):

Teorema 1.1. *: Data l'equazione differenziale $F(t, y, y') = 0$ con dati iniziali $y(t_0) = y_0$, dove $F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua con derivata parziale rispetto a y' continua. se $F(t_0, y_0, y_0') = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y'}(t_0, y_0, y_0') \neq 0$, allora l'equazione è esplicitabile in forma normale, localmente vicino al punto (t_0, y_0, y_0').*

In particolare esistono intorni aperti U di (t_0, y_0), V di y_0' e una funzione continua $f : U \to V$ tali che $y_0' = f(t_0, y_0)$ e $y(t)$ è soluzione di $F(t, y, y') = 0$ con $(t, y(t), y'(t)) \in U \times V \iff y(t)$ è soluzione di $y' = f(t, y)$ con $(t, y(t)) \in U$.
Per passare da un'equazione differenziale in forma normale di ordine d non autonoma a un'equazione differenziale del primo ordine si toglie la dipendenza dal tempo t aggiungendo una dimensione, cioè

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{d-1} \\ u_d \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

quindi ho che:

$$\begin{cases} u_0'(t) = u_1(t) \\ u_1'(t) = u_2(t) \\ \vdots \\ u_{d-1}'(t) = f(u_0, \dots, u_{d-1}, u_d) \\ u_d'(t) = 1 \end{cases} \iff u' = \mathbf{f}(u) \tag{1.5}$$

2 Esistenza e unicità delle soluzioni

2.1 Funzione Lipschitz

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice *lipschitz* in y in A, se esistono due numeri positivi L e δ tali che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \tag{2.1}$$

per ogni $x \in A$ con $|x - y| \leq \delta$. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice *uniformemente lipschitz* in A se esiste $L > 0$ tale che (2.1) valga per ogni x e y in A.
Naturalmente una funzione lipschitz su A è continua su A mentre non è vero il viceversa, infatti data $x \in \mathbb{R} \to |x|^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, questa è continua in 0 ma non è lipschitz in 0.

2.2 Esistenza e unicità di Lindelhof

Teorema 2.1. *: Si consideri* $\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ *,* $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *continua e lipschitz in* x *e uniformemente continua in* t*. Fissiamo un compatto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $r > 0$ *e sia* $B_r(\Omega) = \bigcup_{x\in\Omega} B_r(x)$*. Fissiamo inoltre un intervallo* $I_0 \subset \mathbb{R}$ *e definiamo* M *e* L *tali che :*

- $\sup_{(x,t)\in B_r(\Omega)\times I_0} |f(x,t)| \leq M$
- $\sup_{x\neq y\in B_r(\Omega) et \in I_0} |f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$.

Fissiamo poi T *tale che* $MT < r$ *e sia* $I = (t_0 - T, t_0 + T)$*.*
Allora per ogni $u_0 \in \Omega$ *esiste ed è unica la soluzione* $u(t) \in C^1(I, B_r(u_0))$ *di* $\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$

Dimostrazione. Per prima cosa si deve mostrare che $u \in C^1(I, B_r(u_0)$ soddisfa

$$\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \iff \text{soddisfa} \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau), \tau) d\tau. \tag{2.2}$$

L'implicazione da destra verso sinistra è ovvia mentre l'implicazione da sinistra verso destra si dimostra integrando $u' = f(u(t), t)$ tra t_0 e t e usando il Teorema fondamentale del calcolo integrale.
Sia ora:

- $u_0(t) = u_0$
- $u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u_0, \tau) d\tau$

  .

  .

  .
- $u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u_n(\tau), \tau) d\tau$.

Passo 1 : Per ogni n si ha che $u_n \in C(I, B_r(u_0))$. Si mostra per induzione : $u_0 \in C(I, B_r(u_0))$ perchè è costante.
Supponiamo che $u_n \in C(I, B_r(u_0))$ e mostriamolo per

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u_n(\tau), \tau) d\tau,$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_0| = |\int_{t_0}^{t} f(u_n(\tau), \tau) d\tau| &\leq |\int_{t_0}^{t} |f(u_n(\tau), \tau)| d\tau| \\ &\leq |\sup_{\tau_1 \in I} |f(u_n(\tau_1), \tau_1)| \int_{t_0}^{t} d\tau| \\ &\leq \sup_{x \in B_r(\Omega), \tau_1 \in I} f(x, \tau_1) T = MT \leq r \end{aligned}$$

quindi $u_{n+1} \in C(I, B_r(u_0))$.

Passo 2 : Mostrare che $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C(I, B_r(u_0))$ rispetto alla norma $||v||_\infty = \sup_{t \in I} |v(t)|$. Si mostra per induzione.
Per $n = 1$:

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_0(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(u_0, \tau) d\tau| &\leq |\int_{t_0}^{t} |f(u_0, \tau)| d\tau| \\ &\leq M |\int_{t_0}^{t} d\tau| = M|t - t_0|; \end{aligned}$$

Per $n = 2$:

$$\begin{aligned}
|u_2 - u_1| &\leq |\int_{t_0}^{t} f(u_1(\tau), \tau) - f(u_0, \tau) d\tau| \\
&\leq |\int_{t_0}^{t} |f(u_1(\tau), \tau) - f(u_0, \tau)| d\tau| \leq |\int_{t_0}^{t} L|u_1(\tau) - u_0| d\tau| \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} M|\tau - \tau_0| d\tau \leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi per induzione su n ottengo che

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{ML^{n-1}|t - t_0|^n}{n!}$$

Usando la disuguaglianza triangolare $||u_n - u_m||_\infty \leq ||u_n - u_{n+1}||_\infty + \cdots + ||u_{m-1} - u_m||_\infty$ e applicando il risultato appena trovato si ottiene che

$$\begin{aligned}
||u_n - u_m||_\infty &\leq \sum_{j=n-1}^{m} ||u_{j+1} - u_j||_\infty \leq \sum_{j=n-1}^{\infty} ||u_{j+1} - u_j||_\infty \\
&\leq \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{ML^j T^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{(LT)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

La quantità appena ottenuta è la coda di un esponenziale e quindi è convergente. Questo implica che $u_{n n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy.
Poichè nello spazio $C(I, B_r(u_0))$ una successione è di Cauchy $\iff$ è covergente allora questo è uno spazio di Banach e quindi

$$u = \lim_{x \to \infty} u_n \in C(I, B_r(u_0))$$

Passo 3 : Mostrare che $u(t)$ risolve $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \tau) d\tau$.

$$\lim_{n \to \infty} u_{n+1}(t) = u_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} f(u_n(\tau), \tau) d\tau$$

e, poichè f è continua e u_n è di Cauchy allora u_n è uniformemente convergente, allora $f(u_n(\tau), \tau) \to f(u(\tau), \tau)$ uniformemente in I. Si può quindi scambiare il limite con l'integrale e ottenere

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau), \tau).$$

Poichè la parte destra dell'uguaglianza è C^1 allora $u(t) \in C^1$ e quindi $u(t)$ è soluzione di $\begin{cases} u' = f(u, t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$ $\square$

2.3 Soluzioni massimali

Data $y : I \to \mathbb{R}^n$ soluzione di un'equazione differenziale $y' = f(t,y)$, si dice *prolungamento* di y una funzione $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ che sia ancora soluzione, con $I \subset I_1$ e tale che $y_1|_I \equiv y$.
Una soluzione $y : I \to \mathbb{R}^n$ di un'equazione differenziale $y' = f(t,y)$ si dice *soluzione massimale* se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione I viene allora detto *intervallo massimale di esistenza* di y.

