Giornate di Geometria Algebrica
e
Argomenti Correlati XIV

Dipartimento di Matematica - Università di Genova
Genova 29 maggio - 1 giugno 2018

Sunti

Daniele Agostini

(Max-Planck-Institut Leipzig)

Sizigie asintotiche e secanti di varietà proiettive.

Le sizigie di una varietà proiettiva sono le relazioni algebriche tra le equazioni che definiscono la varietà. L'algebra delle sizigie ha delle relazioni profonde con la geometria della varietà.

In questa presentazione, mostreremo che se una varietà ha degli spazi secanti inaspettati allora le sue sizigie asintotiche non si annullano. Proveremo anche che il viceversa è valido nel caso delle superfici lisce, per spazi secanti di dimensione piccola. Come applicazione dei nostri risultati, faremo vedere come stimare l'irrazionalità di una varietà usando le sizigie. Uno strumento fondamentale nel nostro studio è lo schema di Hilbert di punti su una superficie, ed in particolare la sua categoria derivata.

Giuseppe Ancona

(Università di Strasburgo)

La congettura standard di tipo Hodge per le varietà abeliane di dimensione quattro.

Sia S una superificie e V il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dei divisori su S modulo equivalenza numerica. Il prodotto d'intersezione definisce una forma quadratica non degenere su V. Grazie ai lavori di Hodge e Segre sappiamo che questa forma quadratica è di segnatura $(s_+, s_-) = (1, dimV - 1)$.

Grothendieck ha formulato negli anni sessanta una congettura che propone una generalizzazione di questo enunciato a varietà di dimensione superiore. In caratteristica zero questa congettura è una conseguenza delle relazioni di Hodge-Riemann. In caratteristica p assai poco è noto.

Attraverso formule del prodotto classiche sulle forme quadratiche tradurremo questo problema di segnatura in un problema p-adico. Quest'ultimo può essere attaccato con la teoria di Hodge p-adica. Ciò ci permetterà di dedurre la congettura di Grothendieck per le varietà abeliane di dimensione quattro.

Ingrid Bauer

(Universität Bayreuth)

Varietà rigide e la soluzione di un problema di Kodaira-Morrow.

Nel libro *Complex Manifolds* di K. Kodaira e J. Morrow, gli autori pongono il seguente problema:
Problema: esiste una varietà compatta complessa liscia M tale che

(1) M è rigida;

(2) $H^1(M, \Theta_M) \neq 0$ (equivalentemente: M non è infinitesimamente rigida).

Notando che una varietà infinitesimamente rigida è automaticamente rigida, una risposta affermativa al problema di Kodaira-Morrow farebbe vedere che l'altra direzione è falsa in generale.
Nella prima parte del seminario richiamerò varie nozioni di *rigidità* di varietà compatte complesse (come ad esempio: rigidità locale, rigidità globale, rigidità infinitesimale....), spiegherò le varie relazioni tra di loro e darò vari risultati ed esempi.
La seconda parte è dedicata ad una serie infinita di esempi di superfici di tipo generale che sono rigide, ma non infinitesimamente rigide.
Piu precisamente darò un idea del seguente
Teorema. Per ogni $n \geq 8$ tale che $3 \not| n$ esiste una superfici minimale S_n, regolare di tipo generale con invarianti

$$K_{S_n}^2 = 2(n-3)^2, \ \ p_g(S_n) = \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

e tale che S_n è rigida, ma non infinitesimamente rigida.

Francesco Bei

(Institut Camille Jordan, Université Lyon1)

Sulla coomologia L^2-$\overline{\partial}$ di certe metriche kähleriane complete.

Le metriche kähleriane di tipo Saper sono un'importante classe di metriche kähleriane, complete e di volume finito costruite da Saper sulla parte regolare di una qualunque varietà proiettiva complessa V il cui luogo singolare è costituito da punti isolati. L'importanza di tali metriche risiede nel fatto che la loro coomologia L^2 di de Rham è isomorfa alla coomologia d'intersezione di V mentre la loro coomologia L^2-$\overline{\partial}$ è isomorfa alla coomologia di Dolbeault di una qualunque risoluzione di V. Successivamente la costruzione di metriche di tipo Saper è stata generalizzata al caso di varietà proiettive complesse con singolarità arbitrarie da Grant-Melles e Milman. L'obiettivo di questo seminario è di descrivere un recente lavoro in collaborazione con Paolo Piazza riguardante la coomologia L^2-$\overline{\partial}$ di una classe di metriche kähleriane complete definite sulla parte regolare di uno spazio analitico complesso, compatto ed irriducibile X e che contiene come caso particolare le metriche costruite da Grant-Melles e Milman. Il nostro risultato fornisce delle condizioni sufficienti affinchè la coomologia L^2-$\overline{\partial}$ di tali metriche sia isomorfa alla coomologia di Dolbeault di una qualunque risoluzione di X. Infine daremo alcune applicazioni di questo risultato. Oltre a quelle nel caso di metriche di tipo Saper mostremo che il nostro risultato si applica anche alle metriche kähleriane utilizzate da Siu-Yau per il loro teorema di compattificazione.

