Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 8
21 Aprile 2015

1. Si determinino esplicitamente, al variare del parametro k, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari, utilizzando in caso di soluzione unica il metodo di Cramer:

   (a) $\begin{cases} 2y + kz = 1 \\ kx + 2y = 2 \\ y + kz = 3 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} kx + z = k \\ ky + 3z = k \\ 2x + ky + z = k \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 3x + ky + 2z = 1 \\ 5x + ky + kz = 0 \\ x + kz = 1 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x + kz + w = 1 \\ x + 2y + kz + w = 0 \\ z + 2w = 2 \\ x + kw = 0 \end{cases}$

   Soluzione:

   Nella risoluzione dei sistemi denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema e con b la colonna delle soluzioni.

   (a) $Det(A) = -k^2$.
   Se $k \neq 0$ si ha che $r(A) = 3$ e quindi $\exists!$ soluzione del tipo:
   $\left(\frac{6}{k}; -2; \frac{5}{k}\right)$.
   Se invece $k = 0$ il sistema risulta essere incompatibile in quanto $r(A) = 1$ e $r(A|b) = 2$.

   (b) $Det(A) = -2k(k+1)$.
   Se $k \neq 0; -1$ allora $\exists!$ soluzione del tipo:
   $\left(\frac{k}{k+1}; \frac{k-2}{k+1}; \frac{k}{k+1}\right)$.
   Se $k = 0$ allora il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(0; t; 0)$.
   Se $k = -1$ allora il sistema risulta incompatibile.

(c) $Det(A) = -2k(k-2)$.
Se $k \neq 0; -2$ allora $\exists!$ soluzione del tipo:
$\left(-\dfrac{k+4}{2k-4}; \dfrac{5k+2}{k(2k-4)}; \dfrac{3}{2k-4}\right)$.
Se $k = 0$ il sistema risulta incompatibile.
Se $k = 2$ il sistema risulta ugualmente incompatibile.

(d) $Det(A) = 6k - 2$.
Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\exists!$ soluzione del tipo:
$\left(-\dfrac{k(2k+1)}{3k-1}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{2k}{3k-1}; \dfrac{2k-1}{3k-1}\right)$.
Se $k = \frac{1}{3}$ il sistema risulta incompatibile.

2. Stabilire, al variare del parametro reale a, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti calcolarne il rango.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$
Soluzione
$det(A) = 2a^2 - 4$.
Se $a \neq \pm\sqrt{2}$ allora A é invertibile e la sua inversa è:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a^2-2} & \frac{-a+1}{2a^2-4} & \frac{3a-1}{2a^2-4} \\ \frac{a}{a^2-2} & \frac{-a+2}{2a^2-4} & \frac{a-6}{2a^2-4} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{2}$ si ha che $r(A) = 2$, quindi la matrice non è invertibile.
$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$
Soluzione
$det(B) = 2a^2 - 3$.
Se $a \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ allora B è invertibile e la sua inversa è:

$$\frac{1}{2a^2-3}\begin{pmatrix} a^2-1 & a & -a^2 \\ -a^2+2 & a & a^2-3 \\ -a & -3 & 3a \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha che $r(B) = 2$, quindi B non è invertibile.
$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$
Soluzione
$det(C) = a(a-2)(a+1)$.

Se $a \neq 0, 2, -1$ allora C é invertibile e la sua inversa è:

$$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & -\frac{1}{a^2-a-2} \\ \frac{2}{a^2-a-2} & \frac{a+2}{a^2+a} & -\frac{a}{a^2-a-2} \\ -\frac{2}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & \frac{a}{a^2-a-2} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = 0, 2, -1$ si ha che $r(C) = 2$, quindi C non è invertibile.

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Soluzione

$det(D) = a^3 + a^2 + a + 1 = (a+1)(a^2+1)$.

Se $a \neq -1$ allora D é invertibile e la sua inversa è:

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+1} & \frac{a}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a-1}{-a^2-1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a+1}{a^2+1} & -fraca^2+a+1a^3+a2+a+1 \\ \frac{1}{a^2+1} & -\frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{-a^2+a}{-a^2-1} & -fraca^3a^3+a^2+a+1 \\ -\frac{1}{a^2+1} & -\frac{1}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a+1}{a^2+1} & -fracaa^3+a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

Se invece $a = -1$ allora $r(D) = 3$, quindi la matrice D non è invertibile.

3. Stabilire se i punti A,B,$C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e, in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane della retta che li contiene.Quando c'é un parametro, discuterlo.

