UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 - e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che

$$v \in N(F), F(e_1 + e_2) = (k^2 - k)v, F(e_2) = 4e_1 - ke_4, F(e_2 + e_4) = -e_4.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v, e_1 + e_2, e_2, e_2 + e_4\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F in tale base esprimiamo $F(e_2) = 4e_1 - ke_4$ e $F(e_2 + e_4) = -e_4$ nella base e. Si ha

$$av + b(e_1 + e_2) + ce_2 + d(e_2 + e_4) = (a + b)e_1 + (b + c + d)e_2 - ae_3 + de_4 = 4e_1 - ke_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ b + c + d = 0 \\ -a = 0 \\ d = -k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 0, b = 4, c = k - 4, d = -k$. Pertanto $F(e_2) = 0v + 4(e_1 + e_2) + (k - 4)e_2 - k(e_2 + e_4)$. Analogamente

$$av + b(e_1 + e_2) + ce_2 + d(e_2 + e_4) = (a + b)e_1 + (b + c + d)e_2 - ae_3 + de_4 = -e_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c+d=0 \\ -a=0 \\ d=-1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=0, b=0, c=1, d=-1$. Pertanto $F(e_2) = 0v + 0(e_1+e_2) + e_2 - (e_2+e_4)$. Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & k^2-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & k-4 & 1 \\ 0 & 0 & -k & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & k^2-k & 0 & 0 \\ 0 & -T & 4 & 0 \\ 0 & 0 & k-4-T & 1 \\ 0 & 0 & -k & -1-T \end{vmatrix} = T^2\left[(k-4-T)(-1-T)+k)\right] =$$

$$= T^2(T^2+(5-k)T+4).$$

Osserviamo che $T^2+(5-k)T+4=0$ ha radici $\frac{1}{2}(k-5\pm\sqrt{k^2-10k+9})$ se $k^2-10k+9 \geq 0$, ovvero se $k \leq 1$ o $k \geq 9$. Inoltre tali radici non possono mai essere nulle, quindi non coincideranno con $\lambda_1 = 0$. Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k<1$ o $k>9$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1}{2}(k-5-\sqrt{k^2-10k+9})$ (m.a. 1),
	$\lambda_3 = \frac{1}{2}(k-5+\sqrt{k^2-10k+9})$ (m.a. 1)
$k=1$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 2)
$k=9$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 2)
$1<k<9$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 0$ come autovalore da considerare nel punto (b) e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x,y,z,w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} (k^2-k)y=0 \\ 4z=0 \\ (k-4)z+w=0 \\ -kz-w=0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $z = w = 0$ se $k = 0, 1$ e $y = z = w = 0$ se $k \neq 0, 1$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $xv + y(e_1 + e_2)$ se $k = 0, 1$ e xv se $k \neq 0, 1$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{v, e_1 + e_2\}$ se $k = 0, 1$ e $\{v\}$ se $k \neq 0, 1$.

(c) Dalla (b) deduciamo che i casi da analizzare sono tre

1) $k \neq 0, 1$:

in questo caso sappiamo dalla (b) che $1 = mg(0) < ma(0) = 2$ e pertanto F non è diagonalizzabile.

2) $k = 0$:

sempre dalla (b) deduciamo che

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2
-4	1	1
-1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

3) $k = 1$:

si ha $\lambda_2 = -2$ e posto $T = -2$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) + 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $mg(-2) = \dim V_{-2}(F) = 4 - 3 = 1 < ma(-2) = 2$ e qundi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + W = 2 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X - Y - Z = 2 \\ Y + W = 0 \\ kX + (2 - k)Y + Z + 2W = -1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Determinare per quali k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$.

SOLUZIONE:

(a) Sappiamo dalla teoria che, affinchè S e T_k siano sottospazi, è necessario e sufficiente che siano non vuoti.

