UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prova scritta del 15-6-2015

TESTO E SOLUZIONI

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \\ X_1 - 2X_2 - kX_3 = 0 \\ kX_1 - X_2 = 2 \\ X_1 + X_2 + 6X_3 = 2 - k \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(ovviamente valida anche come scritto)

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2-k \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 1 & -2 & -k & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ k & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - kR_1, R_4 \to R_4 - kR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 0 & -3 & -6-k & -2+k \\ 0 & -1-k & -6k & 2-2k+k^2 \\ 0 & -1-k & 2-6k & 1-2k+k^2 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 0 & -3 & -6-k & -2+k \\ 0 & -1-k & -6k & 2-2k+k^2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - \frac{1+k}{3} R_2$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 0 & -3 & -6-k & -2+k \\ 0 & 0 & \frac{6-11k+k^2}{3} & \frac{8-5k+2k^2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e, con l'operazione $R_3 \to 3R_3$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 0 & -3 & -6-k & -2+k \\ 0 & 0 & 6-11k+k^2 & 8-5k+2k^2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

poi, scambiando R_3 con R_4, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 0 & -3 & -6-k & -2+k \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6-11k+k^2 & 8-5k+2k^2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{6-11k+k^2}{2} R_3$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2-k \\ 0 & -3 & -6-k & -2+k \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22-21k+5k^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque si vede subito che il sistema è compatibile se e solo se $22 - 21k + 5k^2 = 0$, ovvero se e solo se $k = 2, \frac{11}{5}$.

In tal caso il sistema è a gradini ed ha come soluzioni,

$$k = 2, X_3 = -\frac{1}{2},\ X_2 = \frac{4}{3},\ X_1 = \frac{5}{3}$$

e

$$k=\frac{11}{5}, X_3=-\frac{1}{2},\ X_2=\frac{13}{10},\ X_1=\frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE COME SCRITTO:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A=\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -k \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=2(k+1), \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -k \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=-k^2+11k-6.$$

Dato che il secondo minore non è nullo per $k=-1$ si deduce che $r(A)=3$ per ogni k.

Ora calcoliamo il rango di

$$(A\ b)=\begin{pmatrix} k & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2-k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2-k \end{vmatrix}=-22+21k-5k^2$$

e $22-21k+5k^2=0$ se e solo se $k=2, \frac{11}{5}$.

Quindi

$$r(A\ b)=\begin{cases} 4 & \text{se } k\neq 2, \frac{11}{5} \\ 3 & \text{se } k=2, \frac{11}{5} \end{cases}.$$

Ne segue che $r(A)=r(A\ b)$ se e solo se $k=2, \frac{11}{5}$. Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k=2, \frac{11}{5}$ e possiamo calcolare la soluzione con la regola di Cramer. Assumiamo dunque $k=2, \frac{11}{5}$ e scegliamo il minore

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=2(k+1)\neq 0.$$

Si ha

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2-k & 1 & 6 \end{vmatrix}}{2(k+1)}=\frac{7-k}{k+1}=\begin{cases} \frac{5}{3} & \text{se } k=2 \\ \frac{3}{2} & \text{se } k=\frac{11}{5} \end{cases},$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 2-k & 6 \end{vmatrix}}{2(k+1)} = \frac{-k^2+5k-2}{k+1} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{se } k=2 \\ \frac{13}{10} & \text{se } k=\frac{11}{5} \end{cases},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-k \end{vmatrix}}{2(k+1)} = -\frac{1}{2}. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = < (1,-k,0,0), (k,1,0,-1), (3-2k,-2,0,2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$;

(c) Sia $k \neq 0$. Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(1,-k,0,0), (k,1,0,-1), (1,0,1-k,-1), v\}$$

non sono generatori di $U + W_k$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(a) Per calcolare la dimensione di U risolviamo il sistema

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

facendo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si trova la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, posto $X_3 = t, X_4 = s$ si trova facilmente che $X_2 = 2t - s, X_1 = t - s$ ed un vettore di U è del tipo

$$(t - s, 2t - s, t, s) = t(1, 2, 1, 0) + s(-1, -1, 0, 1).$$

Pertanto $\dim U = 2$ ed una sua base è $\{(1, 2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$.
Per calcolare la dimensione di W_k facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 3-2k & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - kR_1, R_3 \to R_3 - (3 - 2k)R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & 0 & -1 \\ 0 & -2+3k-2k^2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{1+k^2} R_2$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{1+k^2} \\ 0 & -2+3k-2k^2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - (-2 + 3k - 2k^2)R_2$ da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{1+k^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3k}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $\dim W_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ ed una sua base è

$$\{(1, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (3 - 2k, -2, 0, 2)\} \text{ se } k \neq 0$$

e

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1)\} \text{ se } k = 0.$$

(b) Per calcolare la dimensione di $U + W_k$ facciamo operazioni elementari sulla matrice che ha per righe quelle di A e di B, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{1+k^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3k}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1-k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{1+k^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3k}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 + (k-1)R_2, R_4 \to R_4 - R_2$, si ottiene la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k & k-1 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2+k^2}{1+k^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3k}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$, eliminando la terza riga, si ha una matrice a gradini e quindi $r(C) = 4$. Se $k = 0$ si ha