Nicola Cancian

(Università di Trento)

Superfici semi-isogene di tipo misto.

Sia C una superficie di Riemann compatta. Consideriamo l'azione di un gruppo finito G su $C \times C$, avente alcuni elementi di G che scambiano le due fibrazioni naturali di $C \times C$, e supponiamo che il sottogruppo degli elementi che preservano queste fibrazioni agisca liberamente. Il quoziente viene detto *superficie semi-isogena di tipo misto*. Nella discussione verranno presentate queste superfici; capiremo come la loro geometria è codificata in un insieme di dati algebrici. Grazie a questi risultati, vedremo come è stato possibile classificare le superfici semi-isogenene con $K^2 > 0$ e $\chi = 1$, trovando nuovi ed interessanti esempi di superfici di tipo generale. Affronteremo anche il problema della minimalità di tali superfici; mostreremo infatti che è possibile dare una descrizione esplicita del loro sistema bicanonico, elemento strettamente legato al modello minimale delle superfici di tipo generale.

Alessio D'Ali

(Max Planck Institut für Mathematik, Leipzig)

Anelli di Stanley-Reisner generalizzati e azioni di gruppo traslative.

La *corrispondenza di Stanley-Reisner*, che assegna un anello commutativo a ogni complesso simpliciale finito, è un utile e ben studiato ponte tra l'algebra commutativa e la combinatoria. Nel 1987 Sergey Yuzvinsky ha proposto una costruzione che permette di vedere l'anello di Stanley-Reisner di un complesso simpliciale finito come l'anello delle sezioni globali di un fascio di anelli su un insieme parzialmente ordinato.

Spinti da applicazioni nella teoria degli arrangiamenti abeliani, Emanuele Delucchi e io estendiamo la costruzione di Yuzvinsky al caso di poset simpliciali (anche infiniti) di lunghezza finita. Questa generalizzazione ci permette di considerare in modo naturale anche quozienti di complessi (e poset) simpliciali rispetto ad azioni di gruppo che godono della proprietà *traslativa*.

Alessandro De Stefani

(University of Nebraska - Lincoln)

Potenze simboliche in caratteristica mista.

Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo in un anello di polinomi a coefficienti complessi. La n-esima potenza simbolica di $\mathfrak{p}$, denotata $\mathfrak{p}^{(n)}$, è definita come la componente $\mathfrak{p}$-primaria di $\mathfrak{p}^n$, la n-esima potenza ordinaria. Un teorema classico di Zariski e Nagata caratterizza $\mathfrak{p}^{(n)}$ come l'ideale di tutte le funzioni polinomiali che si annullano di ordine almeno n su tutti i punti della varietà algebrica definita da $\mathfrak{p}$. Questa descrizione, tuttavia, dipende in modo cruciale dal fatto che si stia lavorando su un campo di caratteristica zero. Lo scopo di questa conferenza è presentare risultati anologhi in caratteristica mista, passando per caratteristica $p > 0$. Il risultato principale è una descrizione delle potenze simboliche di ideali primi in $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]$, ottenuta combinando proprietà di operatori differenziali e p-derivazioni. I risultati presentati sono parte di un lavoro in collaborazione con Eloísa Grifo e Jack Jeffries.

Enrico Fatighenti

(Università di Roma Tre)

Varietà di Fano di tipo K3 e hyperkähler.

Anche se le varietà di Fano in dimensione alta non sono classificate, un modo eccellente di fornire esempi è guardare alle varietà ottenute a partire da sezioni di fibrati omogenei su Grassmanniane. Un caso particolarmente interessante di esempi è dato dalle cosiddette Fano di tipo K3, in particolare per il loro naturale collegamento con le varietà irriducibili olomorfe simplettiche (o hyperkähler). In questo talk analizzeremo alcuni nuovi esempi di famiglie di Fano di tipo K3 e alcune famiglie di hyperkähler ad esse collegate. Questo è un lavoro in collaborazione con Giovanni Mongardi (Bologna).

