UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Si determini, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 - X_3 + 3X_4 = 0 \\ 2X_1 - kX_3 + 2X_4 = k + 4 \\ kX_1 + X_2 + X_4 = -k \\ X_1 + X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, se ne calcolino esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 2 & k+4 \\ k & 1 & 0 & 1 & -k \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_4 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -k & 2 & k+4 \\ k & 1 & 0 & 1 & -k \\ k & -1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - kR_1, R_4 \to R_4 - kR_1$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -k+2 & 2 & k \\ 0 & 1-k & k & 1 & -3k \\ 0 & -1-k & -1+k & 3 & -2k \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{2}k & 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 1-k & k & 1 & -3k \\ 0 & -1-k & -1+k & 3 & -2k \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to R_3 + (1-k)R_2, R_4 \to R_4 - (k+1)R_2$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{2}k & 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1 & 2-k & -\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k - 2 & 2-k & -\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{2}k & 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1 & 2-k & -\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k \\ 0 & 0 & k-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{2}k & 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 0 & k-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1 & 2-k & -\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k \end{pmatrix}.$$

Supponiamo prima $\mathbf{k = 3}$.

Sostituendo in A si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -12 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è a gradini ed ha come soluzioni (dopo un pò di calcoli):

$$\mathbf{X_4 = t,\ X_3 = \frac{t-12}{4},\ X_2 = \frac{7t}{8},\ X_1 = -\frac{5t+8}{8}}.$$

Ora supponiamo $k \neq 3$.

Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{k-3}R_3$ fatta sulla matrice A si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{2}k & 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1 & 2-k & -\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - (\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1)R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{2}k & 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-k & -\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbf{k = 2}$ si vede subito che $-\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k = -7 \neq 0$ e pertanto il sistema è incompatibile in questo caso.

Infine se $\mathbf{k \neq 2, 3}$ il sistema è a gradini ed ha come soluzioni (dopo un pò di calcoli):

$$\mathbf{X_4 = \frac{k(k+5)}{2(k-2)},\ X_3 = 0,\ X_2 = \frac{7k}{2(k-2)},\ X_1 = -\frac{3k+8}{2(k-2)}}.$$

Si conclude allora che **il sistema è compatibile se e solo se $\mathbf{k \neq 2}$.** ∎

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & k & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di k per i quali esiste una matrice $C \in M_3$ tale che $C\,{}^tA = B$, senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di C.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice

$$(A\ I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 + kR_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+k & 2k & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & k & -1 & 1 \\ 0 & k & k & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$, si trova la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-k^2 & -k^2 & 1+k & -k \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $k - k^2 = 0$ se e solo se $k = 0, 1$, dunque

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0,1 \\ 3 & \text{se } k \neq 0,1 \end{cases}$$

e quindi **A è invertibile se e solo se** $\mathbf{k \neq 0, 1}$.

Sia ora $k \neq 0, 1$ e proseguiamo dalla matrice D, ponendo, per comodità, $d = k - k^2$.

Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{d}R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k^2}{d} & \frac{1+k}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 - 2R_3, R_2 \to R_2 - kR_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \frac{k+k^2}{d} & -\frac{2+2k}{d} & \frac{2k}{d} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k^2}{d} & -\frac{2k}{d} & \frac{k}{d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k^2}{d} & \frac{1+k}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to -R_1$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{k+k^2}{d} & \frac{2+2k}{d} & -\frac{2k}{d} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k^2}{d} & -\frac{2k}{d} & \frac{k}{d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k^2}{d} & \frac{1+k}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

ed infine l'operazione $R_1 \to R_1 + R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{k}{d} & \frac{2}{d} & -\frac{k}{d} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k^2}{d} & -\frac{2k}{d} & \frac{k}{d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k^2}{d} & \frac{1+k}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$\mathbf{A^{-1}}=\frac{1}{k-k^2}\begin{pmatrix} -k & 2 & -k \\ k^2 & -2k & k \\ -k^2 & 1+k & -k \end{pmatrix}.$$

(b) Se $\mathbf{k \neq 0, 1}$ sappiamo da (a) che A è invertibile, quindi anche ${}^t\!A$ lo è e basta scegliere $\mathbf{C = B({}^t\!A)^{-1}}$.

Se $k = 0, 1$ allora A ha rango 2. Calcoliamo il rango di B. Da

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

scambiando R_1 con R_2 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

poi, scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ed infine l'operazione $R_3 \to R_3 + 2R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che B ha rango 3.

