

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Soluzioni Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

SOLUZIONI TUTORATO 2

31 FEBBRAIO 2015

1. Si enunci la definizione di spazio vettoriale e si dia a K^n una struttura di spazio vettoriale sul campo K .

SOLUZIONE:

Per la definizione di spazio vettoriale e per il caso di K^n si può consultare il Sernesi alle pagine 17 e 18 (definizione 1.1 ed esempio 1.2.1).

2. Si determini l'inversa delle seguenti matrici:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$
- $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

Determinare inoltre $(AB)^{-1}$ senza calcolare il prodotto AB .

SOLUZIONE:

N.B. Per la risoluzione dell'esercizio possono essere utilizzati due metodi diversi. Li utilizzeremo alternativamente

(i) Consideriamo la matrice A e affianchiamo ad essa la matrice identità, ottenendo così la seguente matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto cerchiamo, tramite operazioni elementari sulle righe di A' , di spostare la matrice identità sulla sinistra.

I PASSO: Sottraiamo alla seconda riga il doppio della prima cioè applichiamo la seguente operazione elementare: $R_2 = R_2 - 2R_1$

Otteniamo così la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

II PASSO: Dividiamo la seconda riga per -2 , cioè $R_2 = -\frac{1}{2}R_2$

Siamo arrivati a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; possiamo subito notare che ora la matrice identità è a sinistra; ma allora:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ii) Utilizziamo l'altro metodo, sfruttando la definizione di inversa. Voglio trovare B^{-1} tale che $BB^{-1} = I$. Ma allora, usando una matrice generica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ da cui il seguente sistema:}$$

$$\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ 3y + 2t = 0 \\ -2x + 5z = 0 \\ -2y + 5t = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(x, y, z, t) = (\frac{5}{19}, -\frac{2}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19})$.

$$\text{Quindi } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{2}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$$

(iii) Torniamo a utilizzare il primo metodo.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-7R_1} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1-R_3} \\ & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3+\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3-\frac{1}{5}R_1} \\ & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+\frac{35}{2}R_3} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2+385R_3} \\ & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=\frac{1}{5}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=-\frac{1}{7}R_2} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=-\frac{35}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

N.B. Per ottenere i coefficienti del sesto passaggio si ragiona cosí: il nostro scopo è quello di ottenere uno 0 al posto del 22 della seconda riga; per farlo, devo sfruttare necessariamente la terza; la utilizzo cosí: voglio trovare x t.c. $22 - \frac{2}{35}x = 0$. Risolvendo l'equazione ottengo $x = 385$. Un procedimento simile può essere seguito ogni qualvolta risulti difficoltoso trovare i coefficienti adatti da moltiplicare a una riga.

Ora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, quindi posso tranquillamente calcolare quanto richiesto senza sapere AB e in particolare utilizzando solamente i risultati dei punti precedenti.

N.B. É utile nel caso delle matrici quadrate di ordine 2 utilizzare la seguente formula per calcolare l'inversa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

In particolare l'inversa esiste se e solo se $ad - bc \neq 0$.

3. Si mostri che l'inversa di ogni matrice simmetrica e invertibile é anch'essa simmetrica.

SOLUZIONE:

Innanzitutto dimostro che se A é una matrice invertibile allora

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Infatti $\mathbb{I} = {}^t\mathbb{I} = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA$, quindi $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ per unicitá dell'inversa. Ora, una matrice simmetrica é t.c. $A = {}^tA$, quindi $A^{-1} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, dove per l'ultima eguaglianza si é sfruttata la proprietá sulle matrici invertibili citata in precedenza.

4. Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora tAA é simmetrica.

SOLUZIONE:

Basta notare che ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$, cioé la matrice tAA é simmetrica in quanto uguale alla sua trasposta.

5. Si determinino, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, utilizzando il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{il sistema é incompatibile.}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \quad \text{il sistema é incompatibile.}$$

$$\begin{cases} 3x - y - z - 4t = 9 \\ 4x - 3z - t = 0 \\ 8x - 2y - 5z - 9t = 18 \end{cases}$$

il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(0, -9 - \frac{4}{3}t, -\frac{1}{3}t, t)$.

$$\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0 \end{cases} \quad \text{il sistema ha } \infty^1 \text{ soluzioni del tipo } (-2t, 0, 0, t).$$

6. Si scrivano le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

SOLUZIONE:

Innanzitutto bisogna osservare che entrambe le matrici sono invertibili e che pertanto possono essere scritte come prodotto di matrici elementari.

Iniziamo allora con lo svolgimento: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Tramite operazioni elementari sulle righe di A vogliamo ottenere la matrice identitá (sará piú chiara ad

esercizio concluso la motivazione);

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

La stessa operazione la facciamo sulle righe della matrice identità:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ora: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+\frac{2}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+\frac{2}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Otteniamo: } \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Infine: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{da cui: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tutti questi calcoli sono serviti per arrivare alla matrice \mathbb{I} ; a questo punto torniamo indietro, sostituendo successivamente tutte le uguaglianze ottenute:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Se adesso poniamo: } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$\mathbb{I} = XYZA \text{ e quindi } Z^{-1}Y^{-1}X^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}\mathbb{I} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}XYZA = A.$$

Per concludere basta quindi calcolare Z^{-1}, Y^{-1} e X^{-1} .

Per quanto riguarda la matrice B il procedimento è analogo.

7. Si discutano i seguenti sistemi al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx - y + z = 2 \\ x - ky + z = 3 - k^2 \\ x - y + kz = k + 1 \end{cases}$$

Esistono soluzioni uniche per $k \neq -2, 1$ del tipo $(1, k, 2)$;

se $k = -2$ esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(7y - 1, y, 3y)$;

se $k = 1$ esistono ∞^2 soluzioni del tipo $(x = y - z + 2, y, z)$.

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ x - ky - z = 1 \\ 2x + y + kz = k + 1 \end{cases}$$

Esistono soluzioni per $k \neq 0, 1$ $(\frac{4}{k}, \frac{k-4}{k}, \frac{k+2}{k})$;

se $k = 0$ il sistema é incompatibile;
se $k = 1$ esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(1, -t, t)$.

$$\begin{cases} x + y + kz = 2k - 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

Esistono soluzioni uniche per $k \neq -2, 1$ del tipo $(-2\frac{k+1}{k+2}, \frac{k}{k+2}, 2\frac{k+1}{k+2})$;
se $k = -2$ il sistema é incompatibile;
se $k = 1$ esistono ∞^2 soluzioni del tipo $(-y - z + 1, y, z)$.

$$\begin{cases} 2x + kz = 1 \\ 3x + ky - 2z = 2 \\ kx + 2z = 1 \end{cases}$$

Se $k \neq -2, 0, 2$ il sistema ha soluzioni del tipo $(\frac{1}{2+k}, \frac{2k+3}{k(2+k)}, \frac{1}{2+k})$;
se $k = 0, -2$ il sistema é incompatibile;
se $k = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(\frac{1}{2} - t, \frac{1}{4} + \frac{5}{2}t, t)$.