

# Congruenze di coniche 5-secanti e razionalità di alcune ipersuperfici cubiche di $\mathbb{P}^5$

Giovanni Staglianò

(In collaborazione con Francesco Russo)

Università Politecnica delle Marche

29 maggio 2018

- 1 Motivazioni e generalità
- 2 Cubiche speciali parametrizzate da divisori dello spazio dei moduli
- 3 Stato dell'arte sulla razionalità delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  (prima di luglio 2017)
- 4 Valori ammissibili e congettura di Kuznetsov
- 5 Razionalità tramite congruenze di coniche pentasecanti una superficie
- 6 Rappresentazioni birazionali per le cubiche generiche in  $\mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$

## Section 1

# Motivazioni e generalità

Una varietà proiettiva complessa (liscia) di dimensione  $n$  si dice razionale se esiste una mappa birazionale  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} X$ .

Le ipersuperfici (lisce) in uno spazio proiettivo sono le varietà più semplici da descrivere in termini di equazioni ed è naturale chiedersi se siano razionali.

È ben noto che ogni ipersuperficie quadrica è razionale. E' anche classicamente ben noto che una superficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  è razionale. Tuttavia un celebre teorema asserisce:

**Teorema ([Clemens e Griffiths (1972)])**

*Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  non è razionale.*

Uno dei principali problemi aperti della geometria algebrica è il seguente:

**Problema:** Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$  *abbastanza generale* è irrazionale?

Si congetture infatti che la maggior parte delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  siano irrazionali, sebbene non esista un solo esempio dove sia stata dimostrata l'irrazionalità.

# Motivazione

Una varietà proiettiva complessa (liscia) di dimensione  $n$  si dice razionale se esiste una mappa birazionale  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} X$ .

Le ipersuperfici (lisce) in uno spazio proiettivo sono le varietà più semplici da descrivere in termini di equazioni ed è naturale chiedersi se siano razionali.

È ben noto che ogni ipersuperficie quadrica è razionale. E' anche classicamente ben noto che una superficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  è razionale. Tuttavia un celebre teorema asserisce:

**Teorema ([Clemens e Griffiths (1972)])**

*Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  non è razionale.*

Uno dei principali problemi aperti della geometria algebrica è il seguente:

**Problema:** Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$  *abbastanza generale* è irrazionale?

Si congetture infatti che la maggior parte delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  siano irrazionali, sebbene non esista un solo esempio dove sia stata dimostrata l'irrazionalità.

Una varietà proiettiva complessa (liscia) di dimensione  $n$  si dice razionale se esiste una mappa birazionale  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} X$ .

Le ipersuperfici (lisce) in uno spazio proiettivo sono le varietà più semplici da descrivere in termini di equazioni ed è naturale chiedersi se siano razionali.

È ben noto che ogni ipersuperficie quadrica è razionale. E' anche classicamente ben noto che una superficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  è razionale.

Tuttavia un celebre teorema asserisce:

**Teorema ([Clemens e Griffiths (1972)])**

*Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  non è razionale.*

Uno dei principali problemi aperti della geometria algebrica è il seguente:

**Problema:** Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$  *abbastanza generale* è irrazionale?

Si congetture infatti che la maggior parte delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  siano irrazionali, sebbene non esista un solo esempio dove sia stata dimostrata l'irrazionalità.

Una varietà proiettiva complessa (liscia) di dimensione  $n$  si dice razionale se esiste una mappa birazionale  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} X$ .

Le ipersuperfici (lisce) in uno spazio proiettivo sono le varietà più semplici da descrivere in termini di equazioni ed è naturale chiedersi se siano razionali.

È ben noto che ogni ipersuperficie quadrica è razionale. E' anche classicamente ben noto che una superficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  è razionale. Tuttavia un celebre teorema asserisce:

**Teorema ([Clemens e Griffiths (1972)])**

*Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  non è razionale.*

Uno dei principali problemi aperti della geometria algebrica è il seguente:

Problema: Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$  *abbastanza generale* è irrazionale?

Si congetta infatti che la maggior parte delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  siano irrazionali, sebbene non esista un solo esempio dove sia stata dimostrata l'irrazionalità.

Una varietà proiettiva complessa (liscia) di dimensione  $n$  si dice razionale se esiste una mappa birazionale  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} X$ .

Le ipersuperfici (lisce) in uno spazio proiettivo sono le varietà più semplici da descrivere in termini di equazioni ed è naturale chiedersi se siano razionali.

È ben noto che ogni ipersuperficie quadrica è razionale. E' anche classicamente ben noto che una superficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  è razionale. Tuttavia un celebre teorema asserisce:

## Teorema ([Clemens e Griffiths (1972)])

*Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  non è razionale.*

Uno dei principali problemi aperti della geometria algebrica è il seguente:

Problema: Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$  *abbastanza generale* è irrazionale?

Si congetta infatti che la maggior parte delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  siano irrazionali, sebbene non esista un solo esempio dove sia stata dimostrata l'irrazionalità.

Una varietà proiettiva complessa (liscia) di dimensione  $n$  si dice razionale se esiste una mappa birazionale  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} X$ .

Le ipersuperfici (lisce) in uno spazio proiettivo sono le varietà più semplici da descrivere in termini di equazioni ed è naturale chiedersi se siano razionali.

È ben noto che ogni ipersuperficie quadrica è razionale. E' anche classicamente ben noto che una superficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  è razionale. Tuttavia un celebre teorema asserisce:

## Teorema ([Clemens e Griffiths (1972)])

*Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  non è razionale.*

Uno dei principali problemi aperti della geometria algebrica è il seguente:

Problema: Una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$  *abbastanza generale* è irrazionale?

Si congetta infatti che la maggior parte delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  siano irrazionali, sebbene non esista un solo esempio dove sia stata dimostrata l'irrazionalità.

# Spazio dei moduli delle cubiche di $\mathbb{P}^5$

Per brevità, con cubica di  $\mathbb{P}^5$  intenderemo sempre una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$ .

Le cubiche di  $\mathbb{P}^5$  sono parametrizzate da un aperto  $U$  dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_5]_3) \simeq \mathbb{P}^{55}$ . Il chiuso complementare  $\Delta = \mathbb{P}^{55} \setminus U$  è una ipersuperficie irriducibile di grado 192, nota come *ipersuperficie discriminante*.

Lo spazio dei moduli delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  è il quoziente

$$\mathcal{C} = [U/\mathrm{PGL}_6],$$

il quale risulta essere una varietà quasi-proiettiva irriducibile di dimensione

$$\dim(\mathcal{C}) = \dim(U) - \dim(\mathrm{PGL}_6) = 55 - 35 = 20.$$

# Spazio dei moduli delle cubiche di $\mathbb{P}^5$

Per brevità, con cubica di  $\mathbb{P}^5$  intenderemo sempre una ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^5$ .

Le cubiche di  $\mathbb{P}^5$  sono parametrizzate da un aperto  $U$  dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_5]_3) \simeq \mathbb{P}^{55}$ . Il chiuso complementare  $\Delta = \mathbb{P}^{55} \setminus U$  è una ipersuperficie irriducibile di grado 192, nota come *ipersuperficie discriminante*.

Lo spazio dei moduli delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$  è il quoziente

$$\mathcal{C} = [U/\mathrm{PGL}_6],$$

il quale risulta essere una varietà quasi-proiettiva irriducibile di dimensione

$$\dim(\mathcal{C}) = \dim(U) - \dim(\mathrm{PGL}_6) = 55 - 35 = 20.$$

## Section 2

Cubiche speciali parametrizzate da divisori dello spazio dei moduli

# Cubiche speciali di $\mathbb{P}^5$

Per una ipersuperficie cubica liscia  $X \subset \mathbb{P}^5$  definiamo

$$H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) := H^4(X, \mathbb{Z}) \cap H^2(\Omega_X^2).$$

Teorema ([Voisin (1986)])

Se  $[X] \in \mathcal{C}$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$ , dove  $h$  denota la classe di una sezione iperpiana di  $X$ .