Ora se esistesse $C \in M_3$ tale che $C\,{}^t\!A = B$ si avrebbe la contraddizione

$$3 = r(B) = r(C\,{}^t\!A) \leq r({}^t\!A) = r(A) = 2.$$

Dunque per $k = 0, 1$ la matrice C non esiste.

Si conclude pertanto che **la matrice C esiste se e solo se** $\mathbf{k \neq 0, 1}$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 + X_3 = 0 \\ kX_1 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0 \\ kX_1 + kX_2 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scrivano esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Si determini se esistono valori di $k \neq 0$ per i quali

$$(W_k + U_k) \oplus (W_k \cap U_k) = \mathbb{R}^4;$$

(c) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.

SOLUZIONE:

(a) Posto, nelle equazioni di U_k, $X_1 = t, X_2 = s$, si trova $X_3 = -t - ks, X_4 = (k+1)t + ks$, quindi ogni vettore di U_k è del tipo

$$(t, s, -t - ks, (k+1)t + ks) = t(1, 0, -1, k+1) + s(0, 1, -k, k)$$

e quindi **una base di $\mathbf{U_k}$ è $\{(\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{k}+\mathbf{1}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{k}, \mathbf{k})\}$ e pertanto $\mathbf{U_k}$ ha dimensione 2 per ogni $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$.**

Per calcolare la dimensione di W_k consideriamo la matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ k & k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Scambiando R_1 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - kR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k & k & k & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 + kR_2$ da la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+2k & 2k & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e posto $X_4 = t, X_3 = s$, si trova $X_2 = t + s, X_1 = t + s$, quindi ogni vettore di W_0 è del tipo

$$(t + s, t + s, s, t) = t(1, 1, 0, 1) + s(1, 1, 1, 0)$$

e quindi **una base di $\mathbf{W_0}$ è $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})\}$ e pertanto $\mathbf{W_0}$ ha dimensione 2**.

Se $k \neq 0$ risolvendo da A si trova, posto $X_3 = t$, $X_4 = -\frac{(k+2)t}{2}, X_2 = \frac{kt}{2}, X_1 = -\frac{kt}{2}$, quindi ogni vettore di W_k è del tipo

$$(-\frac{kt}{2}, \frac{kt}{2}, t, -\frac{(k+2)t}{2}) = t(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 1, -\frac{k+2}{2})$$

e quindi **una base di $\mathbf{W_k}$ è $\{(-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}, -\frac{\mathbf{k+2}}{\mathbf{2}})\}$ e pertanto $\mathbf{W_k}$ ha dimensione 1 se $\mathbf{k \neq 0}$**.

(b) Se $(W_k + U_k) \oplus (W_k \cap U_k) = \mathbb{R}^4$ allora, per definizione,

$$(W_k + U_k) \cap (W_k \cap U_k) = \{0\}.$$

Ma $W_k \cap U_k \subseteq W_k + U_k$, quindi $W_k \cap U_k = \{0\}$ e dunque $W_k + U_k = \mathbb{R}^4$. Ne segue che $\dim(W_k + U_k) = 4$. Però, nel caso $k \neq 0$, sappiamo dalla (a) che $\dim W_k = 1$ e $\dim U_k = 2$, quindi banalmente $\dim(W_k + U_k) \leq 3$, contraddizione.

Si conclude che **non esiste $\mathbf{k \neq 0}$, tale che $(\mathbf{W_k} + \mathbf{U_k}) \oplus (\mathbf{W_k} \cap \mathbf{U_k}) = \mathbb{R}^4$**.

(c) Per calcolare la dimensione di $W_k + U_k$, utilizziamo le basi di U_k e W_k trovate in (a). Se $k \neq 0$ facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k \\ -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} & 1 & -\frac{k+2}{2} \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to 2R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k \\ -k & k & 2 & -k-2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione, $R_3 \to R_3 + kR_1$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k \\ 0 & k & 2-k & k^2-2 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ da la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k \\ 0 & 0 & k^2-k+2 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che $\dim(W_k + U_k) = r(A) = 3$ dato che $k^2 - k + 2 \neq 0$ per ogni k.

Se $k = 0$ facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to R_4 - R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - 2R_3$ da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che $\dim(W_0 + U_0) = r(B) = 4$.

Ne deduciamo pertanto che

$$\mathbf{dim(W_k + U_k)} = \begin{cases} 4 & \textbf{se } k = 0 \\ 3 & \textbf{se } k \neq 0 \end{cases}$$

e quindi, per la formula di Grassmann,

$$\mathbf{dim(W_k \cap U_k)} = dim W_k + dim U_k - dim(W_k + U_k) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} + 2 - \begin{cases} 4 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} = \mathbf{0}. \ \blacksquare$$