Proposizione 2.2. *: L'intervallo massimale d'esistenza I di una soluzione massimale è aperto.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità supponiamo, per assurdo, I chiuso a destra. In questo caso, per l'esistenza e unicità locale delle soluzioni di $y' = f(t,y)$ con istante iniziale b e dato iniziale $f(b)$, sarebbe possibile trovare un prolungamento della soluzione y in un intervallo $[b, b+\delta]$ per qualche δ, contradicendo la massimalità di y.

$\square$

Teorema 2.3. ***Esistenza di soluzioni massimali*** *: Data un'equazione $y' = f(t,y)$, con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tale che abbia unicità locale per tutti i relativi problemi di Cauchy (per esempio se f è localmente lipschitz), allora ogni problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale. Inoltre ogni soluzione dell'equazione può essere prolungata in maniera unica a una soluzione massimale.*

Se $I_{max} = \mathbb{R}$ diremo che la soluzione trovata è una soluzione *globale*.

Lemma 2.4. ***Criterio di estensione*** *: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, sia $f : (x,t) \in A \to f(x,t) \in \mathbb{R}^n$ localmente lipschitz in x e uniformemente lipschitz in t e sia $(x_0, t_0) \in A$. Una soluzione $u \in C(t_0, x_0)$ con $I_u = (a,b)$, $b \in \mathbb{R}$, ammette un'estensione destra v, ossia $I_v = (a, b+\epsilon)$, con $\epsilon > 0$, se e solo se $\lim_{t\to b} u(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $(x_0, b) \in A$. L'affermazione analoga vale per l'estremo sinistro.*

Teorema 2.5. ***Fuga dai compatti*** *: sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, sia $f : (x,t) \in A \to f(x,t) \in \mathbb{R}^n$ localmente lipschitz in x e uniformemente in t, sia $(x_0, t_0) \in A$, sia $(a,b) = I_{max}(x_0, t_0)$ con $b \in \mathbb{R}$. allora per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $K \times \{b\} \subseteq A$ esiste $t_1 \in (t_0, b)$ tale che $u_{max}(t_1) \notin K$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un compatto K tale che $K \times \{b\} \subseteq A$ e tale che $u_{max}(t) \in K$ per ogni $t \in (t_0, b)$. Sia $t_0 < t_k \nearrow b$ e sia $x_k = u(t_k)$. Poichè K è compatto esiste k_j e $x_0 \in K$ tali che $x_{k_j} \to x_0$. Poichè $(x_0, b) \in K \times \{b\} \subseteq A$ seguirebbe che u_{max} potrebbe essere estesa, il che è un assurdo. $\square$

2.4 Orbite e traiettorie

Supponendo che una data equazione differenziale $y' = f(t, y)$ abbia unicità di soluzioni per tutti i problemi di Cauchy allora le traiettorie non si intersecano, nel senso che due traiettorie o sono disgiunte oppure coincidono. Siano infatti $y : I_y \to \mathbb{R}^n$ e $z : I_z \to \mathbb{R}^n$ due soluzioni dell'equazione; se le due traiettorie hanno punti in comune, ovvero esiste almeno un punto $(t_0, y_0) \in T_y \cap T_z$, allora entrambe le funzioni sono soluzioni del problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = y_0$. Per il teorema di esistenza e unicità y e z devono allora coincidere su tutto $I_y \cap I_z$ e non possono quindi intersecarsi trasversalmente. Al contrario anche se c'è unicità le orbite possono comunque intersecarsi, cioè può accadere che $O_y \cap O_z$ consista in un unico punto y_1 per cui $y(t_1) = z(t_2) = y_1$ per qualche t_1, t_2, ma allora dovrà essere $t_1 \neq t_2$ altrimenti le traiettorie si intersecherebbero trasversalmente.
Se però l'equazione è autonoma, cioè $y' = f(y)$, neanche le orbite possono intersecarsi trasversalmente, infatti se prendiamo y e z come sopra tali che $y(t_1) = z(t_2)$ anche la funzione $x(t) = y(t - t_0)$ con $t_0 = t_2 - t_1$ è soluzione in $I_x = I_y + t_0$. Ma allora

$$x(t_2) = y(t_2 - (t_2 - t_1)) = y(t_1) = z(t_2)$$

quindi $(t_2, z(t_2)) \in T_x \cap T_z$ e per l'unicità $x = z$ in $I_x \cap I_z$, ovvero

$$y(t - t_0) = z(t)$$

per ogni $t \in (I_y + t_0) \cap I_z$. Ne segue che le due soluzioni sono una la traslata temporale dell'altra e quindi non si hanno intersezioni trasversali.

3 Lemma di Gronwell

3.1 Lemma di Gronwell - forma integrale

Lemma 3.1. ***Lemma di Gronwell*** *: Sia I un intervallo, $\delta, \alpha \in (0, \infty)$ e $g \in C(I)$ una funzione continua e positiva tale che, per un qualche $t_0 \in I$,*

$$g(t) \leq \delta + \alpha \left| \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau \right|, \forall t \in I \tag{3.1}$$

Allora per ogni $t \in I$ si ha

$$g(t) \leq \delta e^{\alpha |t-t_0|}. \tag{3.2}$$

cioè $g(t)$ non può crescere più velocemente di un esponenziale.

Dimostrazione. Supponiamo prima che $t \geq t_0$. In questo caso abbiamo che $g(t) \leq \delta + \alpha | \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau |$ e, poichè $t_0 \leq t$, possiamo scrivere $g(t) \leq \delta + \alpha \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau$. Poniamo $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau$. Sostituendo sopra si ottiene $g(t) \leq \delta + \alpha G(t)$, cioè

$$G'(t) \leq \delta + \alpha G(t) \tag{3.3}$$

da cui segue

$$G'(t) - \alpha G(t) \leq \delta \tag{3.4}$$

Moltiplicando 3.4 per $e^{-\alpha t}$ ottengo che essa è equivalente alla disuguaglianza

$$(G(t) e^{-\alpha t})' \leq \delta e^{-\alpha t}. \tag{3.5}$$

Integrando entrambi i membri da t_0 a t e ricordando che $G(t_0) = 0$ si ottiene $G(t) \leq \frac{\delta}{\alpha}(e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t})$, cioè

$$G(t) \leq \frac{\delta}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1). \tag{3.6}$$

Data $g(t) \leq \delta + \alpha G(t)$ e sostituendo la 3.6 otteniamo $g(t) \leq \delta e^{\alpha(t-t_0)}$.

$\square$

Una conseguenza del lemma di Gronwell è la seguente proposizione:

Proposizione 3.2. *: Data f come nel teorema di esistenza e unicità, siano $s > 0$ e $D_0 \subseteq D$ una sfera chiusa tali che per ogni $\bar{u} \in D_0$ esista una funzione $C^1([t_0 - s, t_0 + s]) t \to \phi(t, \bar{u})$, che soddisfi $\partial_t \phi = f(\phi, t)$ e $\phi(t_0, \bar{u}) = \bar{u}$. Allora la funzione $\bar{u} \in D \to \phi(t, \bar{u})$ è lipschitz con costante di Lipschitz $e^{L|t-t_0|}$, cioè*

$$|\phi(t, \bar{u}) - \phi(t, u_0)| \leq e^{L|t-t_0|} |\bar{u} - u_0|, \forall t \in I, \forall \bar{u}, u_0 \in D, \tag{3.7}$$

dove $I = [t_0 - s, t_0 + s]$.
In particolare $\phi(t, \bar{u})$ è continua come funzione in $\bar{u}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che risolvere $\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ è equivalente a risolvere $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau),\tau)d\tau$. Ora, poichè f è lipschitz con costante di lipschitz L, si ha che, $\forall \bar{u}, u_0 \in D_0$,

$$
\begin{aligned}
|\phi(t,\bar{u}) - \phi(t,u_0)| &= |\bar{u} - u_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\phi(\tau,\bar{u}),\tau) - f(\phi(\tau,u_0),\tau)]d\tau| \\
&\leq |\bar{u} - u_0| + L|\int_{t_0}^{t} |\phi(\tau,\bar{u}) - \phi(\tau,u_0)|d\tau|.
\end{aligned}
$$

La tesi segue direttamente dall'applicazione del lemma di Gronwell. □

La proposizione precedente può essere estesa : per esempio si ha che se f è continua in un intorno di (u_0,t_0) e se è $x \to f(x,t) \in C^k(u_0)$ allora ϕ è $C^k(u_0,t_0)$.
Un'altra conseguenza del lemma di Gronwell è la seguente proposizione.

