Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

TUTORATO 4
17 MARZO 2015

1. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a := (1, 1, -1)$, $b := (2, -1, 1)$ e sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c := (1, 2, -1), d := (-1, -1, 2)$.
   Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

2. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
   $$W_1 := \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}.$$
   - Si verifichi che W_1 é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
   - Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
     $a := (0, 3, 1, -2, 0)$, $b := (0, 0, 2, 1, 1)$, $c := (0, 6, -10, -10, -6)$, $d := (0, 3, 7, 1, 3)$
     se ne determini una base e la dimensione.
   - Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$.
   - Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.

3. Calcolare il rango delle seguenti matrici:
   - $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;
   - $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;
   - $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Siano U e V sottospazi vettoriali di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$.
   - Provare che $U \cap V \neq \emptyset$;
   - Determinare tutte le possibili dimensioni di $U \cap V$ e costruire un esempio per ciascuna di esse.

5. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 2t = 0\},$$

$$K :=< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) > .$$

- Determinare la dimensione e una base per H e K;
- Determinare la dimensione e una base per $H \cap K$ e $H + K$.
- Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene ad $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e un vettore di K.

6. Data la matrice $A := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

- Provare che i sottoinsiemi

$$F := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = XA\},$$

$$G := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = -XA\}$$

sono spazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.

- Trovare una base per $F + G$.
- Data la matrice $C := \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-2 \end{pmatrix}$ stabilire per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F + G$.
- Assegnato ad h un tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ tali che $C = C_1 + C_2$.