Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Tutorato 4
17 Marzo 2015

1. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a := (1, 1, -1)$, $b := (2, -1, 1)$ e sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c := (1, 2, -1), d := (-1, -1, 2)$.
   Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

   Soluzione: Impostiamo il sistema omogeneo che ha per colonne i quattro vettori delle due basi ottenendo come soluzione:
   $$\begin{cases} X_1 = \frac{8}{3}t \\ X_2 = -\frac{1}{3}t \\ X_3 = -t \\ X_4 = t \end{cases}$$
   Abbiamo usato un parametro dunque $Dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Per trovare una base di $W_1 \cap W_2$ imponiamo $t = 3$ e dalle soluzioni otteniamo: $8V_1 - V_2 - 3V_3 + 3V_4 = 0$ da cui $8V_1 - V_2 = 3V_3 - 3V_4 = (6, 9, -9)$, cioé {(6,9,-9)} costituisce una base di $W_1 \cap W_2$.

2. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
   $$W_1 := \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}.$$

   - Si verifichi che W_1 é un sottinsieme vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.

     Soluzione: W_1 é l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari in $\mathbb{R}^5$, dunque é un sottospazio vettoriale di dimensione: (potenza di $\mathbb{R}$) - (n. equazioni linearmente indipendenti) $= 5 - 2 = 3$. I vettori di W_1 sono della forma $(2x_2; x_2; 0; x_4; x_5)$ Dunque per ottenere una base imponiamo il primo parametro 1 e gli altri 0, poi, il secondo... etc. ottenendo la base $\{(2; 1; 0; 0; 0); (0; 0; 0; 1; 0); (0; 0; 0; 0; 1)\}$.

   - Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
     $a := (0, 3, 1, -2, 0)$, $b := (0, 0, 2, 1, 1)$, $c := (0, 6, -10, -10, -6)$, $d := (0, 3, 7, 1, 3)$
     se ne determini una base e la dimensione.

     Soluzione:
     Imponiamo il sistema omogeneo che ha come colonne i vettori di W_2 e cerchiamone le soluzioni: $\begin{cases} x_1 = 2v + t \\ x_2 = -6v + 3t \\ x_3 = v \\ x_4 = t \end{cases}$
     quindi $(2v + t)a + (-6v + 3t)b + (v)c + (t)d = 0$ per qualsiasi scelta

di t e v. Imponendo $v = 1$ e $t = 0$ otteniamo che c é combinazione lineare di a e b, poi, imponendo $v = 0$ e $t = 1$ otteniamo che d é combinazione lineare di a e b, dunque W_2 ha dimensione 2 e una sua base é data da $\{a, b\}$.

- Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$.

  Soluzione: Imponendo il sistema omogeneo che ha per colonne i vettori della base di W_1 e quelli della base di W_2 si ottiene che i vettori sono linearmente indipendenti, dunque l'intersezione é $\emptyset$ e la somma é diretta.

- Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.

  Soluzione: Definiamo W_3 mediante la sua base:

$$W_3 =< (0; 3; 1; -2; 0); (0; 0; 2; 1; 1); (0; 0; 0; 1; 0) > .$$

3. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

   Soluzione: Osserviamo innanzitutto che tutte le matrici hanno rango al piú tre. Con il metodo di eliminazione di Gauss (per righe) otteniamo:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  e dunque la matrice A ha rango 2;

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 22 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

  $\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  e dunque la matrice B ha rango 2;

- $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  e dunque la matrice C ha rango 2.

4. Siano U e V sottospazi vettoriali di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$.

- Provare che $U \cap V \neq \emptyset$;

  Soluzione: Abbiamo $dim(U) = dim(V) = 2$. Supponiamo per assurdo che $dim(U \cap V) = 0$. Allora per la formula di Grassman vettoriale abbiamo che $dim(U \oplus V) = 4$, ma questo é assurdo poiché $U \oplus V$ é un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e non puó quindi avere dimensione maggiore di 3.

- Determinare tutte le possibili dimensioni di $U \cap V$ e costruire un esempio per ciascuna di esse.

Soluzione: Dalla formula di Grassman si deduce che ci sono due possibilitá: $dim(U \cap V) = 1, 2$. Nel primo caso basta prendere $U = V$ qualsiasi di dimensione 2, mentre per il secondo caso possiamo considerare

$$U =< (1,0,0),(0,1,0) > \ e \ V =< (0,0,1),(0,1,0) > .$$

5. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 2t = 0\},$$

$$K :=< (1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5),(1,-1,0,5) > .$$

- Determinare la dimensione e una base per H e K;

  Soluzione: Con procedimenti analoghi a quelli degli esercizi precedenti si ottiene $H = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v = (-2y, y, z, 0) \ y, z \in \mathbb{R}\}$, da cui $dim(H) = 2$ e $H =< (-2,1,0,0),(0,0,1,0) >$, mentre $K =< (1,2,0,1),(0,0,1,1),(1,-1,0,5) >$ e dunque $dim(K) = 3$.