Proposizione 3.3. *: Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ e supponiamo che esista una costante $c > 0$ per cui*

$$
|f(x,t)| \leq c(1 + |x|)\forall(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.8}
$$

Allora per ogni $(u_0,t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ esiste una e una sola soluzione $u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ del sistema $\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$.

Dimostrazione. La proposizione in altre parole da un criterio affinchè l'intervallo massimale di esistenza sia $\mathbb{R}$.
Per assurdo supponiamo che l'intervallo massimale d'esistenza sia $I = (a,b)$ con $b < \infty$. Sia $\phi(t,u_0)$ la soluzione con dato iniziale u_0 e chiamo questa soluzione $u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(\tau),\tau)d\tau$. Ora

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |u_0| + |\int_0^t f(u(\tau))d\tau| \leq |u_0| + |\int_0^t |f(u(\tau))|d\tau| \\
&\leq |u_0| + |\int_0^t c(1 + |u(\tau)|)d\tau| \leq |u_0| + c|t| + |c\int_0^t |u(\tau)|d\tau|.
\end{aligned}
$$

Poichè $I_{max} = (a,b)$ al posto di t posso sostituire il valore massimo che può assumere, cioè b. Quindi si ottiene

$$
|u(t)| = |u_0| + cb + |c\int_0^t |u(\tau)|d\tau|.
$$

Applicando il lemma di Gronwell con $\alpha = c$ e $\delta = |u_0| + cb$ si ha :

$$|u(t)| \leq (u_0 + cb)e^{c|t|} \leq (u_0 + cb)e^{cb} \equiv \mathbb{R}.$$

Ho mostrato che $\forall t \in I_{max}$ la soluzione $u(t)$ sta dentro una palla di raggio R ma questo è un assurdo poichè avevo posto $I_{max} = (a, b)$ come intervallo massimale d'esistenza e quindi $u(t)$ non può rimanere dentro un compatto, come mostrato nel *Teorema 2.5.* In conclusione I non èl'intervallo massimale d'esistenza e per l'arbitrarietà di t segue che $I = \mathbb{R}$. □

3.2 Lemma di Gronwell - forma differenziale

Lemma 3.4. ***Lemma di Gronwell*** *: sia I un intervallo, $\bar{t} \in I, L > 0$. Assumiamo che $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ sia tale che*

$$u'(t) \leq L|u(t)|, \forall t \in I. \tag{3.9}$$

Allora, se $u(\bar{t}) \leq 0$, si ha che $u(t) \leq 0$, per ogni $t \geq 0$; se $u(\bar{t}) \geq 0$, si ha che $u(t) \geq 0$, per ogni $t \leq 0$.

Dimostrazione. osserviamo che è sufficiente dimostrare il primo caso, infatti il secondo caso è analogo sostituendo u con $-u$. Sia $u(\bar{t}) \leq 0$ e sia $\tau = sup_{t \in I}|u(t)| \leq 0$. L'asserto è equivalente a dimostrare che $\tau = b = sup\, I$. Supponiamo per assurdo che $\tau < b$. Allora $u(t) = 0$ e per ogni $s \in (\tau, b)$ si ha che $u(t) > 0$ per ogni $t \in J = (\tau, s]$. Fissiamo un tale s, allora, da 3.9 segue che $u' \leq Lu$ su J, ossia,

$$u' - Lu \leq 0$$

che è equivalente, moltiplicando entrambi i membri per e^{-Lt}, a

$$(e^{-Lt}u)' \leq 0.$$

Integrando tale relazione tra τ e s otteniamo

$$e^{-Ls}u(s) \leq e^{-L\tau}u(\tau) = 0$$

che è una contraddizione essendo $u(s) > 0$.

□

Teorema 3.5. ***Teorema del confronto*** *: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2, f, g \in C(A, \mathbb{R})$ con g localmente lipschitz in x e uniformemente in t. Sia I un intervallo, $\bar{t} \in I$*

e siano $u, v \in C(I, \mathbb{R})$ *tali che* $(t, u(t)) \in A$ *e* $(t, v(t)) \in A$ *per ogni* $t \in I$ *e tali che*

$$\begin{cases} u'(t) \leq f(u(t), t) \\ v'(t) \geq g(v(t), t) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$f(u(t), t) \leq g(u(t), t). \tag{3.11}$$

Allora, se $u(\bar{t}) \leq v(\bar{t})$ *si ha che* $u(t) \leq v(t)$ *per ogni* $t \in I, t \geq \bar{t}$*; se* $u(\bar{t}) \geq v(\bar{t})$ *si ha che* $u(t) \geq v(t)$ *per ogni* $t \in I, t \leq \bar{t}$.

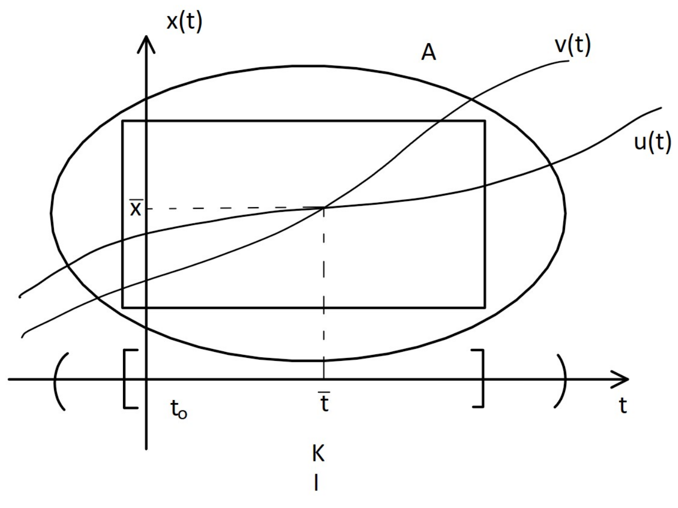
Dimostrazione. Siano $a < \bar{t} < b, a, b \in I$ e sia

$$\Gamma = (u(t), t)|t \in [a, b] \cup (v(t), t)|t \in [a, b], \tag{3.12}$$

e $K \subseteq A$ un qualunque compatto che contenga Γ. Sia $L > 0$ tale che $|g(x, t) - g(y, t)| \leq L|x - y|$, per ogni $(x, t), (y, t) \in K$. Allora, se $w = u - v$ segue che

$$\begin{aligned} w' = u' - v' &\leq f(u, t) - g(v, t) \leq g(u, t) - g(v, t) \\ &\leq |g(u, t) - g(v, t)| \leq L|u - v| = L|w|, \end{aligned}$$

e la tesi, per $t \in [a, b]$ segue dal 3.4 con u sostituito da w e I da $[a, b]$. Dall'arbitrarietà di a e b, segue la tesi per $t \in I$. $\square$



4 Dipendenza C^1 dai dati iniziali

4.1 Teorema della funzione implicita-TFI

Teorema 4.1. ***Teorema della funzione implicita*** *: Sia $(y,x) \in \mathbb{R}^{n+m} \to F(y,x) \in \mathbb{R}^n$ una funzione continua insieme alla sua matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ in un intorno di (y_0, x_0). Assumiamo che*

$$F(y_0,x_0) = 0 \quad det\frac{\partial F}{\partial y}(y_0,x_0) \neq 0. \tag{4.1}$$

Allora esiste una e una sola funzione g continua in un intorno di x_0 che soddisfi

$$g(x_0) = y_0 \quad F(g(x),x) = 0 \tag{4.2}$$

per ogni x in tale intorno.

