Algebra commutativa

Esercizi su moduli

Esercizio 1. Siano A un dominio d'integrità e $I \subset A$ un suo ideale non nullo. Dimostrare che I è un A-modulo libero se e sole se è principale.

Esercizio 2. Sia N un sottomodulo dell'A-modulo M. Dimostrare che:

(i) Se N e M/N sono finitamente generati, lo è anche M.

(ii) Se M è finitamente generato, lo è anche M/N.

(iii) Se M è finitamente generato, N non è necessariamente finitamente generato

Esercizio 3. Siano I e J due ideali dell'anello A.

(i) Dimostrare l'esistenza di una successione esatta di A-moduli

$$0 \to I \cap J \to I \oplus J \to I + J \to 0. \tag{1}$$

(ii) Dimostrare l'esistenza di una successione esatta di A-moduli

$$0 \to A/(I \cap J) \to A/I \oplus A/J \to A/(I + J) \to 0. \tag{2}$$

(iii) Far vedere con un esempio che in generale le due successioni (1) e (2) non splittano.

Esercizio 4. Siano I e J due ideali dell'anello A. Dimostrare che $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I + J)$ come A-algebre.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti prodotti tensoriali: $\mathbb{Z}_6 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ e $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Esercizio 6. Calcolare $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ per $n > 0$.

Esercizio 7. Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e si indichi con $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ il duale di V.

(i) Dimostrare l'esistenza di un'applicazione lineare iniettiva $\phi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$.

(ii) Dimostrare che ϕ è un isomorfismo se uno tra V e W ha dimensione finita.

(iii) Far vedere con un esempio che ϕ non è sempre un isomorfismo.