Consideriamo le matrici del sistema che definisce S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $r(B) = r(C) = 2$, da cui, per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $S \neq \emptyset$ ed è quindi un sottospazio. Inoltre

$$\dim S = \dim A - r(B) = 4 - 2 = 2.$$

Consideriamo invece le matrici del sistema che definisce T_k:

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 2-k & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 2-k & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $r(B_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1 \\ 2 & \text{se } k = -1 \end{cases}$, mentre $r(C_k) = 3$ per ogni k. Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ se e solo se $k \neq -1$. Dunque T_k è un sottospazio per $k \neq -1$ e, in tal caso,

$$\dim T_k = \dim A - r(B_k) = 4 - 3 = 1.$$

Da ora in poi considereremo solo il caso $k \neq -1$.

(b) Dato che T_k è una retta, verifichiamo se la sua giacitura è contenuta in quella di S. La giacitura di T_k è data dal sistema omogeneo $B_k U = 0$, dove $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$. Per calcolarne le soluzioni facciamo operazioni elementari sulla matrice B_k.

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1+k & 2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \end{pmatrix}$$

e si vede che le soluzioni del sistema omogeneo $B_k U = 0$ sono

$$Z = 0, W = t, Y = -t, X = -t$$

da cui la giacitura di T_k è data dai vettori $-te_1 - te_2 + te_4 = t(-e_1 - e_2 + e_4)$.
Se T_k fosse parallelo ad S si avrebbe che $-e_1 - e_2 + e_4$ starebbe nella giacitura di S, dunque che $(-1, -1, 0, 1)$ sarebbe soluzione del sistema

$$giac(S) : \begin{cases} X - Y + W = 0 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases}.$$

Dato che, ovviamente, non è così, si ha che non esistono valori di k tali che S e T_k sono paralleli.
(c) Se esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$ allora, essendo T_k una retta, si ha $r = T_k$ e quindi che $T_k \subseteq S$. Ma allora sarebbe, in particolare, T_k parallelo ad S, cosa che sappiamo non essere possibile. Dunque per nessun k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$. ■

3. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita, sia U un sottospazio di V, sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $F_{|U} : U \to W$ la restrizione di F ad U.
(a) Dimostrare che $F_{|U}$ è un isomorfismo se e solo se $\dim U = \dim W$ e $U \cap N(F) = \{0\}$.
(b) Sia T un sottospazio di W. Dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un'applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $F_{|U} : U \to T$ è suriettiva.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $F_{|U}$ è ovviamente lineare. Se $F_{|U}$ è un isomorfismo allora, come è noto, $\dim U = \dim W$. Inoltre per ogni $v \in U \cap N(F)$ si ha $F_{|U}(v) = F(v) = 0$, quindi $v \in N(F_{|U}) = \{0\}$ essendo $F_{|U}$ iniettiva. Pertanto $U \cap N(F) = \{0\}$.
Viceversa sia $\dim U = \dim W$ e $U \cap N(F) = \{0\}$. Allora per ogni $u \in N(F_{|U})$ si ha $0 = F_{|U}(u) = F(u)$, qundi $u \in U \cap N(F) = \{0\}$. Ne segue che $N(F_{|U}) = \{0\}$ e pertanto $F_{|U}$ è iniettiva. Essendo $\dim U = \dim W$ ne segue che $F_{|U}$ è un isomorfismo.
(b) Se esiste un'applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $F_{|U} : U \to T$ è suriettiva allora, per il teorema di rango-nullità, si ha $\dim T = \dim(Im(F_{|U})) = \dim U - r(F_{|U}) \leq \dim U$, dunque $\dim T \leq \dim U$.

Viceversa assumiamo che $\dim T \leq \dim U$ e sia $t = \dim T, s = \dim U$ così che $t \leq s$. Sia $\{z_1, \ldots, z_t\}$ una base di T, sia $\{u_1, \ldots, u_s\}$ una base di U e sia $\{u_1, \ldots, u_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ un completamento ad una base di V. Sia $F : V \to W$ l'unica applicazione lineare tale che

$$F(u_1) = z_1, \ldots, F(u_t) = z_t \text{ e } F(u_{t+1}) = \ldots = F(u_s) = F(v_{s+1}) = \ldots = F(v_n) = 0.$$

Allora, banalmente, $F_{|U} : U \to T$ è suriettiva. ■