4.2 TFI in dimensione infinita

Prendiamo due spazi di Banach E e F, possiamo considerare per esempio $E = C^1(I,\mathbb{R}^n)$ con I intervallo in $\mathbb{R}$ e con la norma $|u|_{C^1} = \sup_{t\in I}|u(t)| + \sup_{t\in I}|u'(t)|$, e $F = C^0(I,\mathbb{R}^n)$ con la norma del sup $|u|_\infty = sup_{t\in I}|u(t)|$.
Posso considerare:

- lo spazio delle funzioni continue $f : E \to F$ tali che $\forall\, \epsilon\, \exists\, \delta : |u-v|_{C^1} < \delta \implies |f(u)-f(v)|_\infty < \epsilon$;

- lo spazio delle funzioni lineari continue da E in F, su $L[E;F]$ metto la norma operatoriale $\|l\|^{op}_{E;F} = \sup_{h\in E}\frac{\|l[h]\|_F}{|h|_E} = \sup_{|h|_E=1}\|l[h]\|_F$ (ricorda $\|\frac{d}{dt}\|^{op} = 1$);

- lo spazio delle funzioni differenziabili: f è *differenziabile* in x_0 se $\exists\, l \in L(E;F)$ tale che $f(x_0+h) = f(x_0) + l(x_0)[h] + o(|h|_E)$. Osserviamo che df così definito si può calcolare tramite la derivata di Frechèt, cioè se f è differenziabile allora si esprime in termini delle derivate direzionali.

Affermo che f è $C^1(E;F)$ se $x \to l(x)$, che va da $E \to L(E;F)$ è continua.

Teorema 4.2. ***TFI in dimensione infinita*** *: Data $f : A \times E \to F$ differenziabile tale che :*

- *$f(x_0,y_0) = 0$;*

- $y \to d_y f(x, y)$ *è continua;*

- $\exists T : F \to E$ *tale che* $d_y f T = id_F$ *e* $T d_y f = id_E$

allora in un intorno di $(x_0, y_0) f(x, y) = 0 \iff$ *graf*$(y = g(x))$ *con* $g : B_r(x_0) \to B_\rho(y_0)$.

4.3 Dipendenza C^1 dai dati iniziali

La seguente proposizione asserisce che le soluzioni locali del problema di Cauchy dipendono in modo continuo dal dato iniziale, infatti vi dipendono in modo lipschitz con costante di lipschitz data da $e^{L|t-\bar{t}|}$.

Proposizione 4.3. ***Unicità e dipendenza continua dai dati iniziali:*** *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *un aperto e* $f = f(x, t)$ *una funzione localmente lipschitz rispetto a* x *e uniformemente in* t. *Siano, per* $i = 1, 2, (\bar{x}_i, \bar{t}) \in A$ *e* $u_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *soluzioni dei problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} u_i' = f(u_i(t), t), \forall t \in I \\ u_i(\bar{t}) = \bar{x}_i. \end{cases} \tag{4.3}$$

Allora per ogni $t \in I$

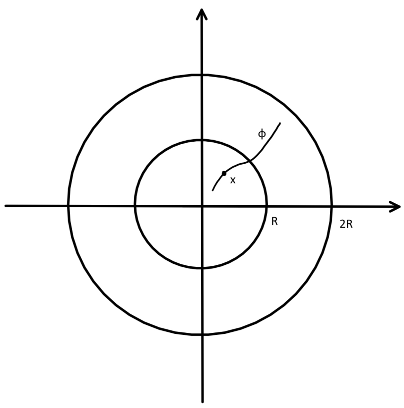
$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| e^{L|t-\bar{t}|}. \tag{4.4}$$

In particolare, se $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, *allora* $u_1(t) = u_2(t)$ *per ogni* $t \in I$.

Consideriamo

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = x \end{cases} \tag{4.5}$$

dove $f \in C^1(I \times U, \mathbb{R}^n)$, U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e I è un intervallo.



Supponiamo per semplicità che $U = B_{2R}(0)$ e $I = [-1; 1]$. Supponiamo che $\forall x \in B_R(0)$ valga il teorema di esistenza e unicità in I e che la soluzione di 3.5 $u(t) = \phi(t, x)$ sia tale che $|\phi(t, x) - x| < R$ (altrimenti, se questa condizione non è verificata rimpicciolisco I).
Se pongo

$$\psi(t, x) = \phi(t, x) - x$$

si ha che $\forall x \in B_R(0), t \to \psi(t, x)$, che va da $I \to B_R(0)$, è C^1 nel tempo e inoltre soddisfa

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, x + \psi(t, x))$$

cioè risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \psi' = f(t, x + \psi) \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

e tale soluzione è unica.

Teorema 4.4. ***Dipendenza C^1 dai dati iniziali*** : *ψ è C^1 rispetto a (t, x) in un intorno di $(0, 0)$.*

Dimostrazione. Potrei provare a determinare ψ con il Teorema della funzione implicita guardando al funzionale $G(\psi, x) = \psi' - f(t, x + \psi)$, che è C^1 in tutte le variabili. Ora dato $d_\psi G(0, 0)[h] = h' - f'(t, 0)h$ non so far vedere che è invertibile. Quindi conviene riscalare il tempo : data

$$\psi' - f(t, x + \psi) = 0$$

pongo, per $a \in [-1, 1]$

$$\gamma(t, x, a) = \psi(at, x) \tag{4.6}$$

che risolve $\forall t \in \frac{1}{a}I, \quad x \in B_R(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma(t, x, a)}{\partial t} &= a \frac{\partial \psi(\tau, x)}{d\tau}|_{\tau = at} \\ &= af(at, x + \psi(at, x)) \\ &= af(at, x + \gamma(t, x, a)) \end{aligned}$$

cioè in forma compatta

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - af(at, x + \gamma) = 0$$

Inoltre $\forall (x,a) \in B_R(0) \times [-1;1] t \to \gamma(t,x,a)$ è $C^1_0(I, B_R(0))$.
Consideriamo quindi il funzionale $F(\gamma, x, a) = \gamma' + af(at, x+\gamma)$.

$$F \in C^1\big(C^1_0(I, B_R(0)) \times B_R(0) \times [-1,1], C^0_0(I, B_R(0))\big).$$

Infatti :

- $d_\gamma F(\gamma, x, a)[h] = h' + af_x(at, x+\gamma)h$
- $F_x(\gamma, x, a) = af_x(at, x+\gamma)$
- $F_a(\gamma, x, a) = f(at, x+\gamma) + atf_t(at, x+\gamma)$.