Teorema ([Voisin (2012)], "Integral Hodge Conjecture")

Ogni classe in  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  è algebrica.

Conseguenza:

Se  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \supsetneq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$  allora esiste una "superficie algebrica" (ciclo di dimensione 2 con coefficienti interi)  $S \subset X$  tale che  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \supseteq K$ , con  $K = \langle h^2, S \rangle$  e  $\text{rk}(K) = 2$ . In questo caso,  $X$  è detta *speciale*.

# Cubiche speciali di $\mathbb{P}^5$

Per una ipersuperficie cubica liscia  $X \subset \mathbb{P}^5$  definiamo

$$H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) := H^4(X, \mathbb{Z}) \cap H^2(\Omega_X^2).$$

## Teorema ([Voisin (1986)])

Se  $[X] \in \mathcal{C}$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$ , dove  $h$  denota la classe di una sezione iperpiana di  $X$ .

## Teorema ([Voisin (2012)], "Integral Hodge Conjecture")

Ogni classe in  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  è algebrica.

Conseguenza:

Se  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \not\supseteq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$  allora esiste una "superficie algebrica" (ciclo di dimensione 2 con coefficienti interi)  $S \subset X$  tale che  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \supseteq K$ , con  $K = \langle h^2, S \rangle$  e  $\text{rk}(K) = 2$ . In questo caso,  $X$  è detta *speciale*.

# Cubiche speciali di $\mathbb{P}^5$

Per una ipersuperficie cubica liscia  $X \subset \mathbb{P}^5$  definiamo

$$H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) := H^4(X, \mathbb{Z}) \cap H^2(\Omega_X^2).$$

## Teorema ([Voisin (1986)])

Se  $[X] \in \mathcal{C}$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$ , dove  $h$  denota la classe di una sezione iperpiana di  $X$ .

## Teorema ([Voisin (2012)], “Integral Hodge Conjecture”)

Ogni classe in  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  è algebrica.

Conseguenza:

Se  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \not\supseteq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$  allora esiste una “superficie algebrica” (ciclo di dimensione 2 con coefficienti interi)  $S \subset X$  tale che  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \supseteq K$ , con  $K = \langle h^2, S \rangle$  e  $\text{rk}(K) = 2$ . In questo caso,  $X$  è detta *speciale*.

# Cubiche speciali di $\mathbb{P}^5$

Per una ipersuperficie cubica liscia  $X \subset \mathbb{P}^5$  definiamo

$$H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) := H^4(X, \mathbb{Z}) \cap H^2(\Omega_X^2).$$

## Teorema ([Voisin (1986)])

Se  $[X] \in \mathcal{C}$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$ , dove  $h$  denota la classe di una sezione iperpiana di  $X$ .

## Teorema ([Voisin (2012)], “Integral Hodge Conjecture”)

Ogni classe in  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  è algebrica.

Conseguenza:

Se  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \not\supseteq \mathbb{Z}\langle h^2 \rangle$  allora esiste una “superficie algebrica” (ciclo di dimensione 2 con coefficienti interi)  $S \subset X$  tale che  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) \supseteq K$ , con  $K = \langle h^2, S \rangle$  e  $\text{rk}(K) = 2$ . In questo caso,  $X$  è detta *speciale*.

# Divisori di Noether–Lefschetz

## Definizione

Seguendo [Hassett (1999)], definiamo i divisori di Noether–Lefschetz  $\mathcal{C}_d$  come

$$\mathcal{C}_d = \{[X] \in \mathcal{C} : \exists K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z}), h^2 \in K, \text{rk}(K) = 2, |K| = d\}.$$

Il discriminante  $|K|$  del sottoreticolo  $K$  è definito come il determinante della forma d'intersezione ristretta a  $K$ . Se  $K = \langle h^2, S \rangle$ , con  $S$  una superficie algebrica, allora

$$|K| = \det \begin{pmatrix} h^2 & h \cdot S \\ S \cdot h & S^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & \text{deg}(S) \\ \text{deg}(S) & S^2 \end{pmatrix} = 3S^2 - (\text{deg}(S))^2.$$

L'autointersezione di  $S$  può essere calcolata con la formula

$$S^2 = c_2(N_{S/X}) = 6h^2 + 3h \cdot K_S + K_S^2 - \chi_S.$$

# Divisori di Noether–Lefschetz

## Definizione

Seguendo [Hassett (1999)], definiamo i divisori di Noether–Lefschetz  $\mathcal{C}_d$  come

$$\mathcal{C}_d = \{[X] \in \mathcal{C} : \exists K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z}), h^2 \in K, \text{rk}(K) = 2, |K| = d\}.$$

Il discriminante  $|K|$  del sottoreticolo  $K$  è definito come il determinante della forma d'intersezione ristretta a  $K$ . Se  $K = \langle h^2, S \rangle$ , con  $S$  una superficie algebrica, allora

$$|K| = \det \begin{pmatrix} h^2 & h \cdot S \\ S \cdot h & S^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & \text{deg}(S) \\ \text{deg}(S) & S^2 \end{pmatrix} = 3S^2 - (\text{deg}(S))^2.$$

L'autointersezione di  $S$  può essere calcolata con la formula

$$S^2 = c_2(N_{S/X}) = 6h^2 + 3h \cdot K_S + K_S^2 - \chi_S.$$

# Divisori di Noether–Lefschetz

## Definizione

Seguendo [Hassett (1999)], definiamo i divisori di Noether–Lefschetz  $\mathcal{C}_d$  come

$$\mathcal{C}_d = \{[X] \in \mathcal{C} : \exists K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z}), h^2 \in K, \text{rk}(K) = 2, |K| = d\}.$$

Il discriminante  $|K|$  del sottoreticolo  $K$  è definito come il determinante della forma d'intersezione ristretta a  $K$ . Se  $K = \langle h^2, S \rangle$ , con  $S$  una superficie algebrica, allora

$$|K| = \det \begin{pmatrix} h^2 & h \cdot S \\ S \cdot h & S^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & \text{deg}(S) \\ \text{deg}(S) & S^2 \end{pmatrix} = 3S^2 - (\text{deg}(S))^2.$$

L'autointersezione di  $S$  può essere calcolata con la formula

$$S^2 = c_2(N_{S/X}) = 6h^2 + 3h \cdot K_S + K_S^2 - \chi_S.$$

## Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000), Hassett (2016)])

- 1  $\mathcal{C}_d$  o è vuoto oppure è un divisore irriducibile di  $\mathcal{C}$ .
- 2  $\mathcal{C}_d \neq \emptyset$  se e solo se  $d > 6$  e  $d \equiv 0, 2 \pmod{6}$ .
- 3 Se  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) = \langle h^2, S \rangle$ , per una opportuna superficie algebrica  $S$ .

Quindi i primi valori di  $d$  per cui  $\mathcal{C}_d$  è non vuoto sono:

8, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 36, 38, 42, ...

## Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000), Hassett (2016)])

- 1  $\mathcal{C}_d$  o è vuoto oppure è un divisore irriducibile di  $\mathcal{C}$ .
- 2  $\mathcal{C}_d \neq \emptyset$  se e solo se  $d > 6$  e  $d \equiv 0, 2 \pmod{6}$ .
- 3 Se  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) = \langle h^2, S \rangle$ , per una opportuna superficie algebrica  $S$ .

Quindi i primi valori di  $d$  per cui  $\mathcal{C}_d$  è non vuoto sono:

8, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 36, 38, 42, ...

## Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000), Hassett (2016)])

- 1  $\mathcal{C}_d$  o è vuoto oppure è un divisore irriducibile di  $\mathcal{C}$ .
- 2  $\mathcal{C}_d \neq \emptyset$  se e solo se  $d > 6$  e  $d \equiv 0, 2 \pmod{6}$ .
- 3 Se  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) = \langle h^2, S \rangle$ , per una opportuna superficie algebrica  $S$ .

