Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzione Tutorato 5
24 Marzo 2015

1. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo K. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:

   - $r(A+B) \leq min\{r(A), r(B)\}$.
     Soluzione: Falsa.
     Basta considerare le seguenti matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
     Ovviamente $A + B = I_2$ e $r(A) = 1 = r(B) < 2 = r(I_2)$.

   - $r(A) = r = r(B) \Rightarrow r(AB) = r \qquad (r < n)$.
     Soluzione: Falsa.
     Anche qui consideriamo A e B come sopra. Si ha $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $r(AB) = 0 \neq 1$.

   - $r(A) < n;\ r(B) < n \Rightarrow r(AB) < n$.
     Soluzione: Vera.
     Dimostrazione: Se $r(A) < n$ e $r(B) < n$, ovviamente si avrà $min(r(A), r(B)) < n$, ma essendo $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$ avremo che $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\} < n$, ovvero $r(AB) < n$.

   - $r(A) = n = r(B) \Rightarrow r(AB) = n$.
     Soluzione: Vera.
     Dimostrazione: Se $r(A) = n = r(B)$, A e B sono invertibili e quindi abbiamo $r(AB) \leq r(A)$ (sempre vera), inoltre $r(A) = r(ABB^{-1}) \leq r(AB)$, quindi $r(AB) = r(A) = n$.

2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$

   determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

   Soluzione:

   Per determinare quante sono le soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di $a \in \mathbb{R}$ sfrutto il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, il quale afferma che il sistema ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice orlata; in tal caso il numero delle soluzioni del sistema è pari a ∞^{n-r} dove n = numero di incognite e r = rango trovato.

Cominciamo quindi con il calcolare il rango della matrice A: $r(A) = 3$ se $a \neq \pm 1$ e $r(A) = 2$ se $a = \pm 1$.

Ecco tutti i casi possibili al variare di $a \in \mathbb{R}$:

- Se $a \neq \pm 1$ il sistema ammette una sola soluzione per Kronecker-Rouché-Capelli $(\frac{a}{a+1}, -\frac{(a+2)}{a+1}, \frac{1}{a+1})$.
- Se $a = 1$ calcolo il rango della matrice orlata.; $r(A|B) = 2$ e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni della forma $(3 + t, -(1 + t), t)$.
- Se $a = -1$ si ha che $r(A|B) = 3$. Il sistema sarà incompatibile per Kronecker-Rouché-Capelli.

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e definiamo $\mathcal{C}_{(a,b)} := \{f : (a, b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua } \}$. Mostrare che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione infinita.

   Soluzione:

   Che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia uno spazio vettoriale è ovvio: $(\mathcal{C}_{(a,b)}, +)$ è un gruppo additivo con somma definita come $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ed elemento neutro la funzione $f \equiv 0$.

   Il prodotto per uno scalare è definito come $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ed è immediato verificare tutte le proprietà di spazio vettoriale.

   Per mostrare che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ ha dimensione infinita sia $N \in \mathbb{N}$ e consideriamo il seguente insieme: $A_N := \{f_n(x) = x^n\}_{n=0,...,N}$. Allora se $\lambda_0, ..., \lambda_N \in \mathbb{R}$ sono scalari tali che $\lambda_0 f_0(x) + ... + \lambda_N f_N(x) = 0$ (dove 0 è la funzione identicamente nulla su (a, b)) deve aversi $\lambda_0 = ... = \lambda_N = 0$ per il principio d'identità dei polinomi. Dunque A_N è un insieme di elementi linearmente indipendenti $\forall N \in \mathbb{N}$, da cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ non può avere dimensione finita.

4. Sia $A \in M_5(\mathbb{R})$ tale che $r(A^2) = 2$. Determinare il valore minimo e massimo che può assumere il rango di A.

   Soluzione:

   Il risultato è immediata conseguenza del fatto che $r(AB) \leq min(r(A), r(B))$. Si ha:
   $$2 = r(A^2) \leq min\{r(A), r(B)\} = r(A) < 5$$
   dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che A ha ordine 5. Inoltre non può valere $r(A) = 5$ perché altrimenti A sarebbe invertibile e dunque anche il suo quadrato. In tal caso si avrebbe $r(A^2) = 5 \neq 2$.

5. Utilizzando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli di determinino le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, al variare del parametro reale a.

   NB: Denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema, con b la colonna dei coefficienti e con $A|b$ la matrice orlata.

   - $$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$
     Soluzione:

Poiché la prima e la terza colona della matrice A sono uguali abbiamo che $r(A) = 2$. Tuttavia $r(A|b) = 3$, quindi grazie al teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli possiamo concludere che il sistema non è compatibile.

- $\begin{cases} x - 2y = a \\ 3x + ay + z = 0 \\ 2ax - ay + z = a \end{cases}$

  Soluzione:
  Se $a \neq 3$ il sistema ammette un'unica soluzione $\frac{(2a^2-2a, 2a^2-4a, -2a^3-2a^2-6a)}{-2a+6}$.
  Se $a = 3$ abbiamo che $r(A) = 2$ e $r(A|b) = 3$ e quindi il sistema è incompatibile.

- $\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 1 \\ 3x + ay - az = 0 \end{cases}$

  Soluzione:
  Indipendentemente dal valore di a il $r(A) = 3$ quindi la soluzione del sistema é $\frac{(a^2+a, -2a-3, a)}{a^3-2a-3}$.

- $\begin{cases} ax + az = 1 \\ 3x + y + az = a \\ ax + 3y = 1 \end{cases}$

  Soluzione:
  Se $a \neq 0$ e $a \neq \frac{9}{4}$ il $r(A) = 3$ quindi esiste un'unica soluzione $\frac{(3a^2-3a-1, -a^3+3a, -2a^2-a+9)}{-4a^2+9a}$. Se $a = 0$ e $a = \frac{9}{4}$ il sistema è incompatibile, infatti in entrambi i casi risulta che $r(A) = 2)$ mentre $r(A|b) = 3$.

- $\begin{cases} ay + az = a \\ ax + y + az = 2 \\ ax - ay - az = a \end{cases}$

  Soluzione:
  Se $A \neq 0$ e $A \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione $(2, \frac{3a-2}{a-1}, \frac{-2a+1}{a-1})$.
  Se $a \neq 0$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni della forma $(t, 2, s)$ con $t, s \in \mathbb{R}$.
  Se $a = 1$ il sistema risulta incompatibile.

- $\begin{cases} x + z = -2 \\ 2x + y + t = -1 \\ -y - 2t - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z + t = 1 \end{cases}$

  Soluzione:
  Il sistema ammette una soluzione $(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 1)$