Roberto Laface

(Technische Universität München)

Sui numeri di Picard delle varietà abeliane in caratteristica arbitraria

Verranno discussi i numeri di Picard delle varietà abeliane complesse (lavoro in collaborazione con Klaus Hulek) e su campi di caratteristica positiva. Dopo avere esibito un algoritmo che permette il calcolo del numero di Picard di una varietà abeliana, si dimostra che l'insieme dei numeri di Picard delle varietà abeliane g-dimensionali non è completo se la dimensione é almeno due. In altre parole, esistono dei salti nella sequenza dei possibili numeri di Picard.

Inoltre, si studia il problema di determinare quali interi positivi possano essere il numero di Picard di una varietà abeliana di dimensione g, e si descrive la struttura (a meno di isogenie) delle varietà abeliane aventi un grande numero di Picard. In caratteristica zero, si è in grado di dare una descrizione molto dettagliata e soddisfacente della situazione, mentre in caratteristica positiva alcune questioni necessitano ulteriori studi e alcune domande restano ancora aperte.

Federico Lo Bianco

(Università di Aix-Marseille)

Dinamica degli automorfismi di superfici e di varietà hyperkähleriane

Dato un automorfismo $f\colon X \to X$ di una varietà complessa proiettiva (o compatta Kähler), lo studio della sua azione in coomologia permette di descrivere alcune delle sue proprietà dinamiche; per esempio, nel caso di un automorfismo di una superficie (complessa compatta), l'azione in coomologia permette di determinare se f agisce permutando le fibre di una fibrazione su una curva $\pi\colon X \to C$.

Il mio obiettivo è di spiegare un risultato analogo per le trasformazioni birazionali di varietà iperkähleriane (o simplettiche olomorfe irriducibili): tali varietà sono una generalizzazione in dimensione superiore delle superfici K3, e giocano un ruolo centrale nella classificazione delle varietà compatte kähleriane con prima classe di Chern nulla. Come vedremo, la coomologia di una varietà iperkähleriana si comporta in modo simile a quella di una superficie, il che consente di descrivere l'azione in coomologia di un automorfismo/trasformazione birazionale, e di determinare in quali casi possa esistere una fibrazione invariante.

Emanuele Macrì

(Northeastern University)

Condizioni di stabilità di Bridgeland e applicazioni

Una delle idee principali nella teoria delle categorie derivate, dovuta a Bondal e Orlov negli anni Novanta, è che la categoria derivata dei fasci coerenti su una varietà proiettiva liscia dovrebbe contenere informazioni molto interessanti sulla geometria della varietà stessa, ad esempio, sulle proprietà birazionali.

Un modo congetturale per ottenere alcune di queste informazioni è l'utilizzo della teoria degli spazi di moduli di oggetti nella categoria derivata, generalizzando l'usuale teoria degli spazi di moduli di fibrati vettoriali. Nel 2003, Bridgeland ha introdotto il concetto di condizione di stabilità per categorie derivate; questo permette di definire e studiare suddetti spazi di moduli di oggetti.

In questo seminario, farò un'introduzione alla teoria di Bridgeland, concentrandomi in particolare sulle applicazioni della teoria stessa a problemi di geometria algebrica classica. Presenterò, ad esempio, la recente dimostrazione, dovuta a Bayer, del teorema di Brill-Noether su curve, la descrizione del cono dei divisori nef su uno schema di Hilbert dei punti su una superficie (ottenuta in collaborazione con Bayer) e infine, tempo permettendo, connessioni con la questione della razionalità per varietà cubiche in dimensione 4 (in collaborazione con Bayer, Lahoz, Nuer, Perry e Stellari).

Simone Noja

(Università del Piemonte Orientale)

Supergeometria, Supervarietà di Calabi-Yau "Non-Projected" e loro Immersioni

La supergeometria è lo studio di varietà caratterizzate da fasci di algebre $\mathbb{Z}_2$-graduate i cui elementi pari commutano ed i cui elementi dispari anticommutano. Un esempio di questo tipo è dato dall'algebra esterna su uno spazio vettoriale. Dopo aver brevemente introdotto le premesse matematiche e le motivazione fisiche che hanno condotto all'introduzione di questo tipo di geometrie, verranno presentati alcuni risultati recenti relativamente a supervarietà di Calabi-Yau "non-projected", la cui geometria, cioè, non può essere ricostruita a partire dall'ordinaria varietà sottostante. In particolare, verranno indagate questioni relative all'immersione di questa classe di supervarietà: si mostrerà che, sebbene tali varietà non ammettano immersioni in superspazi proiettivi - non sono cioè superproiettive -, esse possono sempre essere immerse in super Grassmanniane.