Inoltre $d_\gamma F(0,0,0)[h] = h'$ che è invertibile.
Quindi esistono $\epsilon, r > 0$ ed esiste una mappa C^1 che va da

$$(-r, r) \times (-2\epsilon, 2\epsilon) \to C^1(I, B_R(0))$$

e manda $(x,a) \to \gamma(t,x,a)$ che risolve $F(\gamma, x, a) = 0$. Per costruzione $\gamma(t,x,a)$ è tale che $\gamma(\frac{t}{a}, x, a) = \psi(t,x,a)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \psi' = f(t, x+\psi) \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

in $|\frac{t}{a} \leq 1|$, quindi, per unicità, $\gamma(\frac{t}{a}, x, a) = \gamma(\frac{t}{A}, x, A)$, supponendo $a < A$ nell'intervallo $\frac{|t|}{a} < 1$. Sia quindi $A = \epsilon$, si ottiene quindi

$$\psi(t,x) = \gamma(\frac{t}{\epsilon}, x, \epsilon)$$

con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Per l'unicità γ risolve anche 4.5 data $\phi(t,x) = x + \psi(t,x)$ come avevamo posto all'inizio. $\square$

Proposizione 4.5. ***Dipendenza C^k dai dati iniziali*** *: Siano $W \subseteq E$ un sottinsieme di uno spazio vettoriale normato E e $f : W \to E$ un'applicazione di classe C^k. Sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $\phi(t, x_0)$ del problema di Cauchy associato è di classe C^k in $(t, x_0) \in I \times W$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si può fare per induzione. Infatti per $k = 1$ l'enunciato si riduce al 4.4 e quindi è soddisfatto. Assumiamo quindi che il risultato valga per k e mostriamo che allora esse deve valere anche per $k+1$. Introduciamo una variabile ausiliaria $u \in E$ e definiamo

$$z = (x, u) \in W \times E$$

scelto un sistema di coordinate in E, si avrà allora

$$z = (x, u) = (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n).$$

Consideriamo allora il sistema dinamico

$$\begin{cases} z' = F(z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

dove la funzione $F : W \times E \to E$ è definita come $F(z) = (f(x), Df(x)u)$, così che nel sistema di coordinate scelto essa avrà componenti

$$F(z) = \big(f_1(x), \dots, f_n(n), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)u_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)u_j\big)$$

mentre $z_0 = (x_0, u_0)$ con $u_0 \in E$ arbitrario rappresenta il dato iniziale. Si noti che se $f \in C^{k+1}$ allora F è di classe C^k: quindi per ipotesi induttiva la soluzione di 4.7 è di classe C^k. Tale soluzione $\phi(t, z_0)$ può però essere espressa in funzione della soluzione $\psi(t, x_0)$ del sistema precedente. Risulta infatti

$$\phi(t, z_0) = (\psi(t, x_0), D_0\psi(t, x_0)u_0)$$

dove $[D_0\psi(t, x_0)]_{ij} = \frac{\partial \psi_i(t,x_0)}{\partial x_{0j}}$. Infatti, per derivazione esplicita della precedente precedente formula si vede che questa risolve $z' = F(z)$, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_0\psi(t, x_0)u_0 &= D_0 \frac{d}{dt}\psi(t, x_0)u_0 = D_0\psi'(t, x_0)u_0 \\ &= D_0 f(\psi(t, x_0))u_0 = Df(\psi(t, x_0))D_0\psi(t, x_0)u_0 \end{aligned}$$

dal momento che, essendo, per ipotesi induttiva, la funzione ψ di classe $k \geq 1$ in ciascuno dei suoi argomenti, l'ordine dei due operatori di derivazione $\frac{d}{dt}$ e D_0 si può scambiare per il Teorema si Schwarz.
Si può anche vedere esplicitamente che le condizioni iniziali sono verificate notando che

$$D_0\psi(t, x_0)u_0|_{t=t_0} = u_0$$

poichè

$$[D_0\psi(t, x_0)]_{ij}|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial x_{0j}}(x_0 + \int_{t_0}^{t} ds f_i(\psi(s, x_0)))|_{t=t_0} = \delta_{ij}$$

così che $\phi(t, z0)$ è una soluzione di 4.7.
In conclusione $\phi(t, z_0)$ è di classe C^k : segue che $\psi(t, x_0)$ deve essere di classe C^{k+1} in x_0 poichè $D\psi(t, x_0)$ è di classe C^k in x_0. Segue quindi che $\psi(t, x_0)$ è di classe C^{k+1} in t, cioè $\psi(t, x_0)$ è C^{k+1} in entrambi i suoi argomenti. $\square$

4.4 I flussi delle ODE come cambi di coordinate

Dato che, almeno per tempi piccoli e in una piccola palla di dati iniziali, $(t, x) \to \phi(t, x)$ è C^1 in tutti gli argomenti posso usare i flussi delle ODE per generare cambiamenti di coordinate.
Sia $f \in C^1(I \times U, \mathbb{R}^n)$ e consideriamo

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = f(\tau, \phi) \\ \phi(0) = x. \end{cases} \tag{4.8}$$

La mappa $(\tau, x) \to \phi(\tau, x)$ è $C^1((-\epsilon, \epsilon) \times B_r(x_0), \mathbb{R}^n)$. Se fisso τ_0 piccolo considero la mappa che a x associa $y = \phi(\tau_0, x)$. Questa mappa è un *diffeomorfismo*, cioè una mappa C^1 con inversa C^1.
Considero ora sistemi autonomi della forma

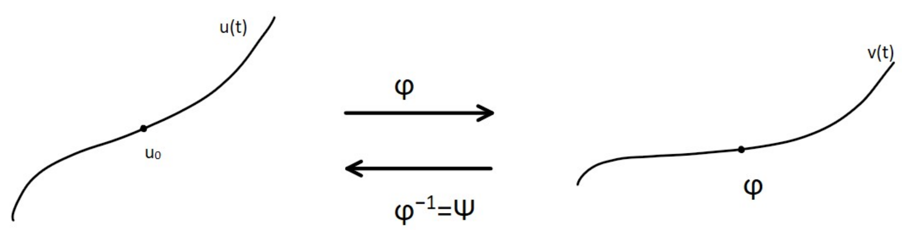
$$x' = V(x)$$

e un diffeomorfismo

$$x = \phi(y)$$

dove $\phi(y)$ risolve

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = f(\phi(y)) \\ \phi(0) = y. \end{cases}$$



Ora $x = \phi(y) \implies x' = J\phi(y)y'$ ma $x' = V(x)$, quindi

$$J\phi(y)y' = V(x) = V(\phi(y))$$

cioè l'equazione differenziale che deve risolvere y è

$$\begin{cases} y' = (J\phi(y))^{-1}V(\phi(y)) \\ y(0) = \phi^{-1}(x_0). \end{cases} \tag{4.9}$$

Osserviamo che l'inversa ϕ^{-1} è ben definita dato ϕ un diffeomorfismo.
Definiamo ora
$$W(y) = (J\phi(y))^{-1}V(\phi(y)) = \phi_* V$$
il *pull-back del campo vettoriale*. Nelle nuove coordinate l'equazione per y è $y' = W(y)$ e quindi dato $x = \phi(y)$ allora le soluzioni $x(t)$ di $x' = V(x)$ sono le $\phi(y(t))$ dove $y(t)$ risolve $y' = W(y)$. Questo vuol dire che un modo efficiente di generare i cambiamenti di coordinate è tramkite il flusso al tempo $t = 1$ di un'equazione differenziale.
Osserviamo però che se non conosciamo $\phi(y)$ non possiamo scrivere il nuovo campo vettoriale, vorremmo quindi un modo, almeno iterativo, per calcolare W senza conoscere $\phi(y)$. Per farlo definiamo innanzitutto il *commutatore* tra f e g con $f(x), g(x)$ campi vettoriali C^∞ come
$$[f, g] = (Jg)(f) - (Jf)(g)$$
dove Jg è lo Jacobiano di g. Dato f campo vettoriale possiamo considerare l'*aggiunto*
$$ad(f)[V] = [f, V] = (JV)f - (Jf)V$$
che è un operatore che al campo vettoriale V associa il campo vettoriale $ad(f)[V]$.