Quindi i primi valori di  $d$  per cui  $\mathcal{C}_d$  è non vuoto sono:

8, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 36, 38, 42, ...

## Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000), Hassett (2016)])

- 1  $\mathcal{C}_d$  o è vuoto oppure è un divisore irriducibile di  $\mathcal{C}$ .
- 2  $\mathcal{C}_d \neq \emptyset$  se e solo se  $d > 6$  e  $d \equiv 0, 2 \pmod{6}$ .
- 3 Se  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) = \langle h^2, S \rangle$ , per una opportuna superficie algebrica  $S$ .

Quindi i primi valori di  $d$  per cui  $\mathcal{C}_d$  è non vuoto sono:

8, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 36, 38, 42, ...

## Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000), Hassett (2016)])

- 1  $\mathcal{C}_d$  o è vuoto oppure è un divisore irriducibile di  $\mathcal{C}$ .
- 2  $\mathcal{C}_d \neq \emptyset$  se e solo se  $d > 6$  e  $d \equiv 0, 2 \pmod{6}$ .
- 3 Se  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è molto generale, allora  $H^{2,2}(X, \mathbb{Z}) = \langle h^2, S \rangle$ , per una opportuna superficie algebrica  $S$ .

Quindi i primi valori di  $d$  per cui  $\mathcal{C}_d$  è non vuoto sono:

8, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 36, 38, 42, ...

## $\mathcal{C}_8$ : Cubiche contenenti un piano

$$\mathcal{C}_8 = \{[X] \in \mathcal{C} : X \supset P, P \text{ piano} \},$$

$$K_8 = \begin{array}{c|cc} & h^2 & P \\ \hline h^2 & 3 & 1 \\ P & 1 & 3 \end{array}$$

## $\mathcal{C}_{12}$ : Cubiche contenenti uno scroll cubico

$$\mathcal{C}_{12} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset \Sigma_3, \Sigma_3 \text{ scroll di grado } 3\}},$$

$$K_{12} = \begin{array}{c|cc} & h^2 & \Sigma_3 \\ \hline h^2 & 3 & 3 \\ \Sigma_3 & 3 & 7 \end{array}$$

## $\mathcal{C}_8$ : Cubiche contenenti un piano

$$\mathcal{C}_8 = \{[X] \in \mathcal{C} : X \supset P, P \text{ piano} \},$$

$$K_8 = \begin{array}{c|cc} & h^2 & P \\ \hline h^2 & 3 & 1 \\ P & 1 & 3 \end{array}$$

## $\mathcal{C}_{12}$ : Cubiche contenenti uno scroll cubico

$$\mathcal{C}_{12} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset \Sigma_3, \Sigma_3 \text{ scroll di grado } 3\}},$$

$$K_{12} = \begin{array}{c|cc} & h^2 & \Sigma_3 \\ \hline h^2 & 3 & 3 \\ \Sigma_3 & 3 & 7 \end{array}$$

## $\mathcal{C}_{14}$ : Cubiche contenenti uno scroll quartico

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{14} &= \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset \Sigma_4, \Sigma_4 \text{ scroll di grado } 4\}} \\ &= \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset T, T \text{ del Pezzo di grado } 5\}},\end{aligned}$$

$$K_{14} = \begin{array}{c|cc} & h^2 & \Sigma_4 \\ \hline h^2 & 3 & 4 \\ \Sigma_4 & 4 & 10 \end{array} \simeq \begin{array}{c|cc} & h^2 & T \\ \hline h^2 & 3 & 5 \\ T & 5 & 13 \end{array}, T + \Sigma_4 = 3h^2.$$

Descrizioni esplicite di  $\mathcal{C}_{18}$  sono state trovate solo di recente nei lavori [Nuer (2015)] e [Addington, Hassett, Tschinkel e Várilly-Alvarado (2016)].

## $\mathcal{C}_{20}$ : Cubiche contenenti una superficie di Veronese

$$\mathcal{C}_{20} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset V, V \text{ superficie di Veronese}\}},$$

$$K_{12} = \begin{array}{c|cc} & h^2 & V \\ \hline h^2 & 3 & 4 \\ V & 4 & 12 \end{array}$$

## $\mathcal{C}_{14}$ : Cubiche contenenti uno scroll quartico

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{14} &= \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset \Sigma_4, \Sigma_4 \text{ scroll di grado } 4\}} \\ &= \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset T, T \text{ del Pezzo di grado } 5\}},\end{aligned}$$

$$K_{14} = \frac{h^2 \quad \Sigma_4}{\Sigma_4} \Bigg| \begin{array}{cc} h^2 & \Sigma_4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{array} \simeq \frac{h^2 \quad T}{T} \Bigg| \begin{array}{cc} h^2 & T \\ 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{array}, T + \Sigma_4 = 3h^2.$$

Descrizioni esplicite di  $\mathcal{C}_{18}$  sono state trovate solo di recente nei lavori [Nuer (2015)] e [Addington, Hassett, Tschinkel e Várilly-Alvarado (2016)].

## $\mathcal{C}_{20}$ : Cubiche contenenti una superficie di Veronese

$$\mathcal{C}_{20} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset V, V \text{ superficie di Veronese}\}},$$

$$K_{12} = \frac{h^2 \quad V}{V} \Bigg| \begin{array}{cc} h^2 & V \\ 3 & 4 \\ 4 & 12 \end{array}$$

## $\mathcal{C}_{14}$ : Cubiche contenenti uno scroll quartico

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{14} &= \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset \Sigma_4, \Sigma_4 \text{ scroll di grado } 4\}} \\ &= \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset T, T \text{ del Pezzo di grado } 5\}},\end{aligned}$$

$$K_{14} = \frac{h^2 \quad \Sigma_4}{\Sigma_4} \Bigg| \begin{array}{cc} h^2 & \Sigma_4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{array} \simeq \frac{h^2 \quad T}{T} \Bigg| \begin{array}{cc} h^2 & T \\ 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{array}, T + \Sigma_4 = 3h^2.$$

Descrizioni esplicite di  $\mathcal{C}_{18}$  sono state trovate solo di recente nei lavori [Nuer (2015)] e [Addington, Hassett, Tschinkel e Várilly-Alvarado (2016)].

## $\mathcal{C}_{20}$ : Cubiche contenenti una superficie di Veronese

$$\mathcal{C}_{20} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset V, V \text{ superficie di Veronese}\}},$$

$$K_{12} = \frac{h^2 \quad V}{V} \Bigg| \begin{array}{cc} h^2 & V \\ 3 & 4 \\ 4 & 12 \end{array}$$

## Section 3

Stato dell'arte sulla razionalità delle cubiche di  $\mathbb{P}^5$   
(prima di luglio 2017)

# Cubiche razionali di $\mathbb{P}^5$

Definiamo

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) = \{[X] \in \mathcal{C} : X \text{ è razionale}\}.$$

Una conseguenza di un risultato provato in [de Fernex e Fusi (2013)] è:

## Proposizione

*Rat( $\mathcal{C}$ ) e  $\text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_d$  sono unioni finite o numerabili di sottoinsiemi localmente chiusi.*

Aspettativa generale:

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup_d \mathcal{C}_d$$

Quindi *una cubica  $X \in \mathbb{P}^5$  molto generale dovrebbe essere irrazionale.*

Per nessuna cubica di  $\mathbb{P}^5$  è stata ancora dimostrata l'irrazionalità.

Tutti gli esempi dove è nota la razionalità appartengono a qualche divisore  $\mathcal{C}_d$ .

# Cubiche razionali di $\mathbb{P}^5$

Definiamo

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) = \{[X] \in \mathcal{C} : X \text{ è razionale}\}.$$

Una conseguenza di un risultato provato in [de Fernex e Fusi (2013)] è:

## Proposizione

$\text{Rat}(\mathcal{C})$  e  $\text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_d$  sono unioni finite o numerabili di sottoinsiemi localmente chiusi.