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e, essendo la terza e quarta riga una multipla dell'altra, si deduce che $r(C) = 3$.
Pertanto $\dim(U + W_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0 \\ 4 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$.
Ora la formula di Grassmann da

$$\dim(U \cap W_k) = \dim(U) + \dim(W_k) - \dim(U + W_k) = 2 + \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} - \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0 \\ 4 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} = 1$$

per ogni k.
(c) Dato che $k \neq 0$ sappiamo da (b) che $\dim(U + W_k) = 4$, perciò $U + W_k = \mathbb{R}^4$. Quindi un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ è tale che $\{(1, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 0, 1-k, -1), v\}$ non sono generatori di $\mathbb{R}^4$ se e solo se $r((1, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 0, 1-k, -1), v) \leq 3$. Calcoliamo ora $r((1, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 0, 1-k, -1))$ con operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1-k & -1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - kR_1, R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & 0 & -1 \\ 0 & k & 1-k & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - \frac{k}{1+k^2} R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-k & \frac{k-1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che tale matrice ha sempre rango 3, quindi

$$r((1,-k,0,0),(k,1,0,-1),(1,0,1-k,-1)) = 3.$$

Concludiamo che $r((1,-k,0,0),(k,1,0,-1),(1,0,1-k,-1),v) \leq 3$ se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che $v = s(1,-k,0,0) + t(k,1,0,-1) + u(1,0,1-k,-1)$. Dunque tutti i vettori v sono quelli del tipo

$$(s+kt+u, -ks+t, (1-k)u, -t-u), \ \forall s,t,u \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE COME SCRITTO:

(a) Si ha

$$\dim U = 4 - r(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}) = 4 - 2 = 2$$

ed una sua base si ottiene risolvendo il sistema. Posto $X_3 = 1, X_4 = 0$ si trova $(1,2,1,0)$, mentre posto $X_3 = 0, X_4 = 1$ si trova $(-1,-1,0,1)$. Dato che questi non sono uno multiplo dell'altro, si ha che $\{(1,2,1,0),(-1,-1,0,1)\}$ è una base di U.
Ora

$$\dim W_k = r(\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 3-2k & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ k & 1 & -1 \\ 3-2k & -2 & 2 \end{pmatrix}).$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ k & 1 & -1 \\ 3-2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3k$$

da cui deduciamo subito che $\dim W_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ ed una sua base è

$$\{(1,-k,0,0),(k,1,0,-1),(3-2k,-2,0,2)\} \text{ se } k \neq 0$$

e

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1)\} \text{ se } k = 0.$$

(b) Si ha $\dim(U+W_k)=r(A)$, dove

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 3-2k & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ 3-2k & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=k(5-2k), \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=k(k-1)$$

chiaramente $r(A)=4$ se $k\neq 0$. Se $k=0$ consideriamo il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Orlando questo minore si ottengono quelli sopra, che sono nulli per $k=0$, dunque $r(A)=3$ se $k=0$. Pertanto $\dim(U+W_k)=\begin{cases} 3 & \text{se } k=0 \\ 4 & \text{se } k\neq 0 \end{cases}$ e la formula di Grassmann da

$$\dim(U\cap W_k)=\dim(U)+\dim(W_k)-\dim(U+W_k)=2+\begin{cases} 2 & \text{se } k=0 \\ 3 & \text{se } k\neq 0 \end{cases}-\begin{cases} 3 & \text{se } k=0 \\ 4 & \text{se } k\neq 0 \end{cases}=1$$

per ogni k.

(c) Dato che $k\neq 0$ sappiamo da (b) che $\dim(U+W_k)=4$, perciò $U+W_k=\mathbb{R}^4$. Quindi un vettore $v=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ è tale che $\{(1,-k,0,0),(k,1,0,-1),(1,0,1-k,-1),v\}$ non sono generatori di $\mathbb{R}^4$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1-k & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}=0$$

ovvero, calcolando il determinante, se e solo se

$$k(1-k)a+(1-k)b+(1-k+k^2)c+(1-k)(1+k^2)d=0. \quad \blacksquare$$

3. Sia $k\in\mathbb{R}$ e sia

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & k & k \\ -1 & -2 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.
(b) Si consideri una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3. È possibile che la stessa sequenza trasformi $A^2 + A$ in $A + I_3$?

