Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Tutorato 3
3 Marzo 2015

1. Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Nel caso siano dipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.
Se possibile, si trovi una combinazione lineare che dia come risultato $(1, 1, 1)$
    - $v_1 = (1, 3, 2),\ v_2 = (2, 1, -1),\ v_3 = (1, 2, -2)$
    - $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (2, 0, 6),\ v_3 = (2, 3, 0)$
    - $v_1 = (4, 2, 1),\ v_2 = (2, 1, 1),\ v_3 = (4, 0, 5),\ v_4 = (1, 1, 0)$
    - $v_1 = (3, -5, 2),\ v_2 = (1, 3, -1)$

2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ é una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

3. Si mostri che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:
a)$\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \text{ tc } a, b \in \mathbb{Q}\}$, campo dei razionali gaussiani.
b)$\mathbb{R}$, il campo dei reali.
Inoltre mostrare che $\mathbb{Q}(i)$ ha una base con due elementi e $\mathbb{R}$ (come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$) non ha una base finita.

4. Si determinino le coordinate dei vettori di
$v_1 = (3, 2, -5),\ v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}),\ v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
rispetto alle seguenti basi:
    - (a) La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
    - (b) La base $B = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$

5. Dati i seguenti vettori:
$a := (1; 3; 2)$
$b := (-2; k - 6; k + 4)$
$c := (-1; k - 3; k^2 + k + 1)$
$d := (0; -2; k - 1)$
    - Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a, b, c\}$ sono linearmente indipendenti.

- Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a, b, c\}$.

6. Si risolva, se é compatibile, il seguente sistema di equazioni:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

7. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:
$a := (1, 1, 0)$, $b := (0, 1, -1)$, $d := (2, 3, -1)$.
Considerata l'equazione vettoriale:
$x_1 a + x_2 b + x_3 c = d$
determinare, se possibile, un vettore $c := (x, y, z)$ nei seguenti casi:

    - L'equazione vettoriale non ammette soluzioni;
    - L'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;
    - L'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni;
    - quand' é possibile determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.

8. Si dica se l'insieme delle coppie reali (complesse) (x, y) soddisfacenti alla relazione $x^2 + y^2 = 0$ é un sottospazio vettoriale di R^2 ($\mathbb{C}^2$).

9. Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine n (reali o complesse):

    (a) Matrici antisimmetriche;
    (b) Matrici triangolari superiori;
    (c) Matrici invertibili;
    (d) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 0;
    (e) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 1 (matrice nulla compresa).

    Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale M_n delle matrici quadrate di ordine n.