Aspettativa generale:

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup_d \mathcal{C}_d$$

Quindi *una cubica  $X \in \mathbb{P}^5$  molto generale dovrebbe essere irrazionale.*

Per nessuna cubica di  $\mathbb{P}^5$  è stata ancora dimostrata l'irrazionalità.

Tutti gli esempi dove è nota la razionalità appartengono a qualche divisore  $\mathcal{C}_d$ .

# Cubiche razionali di $\mathbb{P}^5$

Definiamo

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) = \{[X] \in \mathcal{C} : X \text{ è razionale}\}.$$

Una conseguenza di un risultato provato in [de Fernex e Fusi (2013)] è:

## Proposizione

$\text{Rat}(\mathcal{C})$  e  $\text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_d$  sono unioni finite o numerabili di sottoinsiemi localmente chiusi.

Aspettativa generale:

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup_d \mathcal{C}_d$$

Quindi *una cubica*  $X \in \mathbb{P}^5$  molto generale dovrebbe essere irrazionale.

Per nessuna cubica di  $\mathbb{P}^5$  è stata ancora dimostrata l'irrazionalità.

Tutti gli esempi dove è nota la razionalità appartengono a qualche divisore  $\mathcal{C}_d$ .

# Cubiche razionali di $\mathbb{P}^5$

Definiamo

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) = \{[X] \in \mathcal{C} : X \text{ è razionale}\}.$$

Una conseguenza di un risultato provato in [de Fernex e Fusi (2013)] è:

## Proposizione

$\text{Rat}(\mathcal{C})$  e  $\text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_d$  sono unioni finite o numerabili di sottoinsiemi localmente chiusi.

Aspettativa generale:

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup_d \mathcal{C}_d$$

Quindi *una cubica*  $X \subset \mathbb{P}^5$  *molto generale dovrebbe essere irrazionale.*

Per nessuna cubica di  $\mathbb{P}^5$  è stata ancora dimostrata l'irrazionalità.

Tutti gli esempi dove è nota la razionalità appartengono a qualche divisore  $\mathcal{C}_d$ .

# Cubiche razionali di $\mathbb{P}^5$

Definiamo

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) = \{[X] \in \mathcal{C} : X \text{ è razionale}\}.$$

Una conseguenza di un risultato provato in [de Fernex e Fusi (2013)] è:

## Proposizione

$\text{Rat}(\mathcal{C})$  e  $\text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_d$  sono unioni finite o numerabili di sottoinsiemi localmente chiusi.

Aspettativa generale:

$$\text{Rat}(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup_d \mathcal{C}_d$$

Quindi *una cubica*  $X \in \mathbb{P}^5$  *molto generale dovrebbe essere irrazionale.*

Per nessuna cubica di  $\mathbb{P}^5$  è stata ancora dimostrata l'irrazionalità.

Tutti gli esempi dove è nota la razionalità appartengono a qualche divisore  $\mathcal{C}_d$ .

# Razionalità prima di [Russo e Staglianò (2017)]

**Teorema ([Morin (1940), Fano (1943)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Bolognesi, Russo e Staglianò (2015)])**

*Ogni cubica  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000)])**

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D} = \bigcup_m \mathcal{D}_m \subset \mathcal{C}_8$  tale che  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{D} \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_8$ .*

*Il luogo  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_8$  parametrizza le cubiche  $X \subset \mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  ottenuta proiettando da  $P$  ammetta una multisezione razionale di grado dispari. Per queste cubiche  $\text{rk}(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .*

# Razionalità prima di [Russo e Staglianò (2017)]

**Teorema ([Morin (1940), Fano (1943)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Bolognesi, Russo e Staglianò (2015)])**

*Ogni cubica  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000)])**

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D} = \bigcup_m \mathcal{D}_m \subset \mathcal{C}_8$  tale che  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{D} \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_8$ .*

Il luogo  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_8$  parametrizza le cubiche  $X \subset \mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  ottenuta proiettando da  $P$  ammetta una multisezione razionale di grado dispari. Per queste cubiche  $\text{rk}(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .

# Razionalità prima di [Russo e Staglianò (2017)]

**Teorema ([Morin (1940), Fano (1943)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Bolognesi, Russo e Staglianò (2015)])**

*Ogni cubica  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000)])**

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D} = \bigcup_m \mathcal{D}_m \subset \mathcal{C}_8$  tale che  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{D} \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_8$ .*

Il luogo  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_8$  parametrizza le cubiche  $X \subset \mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  ottenuta proiettando da  $P$  ammetta una multisezione razionale di grado dispari. Per queste cubiche  $\text{rk}(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .

# Razionalità prima di [Russo e Staglianò (2017)]

**Teorema ([Morin (1940), Fano (1943)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Bolognesi, Russo e Staglianò (2015)])**

*Ogni cubica  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è razionale.*

**Teorema ([Hassett (1999), Hassett (2000)])**

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D} = \bigcup_m \mathcal{D}_m \subset \mathcal{C}_8$  tale che  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{D} \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_8$ .*

Il luogo  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_8$  parametrizza le cubiche  $X \subset \mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  ottenuta proiettando da  $P$  ammetta una multisezione razionale di grado dispari. Per queste cubiche  $\text{rk}(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .

In [Auel, Bernardara, Bolognesi e Várilly-Alvarado (2014)] sono stati costruiti esempi di cubiche razionali di  $\mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta non ammette sezioni razionali.

Di recente sono state trovate cubiche razionali anche in  $\mathcal{C}_{18}$ , ma l'aspettativa è che l'elemento molto generale di  $\mathcal{C}_{18}$  (come anche di  $\mathcal{C}_8$ ) sia irrazionale.

## Teorema

([Addington, Hassett, Tschinkel e Várilly-Alvarado (2016)])

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D}' = \bigcup_m \mathcal{D}'_m \subset \mathcal{C}_{18}$  tale che  $\overline{\mathcal{D}'} = \mathcal{C}_{18}$  e  $\mathcal{D}' \cap U \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_{18}$ , dove  $U \subset \mathcal{C}_{18}$  è un aperto di Zariski.*

Questo risultato per  $\mathcal{C}_{18}$  è ottenuto in un modo simile a quello analogo per  $\mathcal{C}_8$ . Si prova prima che un elemento generale di  $\mathcal{C}_{18}$  è birazionale ad una fibrazione su  $\mathbb{P}^2$  in superfici di del Pezzo sestiche, e poi si mostra che sotto ulteriori condizioni queste fibrazioni ammettono sezioni razionali (o multisezioni razionali di un certo tipo). Anche in questi casi abbiamo  $rk(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .

In [Auel, Bernardara, Bolognesi e Várilly-Alvarado (2014)] sono stati costruiti esempi di cubiche razionali di  $\mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta non ammette sezioni razionali.

Di recente sono state trovate cubiche razionali anche in  $\mathcal{C}_{18}$ , ma l'aspettativa è che l'elemento molto generale di  $\mathcal{C}_{18}$  (come anche di  $\mathcal{C}_8$ ) sia irrazionale.

## Teorema

([Addington, Hassett, Tschinkel e Várilly-Alvarado (2016)])

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D}' = \bigcup_m \mathcal{D}'_m \subset \mathcal{C}_{18}$  tale che  $\overline{\mathcal{D}'} = \mathcal{C}_{18}$  e  $\mathcal{D}' \cap U \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_{18}$ , dove  $U \subset \mathcal{C}_{18}$  è un aperto di Zariski.*

Questo risultato per  $\mathcal{C}_{18}$  è ottenuto in un modo simile a quello analogo per  $\mathcal{C}_8$ . Si prova prima che un elemento generale di  $\mathcal{C}_{18}$  è birazionale ad una fibrazione su  $\mathbb{P}^2$  in superfici di del Pezzo sestiche, e poi si mostra che sotto ulteriori condizioni queste fibrazioni ammettono sezioni razionali (o multisezioni razionali di un certo tipo). Anche in questi casi abbiamo  $rk(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .

In [Auel, Bernardara, Bolognesi e Várilly-Alvarado (2014)] sono stati costruiti esempi di cubiche razionali di  $\mathbb{P}^5$  contenenti un piano  $P$  tale che la fibrazione in quadriche indotta non ammette sezioni razionali.

Di recente sono state trovate cubiche razionali anche in  $\mathcal{C}_{18}$ , ma l'aspettativa è che l'elemento molto generale di  $\mathcal{C}_{18}$  (come anche di  $\mathcal{C}_8$ ) sia irrazionale.

## Teorema

([Addington, Hassett, Tschinkel e Várilly-Alvarado (2016)])

*Esiste una unione infinita numerabile di divisori irriducibili  $\mathcal{D}' = \bigcup_m \mathcal{D}'_m \subset \mathcal{C}_{18}$  tale che  $\overline{\mathcal{D}'} = \mathcal{C}_{18}$  e  $\mathcal{D}' \cap U \subseteq \text{Rat}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_{18}$ , dove  $U \subset \mathcal{C}_{18}$  è un aperto di Zariski.*

Questo risultato per  $\mathcal{C}_{18}$  è ottenuto in un modo simile a quello analogo per  $\mathcal{C}_8$ . Si prova prima che un elemento generale di  $\mathcal{C}_{18}$  è birazionale ad una fibrazione su  $\mathbb{P}^2$  in superfici di del Pezzo sestiche, e poi si mostra che sotto ulteriori condizioni queste fibrazioni ammettono sezioni razionali (o multisezioni razionali di un certo tipo). Anche in questi casi abbiamo  $rk(H^{2,2}(X, \mathbb{Z})) \geq 3$ .

## Section 4

# Valori ammissibili e congettura di Kuznetsov

## Definizione

Un intero pari  $d > 6$  si dice *ammissibile* se non è divisibile per 4, per 9 e per un numero primo congruente a 2 modulo 3.

## Valori ammissibili $\leq 120$

8 12 14 18 20 24 26 30 32 36 38 42 44 48 50 54 56 60 62 66 68 72 74 78 80  
84 86 90 92 96 98 102 104 108 110 114 116 120

## Definizione

Un intero pari  $d > 6$  si dice *ammissibile* se non è divisibile per 4, per 9 e per un numero primo congruente a 2 modulo 3.

## Valori ammissibili $\leq 120$

8 12 14 18 20 24 26 30 32 36 38 42 44 48 50 54 56 60 62 66 68 72 74 78 80  
84 86 90 92 96 98 102 104 108 110 114 116 120

# Valori ammissibili e superfici K3 associate

In [Hassett (1999)] si introduce una nozione di *superficie K3 associata* ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}_d$  con reticolo  $K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  di rango 2 e discriminante  $d$ .

Più precisamente, una superficie K3 polarizzata  $(S, f)$  di grado  $d$  si dice associata a  $X$  se esiste un isomorfismo di reticoli  $H^2(S, \mathbb{Z})(-1) \supset f^\perp \xrightarrow{\cong} K^\perp$  che rispetta le strutture di Hodge.

## Teorema ([Hassett (1999)])

$[X] \in \mathcal{C}_d$  ha una superficie K3 associata se e solo se  $d$  è ammissibile.

Nel caso quando  $d$  è un valore ammissibile ci sono strette relazioni tra  $\mathcal{C}_d$  e lo spazio dei moduli  $\mathcal{N}_d$  delle superfici K3 polarizzate di grado  $d$ , per esempio:

## Proposizione ([Hassett (1999), Hassett (2015)])

Sia  $d$  un valore ammissibile. Se  $d \equiv 2 \pmod{6}$  allora  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a  $\mathcal{N}_d$ ; altrimenti  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a un quoziente di  $\mathcal{N}_d$  per una involuzione.

# Valori ammissibili e superfici K3 associate

In [Hassett (1999)] si introduce una nozione di *superficie K3 associata* ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}_d$  con reticolo  $K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  di rango 2 e discriminante  $d$ .

Più precisamente, una superficie K3 polarizzata  $(S, f)$  di grado  $d$  si dice associata a  $X$  se esiste un isomorfismo di reticoli  $H^2(S, \mathbb{Z})(-1) \supset f^\perp \xrightarrow{\cong} K^\perp$  che rispetta le strutture di Hodge.

**Teorema ([Hassett (1999)])**

$[X] \in \mathcal{C}_d$  ha una superficie K3 associata se e solo se  $d$  è ammissibile.

Nel caso quando  $d$  è un valore ammissibile ci sono strette relazioni tra  $\mathcal{C}_d$  e lo spazio dei moduli  $\mathcal{N}_d$  delle superfici K3 polarizzate di grado  $d$ , per esempio:

**Proposizione ([Hassett (1999), Hassett (2016)])**

*Sia  $d$  un valore ammissibile. Se  $d \equiv 2 \pmod{6}$  allora  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a  $\mathcal{N}_d$ ; altrimenti  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a un quoziente di  $\mathcal{N}_d$  per una involuzione.*

# Valori ammissibili e superfici K3 associate

In [Hassett (1999)] si introduce una nozione di *superficie K3 associata* ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}_d$  con reticolo  $K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  di rango 2 e discriminante  $d$ .

Più precisamente, una superficie K3 polarizzata  $(S, f)$  di grado  $d$  si dice associata a  $X$  se esiste un isomorfismo di reticoli  $H^2(S, \mathbb{Z})(-1) \supset f^\perp \xrightarrow{\cong} K^\perp$  che rispetta le strutture di Hodge.

## Teorema ([Hassett (1999)])

$[X] \in \mathcal{C}_d$  ha una superficie K3 associata se e solo se  $d$  è ammissibile.

Nel caso quando  $d$  è un valore ammissibile ci sono strette relazioni tra  $\mathcal{C}_d$  e lo spazio dei moduli  $\mathcal{N}_d$  delle superfici K3 polarizzate di grado  $d$ , per esempio:

## Proposizione ([Hassett (1999), Hassett (2016)])

*Sia  $d$  un valore ammissibile. Se  $d \equiv 2 \pmod{6}$  allora  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a  $\mathcal{N}_d$ ; altrimenti  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a un quoziente di  $\mathcal{N}_d$  per una involuzione.*

# Valori ammissibili e superfici K3 associate

In [Hassett (1999)] si introduce una nozione di *superficie K3 associata* ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}_d$  con reticolo  $K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  di rango 2 e discriminante  $d$ .

Più precisamente, una superficie K3 polarizzata  $(S, f)$  di grado  $d$  si dice associata a  $X$  se esiste un isomorfismo di reticoli  $H^2(S, \mathbb{Z})(-1) \supset f^\perp \xrightarrow{\cong} K^\perp$  che rispetta le strutture di Hodge.

## Teorema ([Hassett (1999)])

$[X] \in \mathcal{C}_d$  ha una superficie K3 associata se e solo se  $d$  è ammissibile.

Nel caso quando  $d$  è un valore ammissibile ci sono strette relazioni tra  $\mathcal{C}_d$  e lo spazio dei moduli  $\mathcal{N}_d$  delle superfici K3 polarizzate di grado  $d$ , per esempio:

## Proposizione ([Hassett (1999), Hassett (2016)])

*Sia  $d$  un valore ammissibile. Se  $d \equiv 2 \pmod{6}$  allora  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a  $\mathcal{N}_d$ ; altrimenti  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a un quoziente di  $\mathcal{N}_d$  per una involuzione.*

# Valori ammissibili e superfici K3 associate

In [Hassett (1999)] si introduce una nozione di *superficie K3 associata* ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}_d$  con reticolo  $K \subseteq H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$  di rango 2 e discriminante  $d$ .