SOLUZIONE:

(a) Facciamo operazioni elementari su A. Con le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 + R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & k-1 \\ 0 & -2 & k-1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & k-1 \\ 0 & k & k-1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1-k}{2} \\ 0 & k & k-1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1-k}{2} \\ 0 & 0 & \frac{k^2+k-2}{2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto se $k^2 + k - 2 = 0$, ovvero se $k = -2, 1$ si ha che $r(A) = 2$ e quindi A non è prodotto di matrici elementari.
Assumiamo quindi $k \neq -2, 1$.
Con l'operazione (su B), $R_3 \to \frac{2}{k^2+k-2}R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1-k}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 + R_3, R_2 \to R_2 + \frac{k-1}{2}R_3$, si ottiene I_3.
Pertanto A è prodotto di matrici elementari se e solo se $k \neq -2, 1$.
Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, risalendo alle operazioni fatte, abbiamo allora che

$$R_{23}(\frac{k-1}{2})R_{13}(1)R_3(\frac{2}{k^2+k-2})R_{32}(-k)R_2(-\frac{1}{2})R_{23}R_{13}(1)R_{12}(1)A = I_3$$

da cui

$$A = R_{12}(1)^{-1}R_{13}(1)^{-1}R_{23}^{-1}R_2(-\frac{1}{2})^{-1}R_{32}(-k)^{-1}R_3(\frac{2}{k^2+k-2})^{-1}R_{13}(1)^{-1}R_{23}(\frac{k-1}{2})^{-1}$$

e quindi

$$A = R_{12}(-1)R_{13}(-1)R_{23}R_2(-2)R_{32}(k)R_3(\frac{k^2+k-2}{2})R_{13}(-1)R_{23}(-\frac{k-1}{2}). \ \blacksquare$$

(b) Consideriamo ora, per $k \neq -2, 1$, una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3. Allora, tenendo conto che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, esiste una matrice R, prodotto di matrici elementari, tale che $RA = I_3$ e quindi $R(A^2+A) = RA^2+RA = I_3A+I_3 = A+I_3$, dunque la stessa sequenza trasforma A^2+A in $A+I_3$. $\blacksquare$

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (-1,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = 3(id_U), F(E_3) = E_1 - E_2 + (k+1)E_3 + kE_4, F(E_3+E_4) = E_1 + (k+2)E_3 + kE_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, E_3, E_3+E_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che

$$F(v_1) = 3v_1 \text{ e } F(v_2) = 3v_2.$$

Per determinare la matrice associata ad F in tale base esprimiamo $F(E_3) = E_1 - E_2 + (k+1)E_3 + kE_4$ e $F(E_3+E_4) = E_1 + (k+2)E_3 + kE_4$ nella base e. Si ha

$$av_1+bv_2+cE_3+d(E_3+E_4) = (a-b)E_1+bE_2+(a+c+d)E_3+dE_4 = E_1-E_2+(k+1)E_3+kE_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a-b=1 \\ b=-1 \\ a+c+d=k+1 \\ d=k \end{cases}$$

che ha soluzione $a=0, b=-1, c=1, d=k$. Pertanto $F(E_3)=0v_1-v_2+E_3+k(E_3+E_4)$. Analogamente

$$av_1+bv_2+cE_3+d(E_3+E_4)=(a-b)E_1+bE_2+(a+c+d)E_3+dE_4=E_1+(k+2)E_3+kE_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a-b=1 \\ b=0 \\ a+c+d=k+2 \\ d=k \end{cases}$$

che ha soluzione $a=1, b=0, c=1, d=k$. Pertanto $F(E_3+E_4)=v_1+0v_2+E_3+k(E_3+E_4)$. Ne segue che

$$M_e(F)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T)=\begin{vmatrix} 3-T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3-T & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 0 & k & k-T \end{vmatrix}=(T-3)^2T(T-1-k).$$

Le radici di $(T-3)^2T(T-1-k)=0$ sono $0, 3$ e $k+1$. Osserviamo che $0=k+1$ se e solo se $k=-1$ e $3=k+1$ se e solo se $k=2$. Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq -1, 2$	$\lambda_1=0$ (m.a. 1), $\lambda_2=3$ (m.a. 2), $\lambda_3=k+1$ (m.a. 1)
$k=-1$	$\lambda_1=0$ (m.a. 2), $\lambda_2=3$ (m.a. 2)
$k=2$	$\lambda_1=0$ (m.a. 1), $\lambda_2=3$ (m.a. 3)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.

Se $k=-1$, posto $T=0$ nella matrice $M_e(F)-TI_4$ si ottiene

$$M_e(F)-0I_4=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_0(F)=4-3=1$.