Marta Panizzut

(TU Berlin)

Politopi K3 e superfici quartiche lisce tropicali

La geometria tropicale è un ramo recente della matematica dove interagiscono geometria algebrica, combinatorica e geometria poliedrale. L'equivalente delle varietà algebriche sono le varietà tropicali, che hanno la struttura di complessi poliedrali soddisfacenti alcune proprietà combinatoriche. Solitamente le varietà tropicali sono quindi descritte come "orme" lineari a tratti delle varietà classiche, di cui conservano delle informazioni.

Le regioni di un'ipersuperficie tropicale sono le componenti connesse del suo complementare, e possono essere poliedri limitati o illimitati. Una superficie quartica liscia tropicale di genere uno definisce un'unica regione limitata. Un politopo di dimensione tre viene detto politopo K3 se può essere ottenuto come regione limitata di una quartica liscia tropicale.

In questa conferenza riporterò i risultati ottenuti in collaborazione con Gabriele Balletti sullo studio delle proprietà combinatoriche dei politopi K3.

Andrea Petracci

(Università di Nottingham)

Mirror Symmetry, varietà di Fano e deformazioni di varietà toriche

Lo studio delle varietà di Fano si è arricchito, di recente, di nuove idee che provengono dalla Mirror Symmetry. In questo contesto è fondamentale studiare le degenerazioni toriche delle varietà di Fano, o viceversa le deformazioni delle varietà di Fano toriche e singolari. Queste ultime possono essere studiate mediante la geometria dei politopi e, di conseguenza, sono molto più facili da classificare.

Klaus Altmann ha ampiamente studiato le deformazioni di varietà toriche affini, notando come certe decomposizioni di Minkowski di poliedri inducano deformazioni.

In questo intervento, che si basa su una collaborazione in corso con Alessio Corti e Paul Hacking, illustrerò un approccio per costruire deformazioni di varietà toriche affini di Gorenstein di dimensione 3 nell'ambito del programma di Gross–Siebert. Questo approccio può essere reso globale in modo da costruire deformazioni di varietà di Fano toriche di Gorenstein di dimensione 3.

Mauro Porta

(Université de Strasbourg)

Sull'isomorfismo di Hochschild-Kostant-Rosenberg analitico.

Sia k un campo di caratteristica zero e sia A una k-algebra commutativa e liscia. Nella sua versione più semplice, l'isomorfismo di Hochschild-Kostant-Rosenberg (HKR) è un isomorfismo tra i gruppi di omologia di Hochschild $\mathrm{HH}_i(A) = \mathrm{Tor}_i^{A \otimes_k A}(A, A)$ di A e le potenze esterne del modulo dei differenziali di Kähler di A, $\Lambda^i \Omega^1_A$. Quando A non è più liscia, bisogna rimpiazzare il modulo Ω^1_A con il complesso cotangente $\mathbb{L}_A$, e per dimostrare l'isomorfismo di HKR a livello di complessi di catene occorre utilizzare il linguaggio delle ∞-categorie e della geometria derivata.

In questo talk parlerò di un lavoro in corso con J. António e F. Petit che mira a generalizzare questo isomorfismo nel contesto della geometria analitica, che si può interpretare sia come geometria analitica complessa sia come geometria analitica non-archimedea (pur sempre su un campo di caratteristica zero). Comincerò con una revisione dell'isomorfismo HKR in setting algebrico e con una panoramica delle sue applicazioni. In seguito, ne darò una dimostrazione semplificata rispetto alla versione originale dovuta a B. Toën e G. Vezzosi. Spiegherò infine come formulare un enunciato analogo in geometria analitica utilizzando idee della geometria analitica derivata, e mostrerò come adattare la nuova dimostrazione si applichi in questo contesto.

Luca Rizzi

(Università di Udine)

Forme aggiunte su varietà algebriche

La teoria dell'aggiunta è stata introdotta da A. Collino e G.P. Pirola per curve algebriche lisce e poi generalizzata da G.P. Pirola e F. Zucconi nel caso di varietà algebriche lisce di dimensione qualunque. L'idea principale di questa teoria è studia-re particolari forme differenziali, chiamate forme aggiunte, su una varietà algebrica per ottenere informazioni sulle deformazioni infinitesimali della varietà stessa. Il contesto naturale per l'applicazione di questa teoria è dato dai problemi di tipo Torelli, in particolare il problema di Torelli infinitesimale.

