Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 1
24 febbraio 2015

1. Dare un esempio di due matrici quadrate non nulle di ordine tre il cui prodotto sia una matrice nulla.
Soluzione:
Basta prendere ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. Sia $C \in M_2(\mathbb{C})$, $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, svolgere le seguenti operazioni:

   - $iC^2 + 3C + i\mathbb{I}$;
   - $3C^2 + 7C^3$;
   - C^tC.

   Soluzione:

   - $iC^2 + 3C + i\mathbb{I} = i\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} i & -2 \\ -4 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & 3 \\ 6 & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i & 1 \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$;
   - $3C^2 + 7C^3 = 3\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 5i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+35i & 6i-7 \\ 12i-14 & 35i+3 \end{pmatrix}$;
   - $C^tC = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$.

3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
Calcolare dove possibile:

   - A^t, C^t, AC, A^tC, A^tC^t, C^tA^t;
   - ACD, $3(AC+B)D^2$.

   Soluzione:

   - $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

- $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
- $AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- A^tC non si puó fare,
- A^tC^t non si puó fare,
- $C^tA^t = (AC)^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,
- $ACD = AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 22 \\ 18 & -2 & 24 \\ 9 & 3 & 66 \\ 9 & 1 & -12 \end{pmatrix}$,
- $3(AC + B)D^2 = \begin{pmatrix} -36 & 4 & 141 \\ -12 & -2 & 128 \\ -276 & 3 & 514 \\ 27 & 2 & -288 \end{pmatrix}$.

4. Trovare per ognuna delle seguenti matrici A una matrice M tale che:
   - il prodotto matriciale (righe per colonne) $A \cdot M$ sia ben definito;
   - $A \cdot M = 0$ (matrice nulla)

   $a = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,
   $e = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

   Soluzione:

   - $a = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, pongo la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ da cui avró:
     $aM = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
     $\begin{cases} 3a + 2c = 0 \\ 3b + 2d = 0 \\ 4a + c = 0 \\ 4b + d = 0 \end{cases}$ ne seguirá che $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$
     Quindi la matrice M sará della forma:
     $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
     Con lo stesso metodo risolvo gli altri esercizi.
   - $b = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avremo $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con a e b che variano.

- $c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, avremo $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, avremo che M dovrá necessariamente avere 3 righe e 2 colonne; $M = \begin{pmatrix} e & f \\ -2e & -2f \\ e & f \end{pmatrix}$.
- $e = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, avremo che M dovrá necessariamente avere 2 righe e 3 colonne; $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, avremo $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $g = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, avremo $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $A \cdot M = 0$ (matrice nulla)

5. Siano A e B due matrici quadrate di uguale dimensione. É vero che:

   - $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$,
   - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

   Altrimenti qual é l'ipotesi mancante?
   Soluzione:
   Non é vero, in quanto il prodotto tra matrici non gode della proprietá commutativa. In generale non si puó quindi dire che $AB = BA$ da cui segue la falsitá delle affermazioni.
   $AB + BA \neq 2AB$ e $AB - BA \neq 0$

6. Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é nilpotente di ordine 3.

   Soluzione:
   $$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dimostrare che se una matrice quadrata é nilpotente allora non puó essere invertibile.
   Soluzione:
   A matrice quadrata si dice nilpotente di ordine n se $A^n = 0$ e n é il piú piccolo intero che verifica questa proprietá.
   Supponiamo per assurdo che A sia invertibile, quindi esiste B matrice

quadrata t.c. $AB = BA = \mathbb{I}$.
$BA^n = B(A^n) = B\underline{0} = \underline{0}$ e $BA^n = (BA)A^{n-1} = \mathbb{I}A^{n-1} = A^{n-1} \neq \underline{0}$da cui l'assurdo.
N.B. L'unica proprietá sfruttata é quella associativa!