Teorema 4.6. ***Esponenziale di Lie*** : *Dato*
$$\begin{cases} x' = V(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \longmapsto \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases}$$
che definisce $x = \phi(\tau_0, y)$ e dato $W(y)$ com definito sopra, allora, poichè la serie converge totalmente si ha
$$\begin{aligned} W(y) &= e^{\tau_0 adf(y)}V(y) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{\tau_0^k}{k!}[f, f, \dots, [f, V]] \\ &= \sum_{k=0}^{N} (adf)^k \frac{\tau_0^k}{k!} + o(\tau_0^N). \end{aligned}$$

Cenni della dimostrazione : Si considera $W(\tau, y) = (\phi_*(\tau)V)(y)$ con $\tau \in [-\epsilon, \epsilon]$ dove $\phi(\tau, y)$ risolve
$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = f(\phi) \\ \phi(\tau = 0) = y. \end{cases}$$

Derivando $W(\tau, y)$ si ottiene che

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \phi_*(\tau)([f, V]).$$

Si può dimostrare che

$$\phi_*(\tau)([f, V]) = [\phi_* f, \phi_* V] = [\phi_* f, W(\tau, y)] = [f(y), W(\tau, y)].$$

Da questo segue direttamente che la soluzione di

$$\begin{cases} \partial W(\tau, y) = [f(y), W(\tau, y)] = (adfW(\tau))(y) \\ W(0, y) = V(y) \end{cases} \tag{4.10}$$

è $W(\tau, y) = e^{\tau[f(y), \quad]}V(y)$.

5 Rettificazione di Poincarè

5.1 Rettificazione di Poincarè-scatola di flusso

Consideriamo il sistema autonomo $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ e scegliamo un dato iniziale x_0 non singolare tale che $f(x_0) \neq 0$ con f C^1 almeno in un intorno di x_0. A meno di un cambiamento di coordinate affine (traslazione + rotazione) e indipendente dal tempo assumiamo che $x_0 = 0$ e $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Prendiamo una sezione $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\}$ e consideriamo una palla intorno a x_0 di raggio δ ($B_\delta(x_0)$). Voglio un cambiamento di coordinate in $B_\delta(x_0)$ che mi semplifichi il problema iniziale di Cauchy.

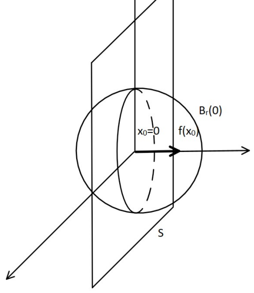
Per ogni punto $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in S \cap B_\delta(x_0)$ e per ogni $\tau \in [-a, a]$ si consideri la mappa

$$(\tau, \xi) \to \phi(\tau, \xi)$$

con ϕ soluzione di

$$\begin{cases} \phi' = f(t, \phi) \\ \phi(t_0) = \xi. \end{cases}$$

Voglio mostrare che $(\tau, \xi) \to x = \phi(\tau, \xi)$ è un diffeomorfismo e voglio usare questo come cambio di coordinate.



Teorema 5.1. ***Rettificazione di Poincarè-scatola di flusso****: Sia dato un campo vettoriale descritto come sopra, esiste $\delta_1 \geq 0$ tale che nella palla $B_{\delta_1}(0)$ esiste un cambio di coordinate $x \to (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ invertibile che coniuga il sistema iniziale a* $\begin{cases} \tau' = 1 \\ \xi' = 0 \end{cases}$

Dimostrazione. Per il *Teorema 4.3* la mappa $(\tau, \xi) \to \phi(\tau, \xi)$ è C^1 in entrambi i suoi argomenti, voglio quindi mostrare che tale mappa è invertibile, cioè che dato un x riesco a trovare un unico ξ tale che se parto da ξ e mi muovo lungo τ trovo x. Lo mostro usando il Teorema della funzione implicita-TFI. $\phi(t, x)$ è soluzione del problema di Cauchy iniziale quindi posso scriverlo in forma integrale come

$$\phi(t, x) = \xi + \int_0^\tau f(\phi(\tau', \xi))d\tau'$$

. Sia $x = G(\xi, \tau)$ e calcoliamone le derivate rispetto alle sue variabili:

- $\frac{\partial G_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} + \int_0^\tau f_x(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}d\tau' \quad \forall j = 2, \cdots, n$
- $\frac{\partial G_i}{\partial \tau} = f_i(\phi(\tau, \xi))$.

Ora mostriamo che sono invertibili localmente vicino a $\xi = 0$ e $\tau = 0$ con il TFI:

- $G(0, 0) = 0$
- $\frac{\partial G_i}{\partial \xi_j}_{|(0,0)} = \delta_{ij}$
- $\frac{\partial G_i}{\partial \tau} = f_i(0)$.

Quindi $JG(0, 0)$ è invertibile $\implies$ si può applicare il TFI $\implies$ esiste una piccola palla $B_{\delta_1}(0)$ in cui esiste una funzione $x \to (\tau(x), \xi(x))$ che va da $B_{\delta_1} \to S \cap B_\delta(0) \times [-\epsilon, \epsilon]$ e che inverte $(\xi, \tau) \to x = \phi(\xi, \tau)$. Tale mappa è C^1 (segue dal TFI) e quindi questo cambio di coordinate è un diffeomorfismo Scriviamo ora il flusso nelle variabili τ e ξ :

$$x_0 = \phi(\tau_0, \xi_0) \implies \phi(t, x_0) = \phi(t, \phi(\tau_0, \xi_0)) = \phi(t + \tau_0, \xi_0).$$

Quindi ho che

$$(\xi_0, \tau_0) \to (\xi_0, \tau_0 + t)$$

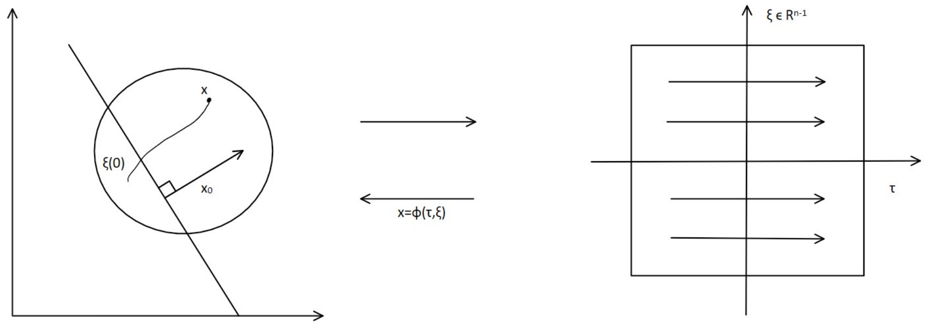
$\implies$ nelle coordinate ξ e τ l'equazione differenziale che da il flusso è

$$\begin{cases} \tau' = 1 \\ \xi' = 0. \end{cases}$$

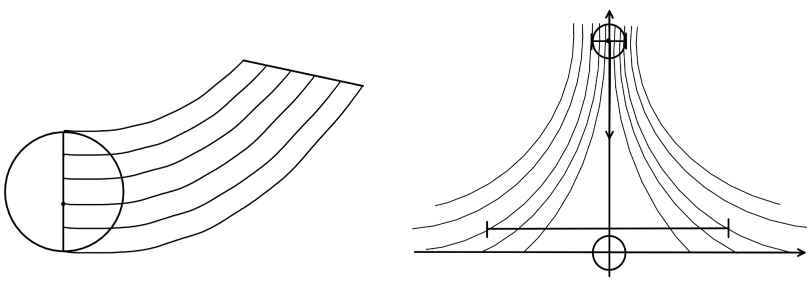
Questo vuol dire che se prendo un punto in cui il campo non è nullo esiste un cambiamento di coordinate le cui linee di flusso sono dei moti rettilinei uniformi, infatti il campo vettoriale scritto rispetto a τ e ξ è di un moto rettilineo uniforme perchè :

$$\begin{cases} \tau' = 1 \\ \xi' = 0 \end{cases} \implies \phi(t,x) = \phi(t, \phi(\tau(x), \xi(x))) = \phi(t + \tau(x), \xi(x)). \tag{5.1}$$

□



Una naturale conseguenza del Teorema di Rettificazione è domandarsi se questo ragionamento può essere prolungato. Per esempio, considerato un punto non singolare x_0 ed una sezione S si può considerare il tubo di flusso $\phi(t, S \cap B_\delta)$, con $t \leq t_0$ e rettificare il flusso in tale dominio.