Eleonora Anna Romano

(Università di Varsavia)

Una caratterizzazione di Fano 4*-folds tramite fibrazioni coniche*

Sia X una varietà proiettiva, complessa, liscia e Fano di dimensione arbitraria n. Una *fibrazione conica* $f\colon X \to Y$ è una contrazione di tipo fibrato con fibre di dimensione uno. Denotiamo con $\mathcal{N}_1(X)$ lo spazio vettoriale reale degli 1-cicli a coefficienti in $\mathbb{R}$, modulo equivalenza numerica, la cui dimensione è il *numero di Picard* ρ_X.

Dato un divisore primo $D \subset X$, l'inclusione $i\colon D \hookrightarrow X$ induce il push-forward di 1-cicli $i_*\colon \mathcal{N}_1(D) \to \mathcal{N}_1(X)$.

Consideriamo $\mathcal{N}_1(D,X) := i_*(\mathcal{N}_1(D)) \subseteq \mathcal{N}_1(X)$, quindi il sottospazio lineare di $\mathcal{N}_1(X)$ generato dalle classi di equivalenza numerica di curve contenute in D. Casagrande ha introdotto il seguente invariante, chiamato *Lefschetz defect*:

$$\delta_X := \max\{\operatorname{codim} \mathcal{N}_1(D,X) | D \subset X \text{ divisore primo}\}.$$

In questo seminario, osserveremo dapprima che data una fibrazione conica $f\colon X \to Y$ con $r := \rho_X - \rho_Y > 1$, sussiste un legame tra r e δ_X. Ad esempio, è possibile trovare dei lower-bounds per δ_X in termini di r.

Successivamente ci focalizzeremo sul caso in cui $n = 4$ e $\delta_X = 3$, presentando un risultato di caratterizzazione in termini di δ_X di Fano 4-folds che ammettono una fibrazione conica $f\colon X \to Y$ con $\rho_X - \rho_Y = 3$. Come conseguenza, osserveremo che tali varietà sono razionali.

Alessio Sammartano

(Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley)

Sizigie in schemi di Hilbert di intersezioni complete

Sia S un anello di polinomi su un campo k e sia $I \subseteq S$ un'ideale omogeneo contenente una sequenza regolare $f_1, \dots, f_c$. In questa conferenza studieremo il comportamento dei numeri di Betti di I, in relazione ai gradi dell'intersezione completa $(f_1, \dots, f_c)$ e alla funzione di Hilbert o polinomio di Hilbert di I. Questo lavoro è in collaborazione con Giulio Caviglia (Purdue University).

Giovanni Staglianò

(Università Politecnica delle Marche)

Congruenze di coniche 5*-secanti e razionalità di alcune ipersuperfici cubiche di* $\mathbb{P}^5$*.*

I risultati di Hassett e di Addington e Thomas portano alla seguente riformulazione della Congettura di Kuznetsov: una ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^5$ che corrisponde ad un punto generale sul divisore irriducibile $\mathcal{C}_d$, parametrizzante le ipersuperfici cubiche liscie di $\mathbb{P}^5$ di discriminante d, è razionale se e solo se d è un valore ammissibile nel senso di Hasset, cioè, se e solo se $d > 6$ è un intero pari non divisibile da 4, 9, e primi dispari della forma $2 + 3m$. Il nostro risultato principale è la prova di questa congettura per i primi valori ammissibili $d = 26$ e $d = 38$ (il caso $d = 14$ era noto classicamente), usando la costruzione di una *congruenza di coniche* 5*-secanti*. Questo è un lavoro in collaborazione con Francesco Russo.

Mattia Talpo

(Simon Fraser University)

Una versione logaritmica della corrispondenza di McKay derivata.

La corrispondenza di McKay derivata è una equivalenza di categorie derivate di due risoluzioni diverse di un certo tipo di varietà singolari. L'esempio più semplice è il quoziente del piano affine complesso $\mathbb{C}^2$ per l'azione di un sottogruppo finito di $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. In questo caso, le due risoluzioni sono date dallo stack quoziente e dal modello liscio minimale ottenuto tramite scoppiamenti.

Dopo aver ricapitolato le basi di tutto ciò, nel mio seminario parlerò di un lavoro in collaborazione con Sarah Scherotzke e Nicolò Sibilla, in cui dimostriamo una versione della corrispondenza di McKay derivata nel contesto della geometria logaritmica.