Ora prendiamo $\lambda_2=3$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_3(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 3 sono soluzioni del sistema $(M_e(F)-3I_4)X=0$ dove $X={}^t(x,y,z,w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} w=0\\ z=0\\ -2z+w=0\\ kz+(k-3)w=0\end{cases}$$

che ha soluzioni $z=w=0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 3 sono tutti del tipo xv_1+yv_2 e una base di $V_3(F)$ è $\{v_1,v_2\}$ per ogni k.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k\neq -1,2$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
3	2	2
$k+1$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

2) $k=-1$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	2
3	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k=2$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
3	2	3

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.
Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k \neq -1, 2$. ■

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} X = -1 - t \\ Y = k + t \\ Z = kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{cases} X + 2Y + Z = 1 \\ -X + Y + Z = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s sono complanari.
(b) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è incidente a r_k per ogni k e p contiene s.
(c) Determinare per quali valori di k esiste una retta r' di $\mathbf{A}$ tale che r', r_k ed s sono complanari. In tal caso scrivere l'equazione di r'.

SOLUZIONE:

(a) Scriviamo le equazioni parametriche di s. Posto $Y = u$ si ha

$$\begin{cases} X + Z = 1 - 2u \\ -X + Z = 1 - u \end{cases}$$

da cui

$$s : \begin{cases} X = -\frac{1}{2}u \\ Y = u \\ Z = 1 - \frac{3}{2}u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

e quindi s passa per $Q' = Q'(0, 0, 1)$ ed è parallela a $v' = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ (ottenuto moltiplicando per -2). Invece r_k passa per $Q_k = Q_k(-1, k, 0)$ ed è parallela a $v_k = -e_1 + e_2 + ke_3$. Notiamo per il seguito che r_k non è parallela ad s.
Ora r_k ed s sono complanari se e solo se

$$0 = \begin{vmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = k^2 + k - 4$$

dunque se e solo se $k = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

(b) Un piano p contenente s avrà equazione

$$\alpha(X + 2Y + Z - 1) + \beta(-X + Y + Z - 1) \text{ per } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

ovvero

$$(\alpha - \beta)X + (2\alpha + \beta)Y + (\alpha + \beta)Z - \alpha - \beta = 0.$$

Ora p è incidente r_k per ogni k se e solo se non è parallelo a r_k, dunque se e solo se

$$(\alpha-\beta)(-1)+(2\alpha+\beta)(1)+(\alpha+\beta)(k)\neq 0 \text{ per ogni } k,$$

ovvero se e solo se

$$(\alpha+\beta)k+\alpha+2\beta\neq 0 \text{ per ogni } k.$$

Se ne deduce che deve essere necessariamente $\alpha+\beta=0$ (infatti se fosse $\alpha+\beta\neq 0$ potremmo sempre trovare un k tale che $(\alpha+\beta)k+\alpha+2\beta=0$). Inoltre se $\alpha+\beta=0$ si ha $\alpha=-\beta$ e quindi $\alpha+2\beta=\beta\neq 0$ e la condizione di incidenza è soddisfatta.
Dunque l'equazione di p è

$$-2\beta X-\beta Y=0$$

ovvero

$$2X+Y=0.$$

(c) Affinché r', r_k e s siano complanari deve essere che r_k e s sono complanari, quindi, per la (a), $k=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Ora r' potrà essere una qualsiasi retta del piano contenente r_k e s, quindi sarà data fissando un qualsiasi punto di tale piano, per esempio Q' ed avrà per giacitura un vettore $w=cv_k+c'v'$ per ogni $c,c'\in\mathbb{R}$. Dunque r' avrà equazione

$$r':\begin{cases} X=(-c+c')t \\ Y=(c-2c')t \\ Z=1+(kc+3c')t \end{cases},t\in\mathbb{R}.\ \blacksquare$$

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $F:V\to V$ un endomorfismo di V.
(a) Dimostrare che $V/\mathrm{Im}(F)\cong N(F)$;
(b) Supponiamo che F non è iniettivo e che esiste un autovalore λ di F con molteplicità geometrica n. Dimostrare che $\lambda=0$ e che F è nulla.

SOLUZIONE:

(a) Usando il teorema di rango-nullità si ha

$$\dim(V/\mathrm{Im}(F))=\dim V-\dim\mathrm{Im}(F)=\dim N(F)$$

e pertanto $V/\mathrm{Im}(F)\cong N(F)$ dato che sono spazi vettoriali della stessa dimensione.
(b) Per ipotesi si ha $\dim V_\lambda(F)=n$ e quindi $V_\lambda(F)=V$. Ne segue che, per ogni $v\in V$ si ha che $v\in V_\lambda(F)$ e quindi $F(v)=\lambda v$. Ma F non è iniettivo dunque esiste $w\neq 0$ tale che $F(w)=0$, da cui $\lambda w=0$ e pertanto $\lambda=0$. Ma allora per ogni $v\in V$ si ha $F(v)=\lambda v=0v=0$, quindi F è nulla. $\blacksquare$