Più precisamente, una superficie K3 polarizzata  $(S, f)$  di grado  $d$  si dice associata a  $X$  se esiste un isomorfismo di reticoli  $H^2(S, \mathbb{Z})(-1) \supset f^\perp \xrightarrow{\simeq} K^\perp$  che rispetta le strutture di Hodge.

## Teorema ([Hassett (1999)])

$[X] \in \mathcal{C}_d$  ha una superficie K3 associata se e solo se  $d$  è ammissibile.

Nel caso quando  $d$  è un valore ammissibile ci sono strette relazioni tra  $\mathcal{C}_d$  e lo spazio dei moduli  $\mathcal{N}_d$  delle superfici K3 polarizzate di grado  $d$ , per esempio:

## Proposizione ([Hassett (1999), Hassett (2016)])

*Sia  $d$  un valore ammissibile. Se  $d \equiv 2 \pmod{6}$  allora  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a  $\mathcal{N}_d$ ; altrimenti  $\mathcal{C}_d$  è birazionale a un quoziente di  $\mathcal{N}_d$  per una involuzione.*

# Conggettura di Kuznetsov

In [Kuznetsov (2010)] (si veda anche [Kuznetsov (2016)]) si introduce una nuova nozione di superficie K3 associata ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}$  in termini di categorie derivate di fasci coerenti su  $X$ .

Kuznetsov congettura che  $X$  è razionale se e solo se ammette questa superficie K3.

**Teorema ([Addington e Thomas (2014)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  ammette una superficie K3 associata nel senso di Kuznetsov se e solo se ammette una superficie K3 associata nel senso di Hassett, quindi se e solo se  $d$  è ammissibile.*

# Conggettura di Kuznetsov

In [Kuznetsov (2010)] (si veda anche [Kuznetsov (2016)]) si introduce una nuova nozione di superficie K3 associata ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}$  in termini di categorie derivate di fasci coerenti su  $X$ .

Kuznetsov congettura che  $X$  è razionale se e solo se ammette questa superficie K3.

Teorema ([Addington e Thomas (2014)])

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  ammette una superficie K3 associata nel senso di Kuznetsov se e solo se ammette una superficie K3 associata nel senso di Hassett, quindi se e solo se  $d$  è ammissibile.*

# Conggettura di Kuznetsov

In [Kuznetsov (2010)] (si veda anche [Kuznetsov (2016)]) si introduce una nuova nozione di superficie K3 associata ad una cubica  $[X] \in \mathcal{C}$  in termini di categorie derivate di fasci coerenti su  $X$ .

Kuznetsov congettura che  $X$  è razionale se e solo se ammette questa superficie K3.

## Teorema ([Addington e Thomas (2014)])

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  ammette una superficie K3 associata nel senso di Kuznetsov se e solo se ammette una superficie K3 associata nel senso di Hassett, quindi se e solo se  $d$  è ammissibile.*

# Conggettura di Kuznetsov

Una formulazione semplificata

Dunque come diretta conseguenza del risultato di Addington e Thomas e della congettura originale di Kuznetsov otteniamo:

**Conggettura ([Kuznetsov (2010), Addington e Thomas (2014), Hassett (2016)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale se e solo se  $d$  è ammissibile.*

In particolare, una cubica generale in  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}, \mathcal{C}_{42}$  dovrebbe essere razionale, e non dovrebbe esistere un aperto di cubiche razionali in  $\mathcal{C}_8, \mathcal{C}_{18}, \mathcal{C}_{20}$ .<sup>1</sup>

Prima di [Russo e Stagliano (2017)] questa congettura era verificata solo per  $d = 14$  grazie ai lavori classici [Morin (1940)] e [Fano (1943)].

---

<sup>1</sup>Da notare che questo non è in contraddizione con il fatto che le cubiche razionali in  $\mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{C}_{18}$  formano un insieme denso.

# Conggettura di Kuznetsov

Una formulazione semplificata

Dunque come diretta conseguenza del risultato di Addington e Thomas e della congettura originale di Kuznetsov otteniamo:

**Conggettura ([Kuznetsov (2010), Addington e Thomas (2014), Hassett (2016)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale se e solo se  $d$  è ammissibile.*

In particolare, una cubica generale in  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}, \mathcal{C}_{42}$  dovrebbe essere razionale, e non dovrebbe esistere un aperto di cubiche razionali in  $\mathcal{C}_8, \mathcal{C}_{18}, \mathcal{C}_{20}$ .<sup>1</sup>

Prima di [Russo e Stagliano (2017)] questa congettura era verificata solo per  $d = 14$  grazie ai lavori classici [Morin (1940)] e [Fano (1943)].

---

<sup>1</sup>Da notare che questo non è in contraddizione con il fatto che le cubiche razionali in  $\mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{C}_{18}$  formano un insieme denso.

# Conggettura di Kuznetsov

Una formulazione semplificata

Dunque come diretta conseguenza del risultato di Addington e Thomas e della congettura originale di Kuznetsov otteniamo:

**Conggettura ([Kuznetsov (2010), Addington e Thomas (2014), Hassett (2016)])**

*Una cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale se e solo se  $d$  è ammissibile.*

In particolare, una cubica generale in  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}, \mathcal{C}_{42}$  dovrebbe essere razionale, e non dovrebbe esistere un aperto di cubiche razionali in  $\mathcal{C}_8, \mathcal{C}_{18}, \mathcal{C}_{20}$ .<sup>1</sup>

Prima di [Russo e Staglianò (2017)] questa congettura era verificata solo per  $d = 14$  grazie ai lavori classici [Morin (1940)] e [Fano (1943)].

---

<sup>1</sup>Da notare che questo non è in contraddizione con il fatto che le cubiche razionali in  $\mathcal{C}_8$  e  $\mathcal{C}_{18}$  formano un insieme denso.

## Teorema ([Russo e Staglianò (2017)])

- 1 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{26}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .
- 2 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{38}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .

Inoltre, grazie al risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)], se la cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale, allora ogni  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale. Quindi:

Corollario

$$\mathcal{C}_{14} \cup \mathcal{C}_{26} \cup \mathcal{C}_{38} \subset \text{Rat}(\mathcal{C}).$$

## Teorema ([Russo e Staglianò (2017)])

- 1 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{26}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .
- 2 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{38}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .

Inoltre, grazie al risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)], se la cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale, allora ogni  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale. Quindi:

## Corollario

$$\mathcal{C}_{14} \cup \mathcal{C}_{26} \cup \mathcal{C}_{38} \subset \text{Rat}(\mathcal{C}).$$

## Teorema ([Russo e Staglianò (2017)])

- 1 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{26}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .
- 2 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{38}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .

Inoltre, grazie al risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)], se la cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale, allora ogni  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale. Quindi:

## Corollario

$$\mathcal{C}_{14} \cup \mathcal{C}_{26} \cup \mathcal{C}_{38} \subset \text{Rat}(\mathcal{C}).$$

## Teorema ([Russo e Staglianò (2017)])

- 1 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{26}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .
- 2 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{38}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .

Inoltre, grazie al risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)], se la cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale, allora ogni  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale. Quindi:

## Corollario

$$\mathcal{C}_{14} \cup \mathcal{C}_{26} \cup \mathcal{C}_{38} \subset \text{Rat}(\mathcal{C}).$$

## Teorema ([Russo e Staglianò (2017)])

- 1 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{26}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .
- 2 Se  $[X] \in \mathcal{C}_{38}$  è generale, allora  $[X] \in \text{Rat}(\mathcal{C})$ .

