UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prova scritta del 26-1-2016

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Determinare per quali valori $k \in\mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - kX_3 + 3X_4 = 0 \\ kX_1 - X_2 - kX_3 = 2 \\ (2-2k)X_1 - 2X_2 - kX_3 + 5X_4 = k \\ kX_1 + X_2 + X_4 = 1 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, calcolarne esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in\mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$U_k =< (0,0,0,1), (0,1,1,0), (0,-k,0,1) >$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -X_1 - X_3 = 0 \\ kX_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$;

(c) Determinare (se esistono) tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(0,0,0,1), (0,1,1,0), (1,0,1-k,-1), v\}$$

non sono generatori di $U_k + W_k$.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y = 2 \\ X + Y - W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X - Y - Z = 1 \\ Y - W = 0 \\ X + (2-k)Y + kZ = -1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.
(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.
(c) Determinare per quali k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$.
4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $U =< (-1, 1, 0, 0) >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$E_1 \in N(F), F_{|U} = id_U, F(E_3 - E_2) = E_1 - E_2 + kE_4, F(E_3 + E_4) = E_1 + kE_3$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.