5.2 Osservazioni e conseguenze

Se f è un campo hamiltoniano, cioè un campo vettoriale indotto da una funzione hamiltoniana (trasformata di Legendre della lagrangiana di un sistema) allora la mappa $(\tau, \xi) \to x(\tau, \xi)$ è simplettica. Questo vuol dire che vicino a un punto non singolare qualsiasi equazione differenziale ha $n-1$ costanti del moto locali ma questo non implica che tali costanti siano definite su tutto lo spazio delle fasi. In un sistema hamiltoniano di dimensione $2N$ ci sono $2N-1$ costanti del moto locali, per il Teorema di Caratheodory-Jacobi, ma al più N costanti del moto globali in involuzione tra loro, cioè fino a che siamo nella piccola palla in cui valgono le ipotesi del *Teorema 5.1* ci sono molte costanti del moto, però, dato che $f(x_0) \neq 0$ nella palla $B_\delta(0)$ la dinamica resta per tempi brevi, infatti appena si esce da tale palla si perdono le costanti del moto.
Trovare un cambio di coordinate che semplifica il campo vettoriale in un intorno di un punto singolare è più complicato. In particolare se il punto fisso è stabile trovare una forma normale da risultati per tempi lunghi $\to \infty$.
Se per esempio ho una sorgente e trovo un diffeomorfismo ϕ che coniuga la dinamica a un moto rettilineo radiale la forma normale mi da informazioni finchè resto nell'intorno, infatti dopo un tempo finito la dinamica esce dalla palla in cui si può rettificare.
Se invece ho delle orbite periodiche e trovo un diffeomorfismo ϕ la forma normale mi da informazioni sulla dinamica del sistema a tempi infiniti perchè la dinamica non uscirà mai dalla palla viste le orbite periodiche. In questo caso si avranno come costanti del moto le distanze dall'origine.

6 Teorema di Frobenius

Il Teorema di Frobenius può essre visto come generalizzazione del Teorema della scatola di flusso al caso in cui si abbiano più campi vettoriali, cioè informalmente si usano le linee di flusso come coordinate.
La prima osservazione evidente è che i campi vettoriali, almeno nell'intorno in cui voglio effettuare la rettificazione, devono essere indipendenti. Questa condizione non è però sufficiente, una proprietà fondamentale per la rettificazione è che "le coordinate non devono dipendere dal percorso", cioè deve valere che $\phi_i(t_i) \circ \phi_j(t_j) = \phi_j(t_j) \circ \phi_i(t_i) \forall t_i, t_j \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j = 1, \cdots, M.$
Prima di enunciare il Teorema di Frobenius vediamo come la condizione scritta sopra si può caratterizzare in termini del campo vettoriale.

Teorema 6.1. *: Dato $\mathbb{R}^n$ e dati M campi vettoriali $f_1, f_2, \ldots, f_M$, con $M \leq n$, definiti su $\mathbb{R}^n$ e di classe C^1, la condizione*

$$[f_i, f_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, M \tag{6.1}$$

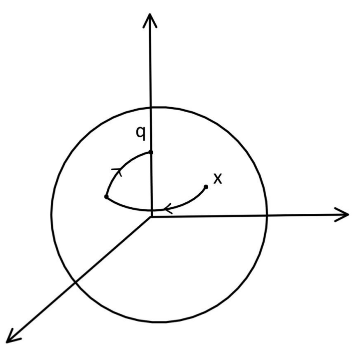
è soddisfatta se e solo se i gruppi a un parametro di diffeomofismi associati soddisfano le relazioni

$$\phi_i(t_i) \circ \phi_j(t_j) = \phi_j(t_j) \circ \phi_i(t_i) \quad \forall t_i, t_j \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, M. \tag{6.2}$$

La dimostrazione del teorema 6.1 si può trovare nel cap.63 del Gentile (Teorema 63.7).

Teorema 6.2. ***Teorema di Frobenius*** *: Dato $\mathbb{R}^n$ e dati M campi vettoriali di classe C^1 linearmente indipendenti $f_1, \cdots, f_M$, con $M \leq n$, definiti su (un intorno U di) $\mathbb{R}^n$, la condizione 6.1 è condizione necessaria e sufficiente perchè si possa scegliere un sistema di coordinate locali $q = (q_1, \cdots, q_n)$ tali che sia possibile scegliere un intorno $U' \subset U$ in cui ogni campo vettoriale f_i sia*

$$f_i = \frac{\partial}{\partial_{q_i}}, \quad \forall i = 1, \cdots, M. \tag{6.3}$$



In conlusione in queste coordinate le equazioni differenziali $x' = f_i(x)$ vanno in $q' = e_i$ con $i = 1, \cdots, M$. Notare che se $M = 1$ allora il Teorema di Frobenius coincide con ilTeorema di Poincarè dove $q = (\tau, \xi)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che la condizione 6.1 è necessaria. Se esiste un sistema di coordinate in cui ogni campo vettoriale f_i sia nella forma 6.3 allora i campi f_i sono dati da $\{\delta_{ik}\}_{k=1}^n$ e quindi le $\{\sum_{k=1}^n (f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h})\}_{k=1}^n$, che rappresentano il campo $[f_i, f_j]$ sono identicamente nulle, cioè $[f_i, f_j] = 0$, per ogni $i, j = 1, \cdots, M$.
Dimostriamo ora che le condizioni 6.1 sono anche sufficienti perchè valga la rappresentazione 6.3. Basta dimostrare che la condizione 6.1 implica che esiste un sistema di coordinate in cui il gruppo di trasformazioni associato a ogni campo vettoriale f_i sia dato da

$$q_i \to q_i + t, \quad q_k \to q_k, \quad \forall k \neq i. \tag{6.4}$$

perchè queste sono le soluzioni di $q' = e_i$ con $i = 1, \cdots, M$.
Ricordiamo che M campi vettoriali $f_1, \cdots, f_M$ sono linearmente indipendenti se la relazione $c_1 f_1 + \cdots + c_M f_M = 0$ è soddisfatta se e solo se $c_m = 0 \quad \forall m = 1, \cdots, M$.
Dato che i campi vettoriali sono indipendenti in U posso scegliere un punto x_0 e un insieme di coordinate in modo che

$$\xi_i(x_0) = e_i, \quad \forall i = 1, \cdots, M. \tag{6.5}$$

Possiamo fissare l'origine di tale sistema in modo che si abbia $x_0 = 0$.
Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un intorno di x_0 che dovrà essere scelto così piccolo che le diseguaglianze scritte sotto in x_0 valgano per continuità anche in U e sia $x \in U$.
Consideriamo le M funzioni

$$\begin{aligned}
&F_i(x, t_1, \cdots, t_M) = x_i + \int_0^{t_1} dt'_1 f_{1i}(\phi_1(x, t'_1)) \\
&+ \int_0^{t_2} dt'_2 f_{2i}(\phi_2(\phi_1(x, t_1), t'_2)) + \cdots \\
&+ \int_0^{t_M} dt'_M f_{Mi}(\phi_M(\phi_{M-1}(\cdots \phi_1(x, t_1), \cdots, t_{M-1}), t'_M)), \quad i = 1, \cdots, M.
\end{aligned}$$

Le funzioni $F_i(x, t_1, \cdots, t_M)$ rappresentano i valori delle prime M coordinate del punto che si ottiene da x applicando successivamente le M trasformazioni ϕ_i che rappresentano i diffeomorfismi $\phi_i(t_i)$ nelle coordinate x.
In altre parole si ha

$$F_i(x, t_1, \cdots, t_M) = \phi_{Mi}(\phi_{M-1}(\cdots, \phi_1(x, t_1), \cdots, t_{M-1}), t_M),$$

infatti

$$\phi_1(x,t_1) = x + \int_0^{t_1} dt'_1 f_1(x,t'_1)$$

e quindi

$$\phi_2(\phi_1(x,t_1),t_2) = \phi_1(x,t_1) + \int_0^{t_2} dt'_2 f_2(\phi_2(\phi_1(x,t_1),t'_2))$$

e così via.