   (a) $A = (1, 0)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 6)$

   Soluzione

   Affinchè A, B e C siano allineati, deve essere $det \begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{BC} \end{pmatrix} = 0$; quindi in questo caso i punti sono allineati.

   Per trovare la retta che li contiene, notiamo innanzitutto che se tre punti sono allineati è sufficiente considerare la retta che ne contiene due qualunque distinti, siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Basta imporre che per qualsiasi punto (x, y) sulla retta i vettori $(x - x_1, y - y_1)$ e $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ siano allineati, ovvero:

   $$det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$$

   In questo caso, prendendo $P_1 = A$ e $P_2 = B$ troviamo che la retta è $3x - y - 3 = 0$.

   (b) $A = (5, 4)$, $B = (4, 6)$, $C = (2, 1)$

   Soluzione

   I punti non sono allineati.

   (c) $A = (2, 1)$, $B = (3, k+1)$, $C = (2+k, 2)$

   Soluzione

   Allineati per $k = \pm 1$.

   Per $k = 1$ la retta è $x - y - 1 = 0$; per $k = -1$ la retta è $x + y - 3 = 0$.

4. Si scrivano l'equazione del piano E soddisfacente alle seguenti proprietà:

   (a) passante per $A(1,1,0)$ e parallelo ai vettori $u = (1,0,1)$ e $v = (0,2,3)$;

   (b) passante per $B(0,1,1)$ e $C(3,2,1)$ e parallelo a $w = (0,0,5)$.

   Soluzione

   Per quanto riguarda il primo punto abbiamo gratis tutte le informazioni necessarie per determinare le equazioni parametriche del piano cercato che risulta essere passante per A ed avere giacitura $< u, v >$.

   Per quanto riguarda il secondo punto scegliamo B come punto noto ed otteniamo che la giacitura del piano é $< (3,1,0).w >$ e possiamo procedere nel calcolare l'equazione cartesiana in maniera usuale.

   Le soluzioni trovate sono:

   (a) $2x + 3y - 2z - 5 = 0$,

   (b) $x - 3y + 3 = 0$.

5. Dati i seguenti sottospazi affini si trovi una base della loro giacitura:

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_3 - x_4 = e\}$;

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + z - 5y = 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 5\}$;

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -1 \wedge x = 2\}$.

   Soluzione

   (a) $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$,

   (b) $\{(5,0,5)\}$,

   (c) $\{(0,1,0)\}$.

6. Si trovi per ogni coppia di punti A, B, C $\in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta passante per essi, e si trovi poi il piano in cui sono contenuti. Quando c'è il parametro, discuterlo.

   (a) $A = (1,1,0) \quad B = (1,0,1) \quad C = (1,0,0)$.

   (b) $A = (0,0,0) \quad B = (1,2k,k) \quad C = (k,k,2)$.

   (c) $A = (1,k,k) \quad B = (2,2k,2) \quad C = (k,1,1)$.

   Soluzione

   (a) Troviamo innanzitutto la retta passante per A e B. Tale retta avrà giacitura $v = (1-1, 0-1, 1-0) = (0,-1,1)$ e passerà per A. Le sue equazioni parametriche saranno quindi:
   $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$
   Allo stesso modo troviamo che la retta passante per B e C avrà giacitura $w = (1-1, 0-0, 0-1) = (0,0,-1)$ e passerà per B. Le sue equazioni parametriche saranno:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Il piano passante per A, B e C avrà giaciture v e w e passerà per A, e dunque le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t - s \end{cases}$$

(b) Con lo stesso metodo del caso precedente si trovano le giaciture delle rette r, passante per A e B, e s, passante per B e C. Sono rispettivamente $v = (1, 2k, k)$ e $w = (k, k, 2)$. Studiamo per quali valori di k i tre punti sono allineati. Vediamo cioè quando è minimo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2k & k \\ k & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolando tutti i minori di ordine 2 notiamo che un tale k non esiste, dunque le rette r e s non sono mai parallele. Le loro equazioni parametriche sono:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2kt \\ z = kt \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = kt \\ y = kt \\ z = 2t \end{cases}$$

Il piano passante per i tre punti avrà allora giaciture v e w e avrà equazioni

$$\begin{cases} x = t + ks \\ y = 2kt + ks \\ z = kt + 2s \end{cases}$$

(c) Il ragionamento è identico al precedente. Per $k = 1$ i tre punti risultano allineati e pertanto esisteranno infiniti piani che li contengono tutti e tre.