Inoltre, grazie al risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)], se la cubica generale  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale, allora ogni  $[X] \in \mathcal{C}_d$  è razionale. Quindi:

## Corollario

$$\mathcal{C}_{14} \cup \mathcal{C}_{26} \cup \mathcal{C}_{38} \subset \text{Rat}(\mathcal{C}).$$

# Qualche osservazione

- Se  $\mathcal{C}_d = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_d\}}$ , con  $S_d \subset \mathbb{P}^5$  una certa superficie irriducibile, allora ci sono altre infinite superfici con la stessa proprietà. Trovare la “giusta”  $S_d$  può rivelarsi decisivo per lo studio del divisore  $\mathcal{C}_d$ .
- Per  $d = 14, 26, 38$  ci sono diverse superfici  $S_d$  che danno origine a diverse dimostrazioni della congettura di Kuznetsov.
- In [Nuer (2015)] sono state trovate superfici per  $\mathcal{C}_d$  per valori  $d \leq 44$  e  $d \neq 42$ ; in [Lai (2016)] si è costruita una superficie per  $\mathcal{C}_{42}$ .

Il successivo caso aperto della congettura di Kuznetsov è stabilire la razionalità per la cubica generale in  $\mathcal{C}_{42}$ . Sfortunatamente, l'unica descrizione esplicita per  $\mathcal{C}_{42}$  è quella fornita in [Lai (2016)] con la quale non è evidente se possiamo applicare i nostri metodi.

# Qualche osservazione

- Se  $\mathcal{C}_d = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_d\}}$ , con  $S_d \subset \mathbb{P}^5$  una certa superficie irriducibile, allora ci sono altre infinite superfici con la stessa proprietà. Trovare la “giusta”  $S_d$  può rivelarsi decisivo per lo studio del divisore  $\mathcal{C}_d$ .
- Per  $d = 14, 26, 38$  ci sono diverse superfici  $S_d$  che danno origine a diverse dimostrazioni della congettura di Kuznetsov.
- In [Nuer (2015)] sono state trovate superfici per  $\mathcal{C}_d$  per valori  $d \leq 44$  e  $d \neq 42$ ; in [Lai (2016)] si è costruita una superficie per  $\mathcal{C}_{42}$ .

Il successivo caso aperto della congettura di Kuznetsov è stabilire la razionalità per la cubica generale in  $\mathcal{C}_{42}$ . Sfortunatamente, l'unica descrizione esplicita per  $\mathcal{C}_{42}$  è quella fornita in [Lai (2016)] con la quale non è evidente se possiamo applicare i nostri metodi.

# Qualche osservazione

- Se  $\mathcal{C}_d = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_d\}}$ , con  $S_d \subset \mathbb{P}^5$  una certa superficie irriducibile, allora ci sono altre infinite superfici con la stessa proprietà. Trovare la “giusta”  $S_d$  può rivelarsi decisivo per lo studio del divisore  $\mathcal{C}_d$ .
- Per  $d = 14, 26, 38$  ci sono diverse superfici  $S_d$  che danno origine a diverse dimostrazioni della congettura di Kuznetsov.
- In [Nuer (2015)] sono state trovate superfici per  $\mathcal{C}_d$  per valori  $d \leq 44$  e  $d \neq 42$ ; in [Lai (2016)] si è costruita una superficie per  $\mathcal{C}_{42}$ .

Il successivo caso aperto della congettura di Kuznetsov è stabilire la razionalità per la cubica generale in  $\mathcal{C}_{42}$ . Sfortunatamente, l'unica descrizione esplicita per  $\mathcal{C}_{42}$  è quella fornita in [Lai (2016)] con la quale non è evidente se possiamo applicare i nostri metodi.

# Qualche osservazione

- Se  $\mathcal{C}_d = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_d\}}$ , con  $S_d \subset \mathbb{P}^5$  una certa superficie irriducibile, allora ci sono altre infinite superfici con la stessa proprietà. Trovare la “giusta”  $S_d$  può rivelarsi decisivo per lo studio del divisore  $\mathcal{C}_d$ .
- Per  $d = 14, 26, 38$  ci sono diverse superfici  $S_d$  che danno origine a diverse dimostrazioni della congettura di Kuznetsov.
- In [Nuer (2015)] sono state trovate superfici per  $\mathcal{C}_d$  per valori  $d \leq 44$  e  $d \neq 42$ ; in [Lai (2016)] si è costruita una superficie per  $\mathcal{C}_{42}$ .

Il successivo caso aperto della congettura di Kuznetsov è stabilire la razionalità per la cubica generale in  $\mathcal{C}_{42}$ . Sfortunatamente, l'unica descrizione esplicita per  $\mathcal{C}_{42}$  è quella fornita in [Lai (2016)] con la quale non è evidente se possiamo applicare i nostri metodi.

- Se  $\mathcal{C}_d = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_d\}}$ , con  $S_d \subset \mathbb{P}^5$  una certa superficie irriducibile, allora ci sono altre infinite superfici con la stessa proprietà. Trovare la “giusta”  $S_d$  può rivelarsi decisivo per lo studio del divisore  $\mathcal{C}_d$ .
- Per  $d = 14, 26, 38$  ci sono diverse superfici  $S_d$  che danno origine a diverse dimostrazioni della congettura di Kuznetsov.
- In [Nuer (2015)] sono state trovate superfici per  $\mathcal{C}_d$  per valori  $d \leq 44$  e  $d \neq 42$ ; in [Lai (2016)] si è costruita una superficie per  $\mathcal{C}_{42}$ .

Il successivo caso aperto della congettura di Kuznetsov è stabilire la razionalità per la cubica generale in  $\mathcal{C}_{42}$ . Sfortunatamente, l'unica descrizione esplicita per  $\mathcal{C}_{42}$  è quella fornita in [Lai (2016)] con la quale non è evidente se possiamo applicare i nostri metodi.

## Section 5

Razionalità tramite congruenze di coniche  
pentasecanti una superficie

Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia irriducibile di curve in  $\mathbb{P}^5$  di grado  $e \geq 1$  e di fissato genere aritmetico (diciamo per semplicità  $p_a = 0$ ) tale che un elemento generale  $[C] \in \mathcal{H}$  è irriducibile.

Abbiamo una famiglia universale  $\mathcal{D}$  e due morfismi



tali che  $\psi(\pi^{-1}([C])) = C \subset \mathbb{P}^5$ .

## Definizione

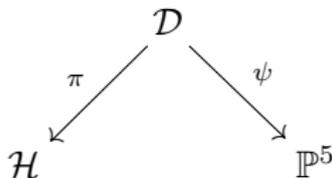
Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie irriducibile. Diciamo che  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  è una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti  $S$  di grado  $e$  se

- $\psi$  è birazionale;
- per  $[C] \in \mathcal{H}$  generico, l'intersezione  $C \cap S$  consiste di  $re - 1$  punti.

Notiamo che in tal caso abbiamo necessariamente  $\dim \mathcal{H} = 4$  e per un punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  esiste una unica  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$ .

Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia irriducibile di curve in  $\mathbb{P}^5$  di grado  $e \geq 1$  e di fissato genere aritmetico (diciamo per semplicità  $p_a = 0$ ) tale che un elemento generale  $[C] \in \mathcal{H}$  è irriducibile.

Abbiamo una famiglia universale  $\mathcal{D}$  e due morfismi



tali che  $\psi(\pi^{-1}([C])) = C \subset \mathbb{P}^5$ .

## Definizione

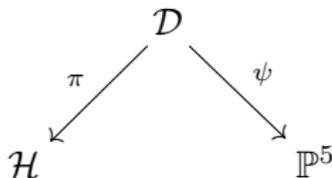
Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie irriducibile. Diciamo che  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  è una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti  $S$  di grado  $e$  se

- $\psi$  è birazionale;
- per  $[C] \in \mathcal{H}$  generale, l'intersezione  $C \cap S$  consiste di  $re - 1$  punti.

Notiamo che in tal caso abbiamo necessariamente  $\dim \mathcal{H} = 4$  e per un punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  esiste una unica  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$ .

Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia irriducibile di curve in  $\mathbb{P}^5$  di grado  $e \geq 1$  e di fissato genere aritmetico (diciamo per semplicità  $p_a = 0$ ) tale che un elemento generale  $[C] \in \mathcal{H}$  è irriducibile.