Tenendo conto che

- $F_i(x_0, 0, \cdots, 0) = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, M$
- $[\frac{\partial F_i}{\partial t_j}](x_0, 0, \cdots, 0) = f_i(x_0)\delta_{ij}$, dove $f_i(x_0) \neq 0$, per $i = 1, \cdots, M$

così che

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1}(x_0, 0, \cdots, 0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial t_M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial t_1}(x_0, 0, \cdots, 0) & \cdots & \frac{\partial F_M}{\partial t_M}(x_0, 0, \cdots, 0) \end{pmatrix} = f_1(x_0) \cdots_M (x_0) \neq 0, \tag{6.6}$$

possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che esistono M funzioni

$$\tilde{t}_1(x), \cdots, \tilde{t}_M(x) \tag{6.7}$$

tali che

$$F_i(q, \tilde{t}_1(x), \cdots, \tilde{t}_M(x)) = 0. \tag{6.8}$$

L'esistenza delle funzioni 6.7 che rendono valide le identità 6.8 significa che si possono fissare i valori dei parametri $t_1, \cdots, t_M$ in modo tale che il punto x finisca in un punto che ha componenti nulle lungo le direzioni dei primi M assi coordinati.

Dal Teorema 6.1 segue che, sotto l'ipotesi 6.1 sui campi vettoriali $f_1, \cdots, f_M$, i gruppi a un parametro corrispondenti verificano le relazioni 6.2: l'ordine in cui le trasformazioni sono applicate non è importante e quindi, senza perdere di generaltà, possiamo supporre che sia prima applicata la trasformazione $x \to \phi_1(x,t_1)$, poi la trasformazione $\phi_1(x,t_1) \to \phi_2(\phi_1(x,t_1),t_2)$ e così via. In particolare le funzioni 6.7 dipendono solo da x e non dall'ordine in cui le trasformazioni sono applicate: quindi i valori $\tilde{t}_1(x), \cdots, \tilde{t}_M(x)$ sono fissati univocamente da x. Consideriamo ora la trasformazione di coordinate

$$\psi : (x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_n) \tag{6.9}$$

definita da

$$y_i = \psi_i(x) := \tilde{t}_i(x), \quad \forall i = 1, \cdots, M \tag{6.10}$$

e

$$
\begin{aligned}
y_i = \psi_i(x) := x_i &+ \int_0^{\tilde{t}_1(x)} dt'_1 f_{1i}(\phi_1(x, t'_1)) \\
&+ \int_0^{\tilde{t}_2(x)} dt'_2 f_{2i}(\phi_2(\phi_1(x, \tilde{t}_1(x)), t'_2)) + \cdots \\
&+ \int_0^{\tilde{t}_M(x)} dt'_M f_{Mi}(\phi_M(\phi_{M-1}(\cdots, \phi_1(x, \tilde{t}_1(x)), \cdots, \tilde{t}_{M-1}(x)), t'_M)),
\end{aligned}
$$

per $i = M+1, \cdots, n$.
Per costruzione le $\psi_i(x)$ definiscono le ultime $n-M$ coordinate del punto che si ottiene da x applicando successivamente le M trasformazioni $x \to \phi_i(x, t_1)$ per $t_i = \tilde{t}_i(x)$ (per costruzione le prime M coordinate sono nulle). Quindi si ha

$$
\psi_i(x) = \phi_{Mi}(\phi_{M-1}(\cdots \phi_1(x, \tilde{t}_1(x)), \cdots, \tilde{t}_{M-1}(x)), \tilde{t}_M(x)), \tag{6.11}
$$

per $i = M+1, \cdots, n$.
Si verifica innanzitutto che

$$
\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x_0) = \delta_{ij}, \quad i = M+1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{6.12}
$$

mentre per $i, j = 1, \cdots, M$ si ha

$$
0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x_0) = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{M} f_{ki}(x_0) \frac{\partial \tilde{t}_k}{\partial x_j}(x_0) = \delta_{ij} + f_i(x_0) \frac{\partial \tilde{t}_i}{\partial x_j}(x_0), \tag{6.13}
$$

così che utilizzando la 6.5 e l'equazione successiva per $F_i(x, t_1, \cdots, t_M)$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_M}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_M}{\partial x_M}(x_0) \end{pmatrix} &= det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial x_M}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{t}_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \tilde{t}_M}{\partial x_M}(x_0) \end{pmatrix} \\
&= (-1)^M det \begin{pmatrix} \frac{1}{f_1(x_0)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{f_M(x_0)} \end{pmatrix} \neq 0.
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

Se consideriamo la matrice jacobiana

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_M}(x_0) & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{M+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial\psi_M}{\partial_M}(x_0) & \frac{\partial\psi_M}{\partial x_{M+1}}(x_0) & \cdots & \frac{\partial psi_M}{\partial x_n}(x_0) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

della trasformazione data dalla 6.10 per $i = 1, \cdots, M$ e dall'equazione successiva per $i = M+1, \cdots, n$, il suo determinante è dato dalla 6.14 e quindi non è nullo. Inoltre, poichè le funzioni 6.7 hanno la stessa regolarità dei campi vettoriali, la trasformazione 6.10 non solo è non singolare ma ha anche la stessa regolarità dei campi vettoriali.
Si verifica facilmente, a partire dalle definizioni di $\tilde{t_i}$ e di y_i, che, per ogni $i = 1, \cdots, M$ e per ogni $k = 1, \cdots, n$, risulta

$$\frac{dy_i}{dt_i} = \frac{d\tilde{t_i}}{dt_i} = -1, \quad \frac{dy_k}{dt_i} = 0, \quad k \neq i, \tag{6.16}$$

così che, nelle coordinate $q \to -y$, il gruppo delle trasformazioni associate al campo vettoriale f_i assume la forma

$$q'_i \to q'_i + t_i, \quad q'_k \to q'_k, \quad k \neq i \tag{6.17}$$

Questo dimostra l'asserto. $\square$

Il Teorema 6.2 implica che, se i campi $f_1, \cdots, f_M$ commutano, allora è possibile utilizzare i parametri dei sottogruppi di trasformazioni associati ai campi vettoriali come coordinate indipendenti, almeno in un intorno abbastanza piccolo U'.

Riferimenti bibliografici

[1] Ambrosetti A. : Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie

[2] Chierchia L. : Analisi Matematica.n , Dispense per i corsi AM210/AM220

[3] Coddington E., Levinston N.:Theory of ordinary differential equation, McGraw-Hill, 1955

[4] Gentile G., Introduzione ai sistemi dinamici-Volume 1