Algebra commutativa

# Esercizi sulla localizzazione

**Esercizio 1.** Siano $B$ una $A$-algebra, $N$ un $B$-modulo e $M$ un $A$-modulo. Dimostrare l'esistenza di un isomorfismo di $A$-moduli

$$\varphi : N \otimes_B (B \otimes_A M) \to N \otimes_A M,$$

tale che $\varphi(n \otimes (b \otimes m)) = (bn) \otimes m)$ per ogni $n \in N$, $b \in B$, $m \in M$.

**Esercizio 2.** Dimostrare che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}$ è isomorfo ad un sottoanello di $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$.

**Esercizio 3.** Sia $A$ un anello e $S$ una sua parte moltiplicativa. Si consideri inoltre l'omomorfismo $\varphi : A \to S^{-1}A$ tale che $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ per ogni $a \in A$.

(i) Dimostrare che ogni ideale di $S^{-1}A$ è estensione tramite $\varphi$ di un ideale di $A$. Dedurne che se $A$ è un PID, allora lo sono anche tutte le sue localizzazioni.

(ii) Dimostrare che un ideale $I \subset A$ è la contrazione tramite $\varphi$ di un ideale di $S^{-1}A$ se e solo se nessun elemento di $S$ è un divisore dello zero nell'anello quoziente $A/I$.

(iii) Esibire un esempio di $A$ e $S$ e di un ideale $I \subset A$ tale che $(I^e)^c$ contenga strettamente $I$.

**Esercizio 4.** Sia $A$ un anello e $S$ una sua parte moltiplicativa. Si consideri inoltre l'omomorfismo $\varphi : A \to S^{-1}A$ tale che $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ per ogni $a \in A$.

(i) Dimostrare che l'estensione tramite $\varphi$ di un ideale $I$ di $A$ è propria (cioè non coincide con tutto $S^{-1}A$) se e solo se $I \cap S = \emptyset$.

(ii) Dimostrare che l'estensione tramite $\varphi$ di un ideale massimale di $A$, se propria (cioè quando non coincide con tutto $S^{-1}A$), è un ideale massimale di $S^{-1}A$.

(iii) Esibire un esempio in cui l'estensione tramite $\varphi$ di un ideale massimale di $A$ coincide con tutto $S^{-1}A$.

**Esercizio 5.** Sia $A$ un anello e si considerino una sua parte moltiplicativa $S$ e un suo ideale $I$ tali che $I \cap S = \emptyset$.

(i) Dimostrare che $I$ è contenuto in un ideale primo $P$ di $A$ tale che $P \cap S = \emptyset$ e $S^{-1}P$ è un ideale massimale in $S^{-1}A$.

(ii) Far vedere con un esempio che $I$ non è necessariamente contenuto in un ideale massimale $m$ di $A$ tale che $m \cap S = \emptyset$.

**Esercizio 6.** Nell'anello $A = \mathbb{R}[x, y]/(xy)$ si consideri l'ideale $P = (x-1)$. Dimostrare che $P$ è un ideale massimale e che la localizzazzione $A_P$ è isomorfa alla localizzazione $\mathbb{R}[x]_{(x-1)}$. Cosa vuol dire questo geometricamente?

**Esercizio 7.** Sia $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e si fissi $f \in A$. Dare un'interpretazione geometrica della localizzazione $A_f$.

**Esercizio 8.** Sia $A$ un anello. Dimostrare che l'anello $A$ è ridotto (cioè non ha elementi nilpotenti non nulli) se e solo se la localizzazione $A_P$ è ridotta per ogni ideale primo $P \subset A$.

**Esercizio 9.** (ii) Dimostrare che se $A$ è un dominio d'integrità allora lo sono anche tutte le sue localizzazioni $A_P$ con $P \subset A$ ideale primo.

(iii) Esibire un esempio di un anello $A$ che non è un dominio d'integrità nonostante lo siano tutte le sue localizzazioni $A_m$ con $m \subset A$ ideale massimale.

(iii) Dare un'interpretazione geometrica di (i) e (ii).