- Determinare la dimensione e una base per $H \cap K$ e $H + K$.

  Soluzione: La dimensione di $H + K$ é il rango della matrice che ha per righe i vettori delle due basi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Allora $dim(H+K) = 4$ e $dim(H \cap K) = 1$ per la formula di Grassman. In particolare $H + K = \mathbb{R}^4$ e una base é quella canonica. Per trovare una base di $H \cap K$ basta trovare un vettore non nullo che stia sia in H che in K (in quanto $dim(H \cap K = 1)$. Cerchiamo allora un vettore u esprimibile come combinazione lineare di elementi di H e di K. Scriviamo $u = a(-2,1,0,0) + b(0,0,1,0) = c(1,2,0,1) + d(0,0,1,1) + e(1,-1,0,5)$ e risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} -2a = c + e \\ a = 2c - e \\ b = d \\ 0 = c + d + 5e \end{cases} \to \begin{cases} e = 5c \\ a = -3c \\ b = d = -26c \end{cases} .$$

  Ponendo $c = -1$ otteniamo $u = (-6, 3, 26, 0) \in H \cap K$ che é anche base.

- Il vettore $v = (1,2,3,4)$ appartiene ad $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e un vettore di K.

  Soluzione: Abbiamo giá notato che $H + K = \mathbb{R}^4$ e dunque il vettore v appartiene a $H + K$. La somma non é diretta e dunque non esiste un modo unico per scrivere v come somma di un elemento di H per uno di K. Notiamo che $v \in K$, infatti $v = 1(1,2,0,1) + 4(0,0,1,1)$ e dunque una sua decomposizione sará

$$v = 1(1,2,0,1) + 4(0,0,1,1) + 0(0,0,1,0).$$

6. Data la matrice $A := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

   - Provare che i sottoinsiemi

$$F := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = XA\},$$

$$G := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = -XA\}$$

sono spazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
Soluzione: Per prima cosa vediamo come sono fatti gli elementi di F. Se $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F$, imponendo la condizione $AX = XA$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 6x-9z & 6y-9t \\ 4x-6z & 4y-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+4y & -9x-6y \\ 6z+4t & -9z-6t \end{pmatrix}$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} 6x-9z = 6x+4y \\ 6y-9t = -9x-6y \\ 4x-6z = 6z+4t \\ 4y-6t = -9z-6t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{9}{4}z \\ x = 3z+t \end{cases} .$$

Allora

$$F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X = \begin{pmatrix} 3z+t & (-9/4)z \\ z & t \end{pmatrix}, z, t\mathbb{R}\}.$$

In questa forma si vede subito che F é uno spazio vettoriale. Infatti risulta essere un sottogruppo additivo ed é chiuso rispetto al prodotto per scalari. Dalla risoluzione del sistema precedente risulta, per Rouché - Capelli che $dim(F) = 2$.
Per trovare una base poniamo prima $t = 0$ e $z = 4$ e poi $t = 1$ e $z = 0$. In questo modo otteniamo

$$F = < \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > .$$

Per il sottospazio G si opera allo stesso modo. Dal sistema si ottengono le relazioni $\begin{cases} y = \frac{9}{4}z + 3t \\ x = -t \end{cases}$.

Dunque $dim(G) = 2$ e una sua base é data da $\{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\}$.

- Trovare una base per $F+G$.
Soluzione: Per determinare una base di $F+G$ consideriamo le matrici quadrate di ordine 2 come vettori in $\mathbb{R}^4$, prestando attenzione all'ordine delle componenti. Mettiamo i vettori in una matrice e riduciamo a gradini:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & -9 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 4 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$
$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
Allora $dim(F+G)=3$ e in particolare
$$F+G =< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} > .$$
In particolare $dim(F\cap G)=1$ per la formula di Grassman, e dunque la somma non é diretta.
- Data la matrice $C := \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-2 \end{pmatrix}$ stabilire per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F+G$.
Soluzione: Se la matrice $C \in F+G$ allora deve essere espressa come combinazione lineare dei vettori della base di $F+G$. Vediamo per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ questa condizione é soddisfatta. Abbiamo:
$$\begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$
da cui il sistema
$\begin{cases} a=b \\ 3b+9c=h-2 \\ 4c=0 \\ a+b=h-3 \end{cases} \to \begin{cases} a=b=1 \\ c=0 \\ h=5 \end{cases}.$
Per $h=5$ la matrice C appartiene a $F+G$.
- Assegnato ad h un tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ tali che $C=C_1+C_2$.
Soluzione: La somma non é diretta e dunque possono esserci piú modi di esprimere la stessa matrice come somma di una matrice di F con una di G. Notiamo che dal punto precedente
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e dunque basta prendere $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$ e $C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.