Abbiamo una famiglia universale  $\mathcal{D}$  e due morfismi



tali che  $\psi(\pi^{-1}([C])) = C \subset \mathbb{P}^5$ .

## Definizione

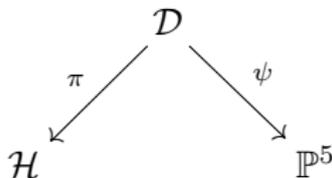
Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie irriducibile. Diciamo che  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  è una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti  $S$  di grado  $e$  se

- 1  $\psi$  è birazionale;
- 2 per  $[C] \in \mathcal{H}$  generale, l'intersezione  $C \cap S$  consiste di  $re - 1$  punti.

Notiamo che in tal caso abbiamo necessariamente  $\dim \mathcal{H} = 4$  e per un punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  esiste una unica  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$ .

Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia irriducibile di curve in  $\mathbb{P}^5$  di grado  $e \geq 1$  e di fissato genere aritmetico (diciamo per semplicità  $p_a = 0$ ) tale che un elemento generale  $[C] \in \mathcal{H}$  è irriducibile.

Abbiamo una famiglia universale  $\mathcal{D}$  e due morfismi



tali che  $\psi(\pi^{-1}([C])) = C \subset \mathbb{P}^5$ .

## Definizione

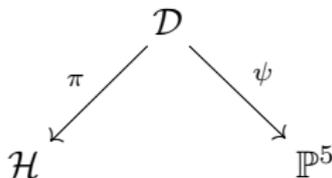
Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie irriducibile. Diciamo che  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  è una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti  $S$  di grado  $e$  se

- 1  $\psi$  è birazionale;
- 2 per  $[C] \in \mathcal{H}$  generale, l'intersezione  $C \cap S$  consiste di  $re - 1$  punti.

Notiamo che in tal caso abbiamo necessariamente  $\dim \mathcal{H} = 4$  e per un punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  esiste una unica  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$ .

Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia irriducibile di curve in  $\mathbb{P}^5$  di grado  $e \geq 1$  e di fissato genere aritmetico (diciamo per semplicità  $p_a = 0$ ) tale che un elemento generale  $[C] \in \mathcal{H}$  è irriducibile.

Abbiamo una famiglia universale  $\mathcal{D}$  e due morfismi



tali che  $\psi(\pi^{-1}([C])) = C \subset \mathbb{P}^5$ .

## Definizione

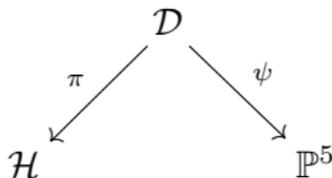
Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie irriducibile. Diciamo che  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  è una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti  $S$  di grado  $e$  se

- 1  $\psi$  è birazionale;
- 2 per  $[C] \in \mathcal{H}$  generale, l'intersezione  $C \cap S$  consiste di  $re - 1$  punti.

Notiamo che in tal caso abbiamo necessariamente  $\dim \mathcal{H} = 4$  e per un punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  esiste una unica  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$ .

Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia irriducibile di curve in  $\mathbb{P}^5$  di grado  $e \geq 1$  e di fissato genere aritmetico (diciamo per semplicità  $p_a = 0$ ) tale che un elemento generale  $[C] \in \mathcal{H}$  è irriducibile.

Abbiamo una famiglia universale  $\mathcal{D}$  e due morfismi



tali che  $\psi(\pi^{-1}([C])) = C \subset \mathbb{P}^5$ .

## Definizione

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie irriducibile. Diciamo che  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  è una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti  $S$  di grado  $e$  se

- 1  $\psi$  è birazionale;
- 2 per  $[C] \in \mathcal{H}$  generale, l'intersezione  $C \cap S$  consiste di  $re - 1$  punti.

Notiamo che in tal caso abbiamo necessariamente  $\dim \mathcal{H} = 4$  e per un punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  esiste una unica  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$ .

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$ , e sia  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  irriducibile.

Se  $[C] \in \mathcal{H}$  è generale, dal teorema di Bézout esiste un unico punto  $p \in X$  definito da  $\{p\} = (C \cap X) \setminus (C \cap S)$ . Quindi abbiamo una mappa razionale

$$\alpha : \mathcal{H} \dashrightarrow X.$$

Se  $p \in X$  è un punto generale, dallo *Zariski's Main Theorem* segue che esiste un unico  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$  (infatti il luogo dei punti di  $\mathbb{P}^5$  per cui passano almeno due curve della famiglia  $\mathcal{H}$  deve avere codimensione almeno 2). Quindi abbiamo definito una mappa razionale

$$\beta : X \dashrightarrow \mathcal{H}, \quad \beta(p) = [C_p].$$

Diciamo che  $X$  è trasversale alla congruenza se per il punto generale  $p \in X$  la curva  $\beta(p)$  non è contenuta in  $X$ , i.e., se la composizione  $\alpha \circ \beta$  è ben definita.

Se  $X$  è trasversale alla congruenza, allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono l'una l'inversa dell'altra, e quindi  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$ , e sia  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  irriducibile.

Se  $[C] \in \mathcal{H}$  è generale, dal teorema di Bézout esiste un unico punto  $p \in X$  definito da  $\{p\} = (C \cap X) \setminus (C \cap S)$ . Quindi abbiamo una mappa razionale

$$\alpha : \mathcal{H} \dashrightarrow X.$$

Se  $p \in X$  è un punto generale, dallo *Zariski's Main Theorem* segue che esiste un unico  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$  (infatti il luogo dei punti di  $\mathbb{P}^5$  per cui passano almeno due curve della famiglia  $\mathcal{H}$  deve avere codimensione almeno 2). Quindi abbiamo definito una mappa razionale

$$\beta : X \dashrightarrow \mathcal{H}, \quad \beta(p) = [C_p].$$

Diciamo che  $X$  è trasversale alla congruenza se per il punto generale  $p \in X$  la curva  $\beta(p)$  non è contenuta in  $X$ , i.e., se la composizione  $\alpha \circ \beta$  è ben definita.

Se  $X$  è trasversale alla congruenza, allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono l'una l'inversa dell'altra, e quindi  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$ , e sia  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  irriducibile.

Se  $[C] \in \mathcal{H}$  è generale, dal teorema di Bézout esiste un unico punto  $p \in X$  definito da  $\{p\} = (C \cap X) \setminus (C \cap S)$ . Quindi abbiamo una mappa razionale

$$\alpha : \mathcal{H} \dashrightarrow X.$$

Se  $p \in X$  è un punto generale, dallo *Zariski's Main Theorem* segue che esiste un unico  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$  (infatti il luogo dei punti di  $\mathbb{P}^5$  per cui passano almeno due curve della famiglia  $\mathcal{H}$  deve avere codimensione almeno 2). Quindi abbiamo definito una mappa razionale

$$\beta : X \dashrightarrow \mathcal{H}, \quad \beta(p) = [C_p].$$

Diciamo che  $X$  è trasversale alla congruenza se per il punto generale  $p \in X$  la curva  $\beta(p)$  non è contenuta in  $X$ , i.e., se la composizione  $\alpha \circ \beta$  è ben definita.

Se  $X$  è trasversale alla congruenza, allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono l'una l'inversa dell'altra, e quindi  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$ , e sia  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  irriducibile.

Se  $[C] \in \mathcal{H}$  è generale, dal teorema di Bézout esiste un unico punto  $p \in X$  definito da  $\{p\} = (C \cap X) \setminus (C \cap S)$ . Quindi abbiamo una mappa razionale

$$\alpha : \mathcal{H} \dashrightarrow X.$$

Se  $p \in X$  è un punto generale, dallo *Zariski's Main Theorem* segue che esiste un unico  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$  (infatti il luogo dei punti di  $\mathbb{P}^5$  per cui passano almeno due curve della famiglia  $\mathcal{H}$  deve avere codimensione almeno 2). Quindi abbiamo definito una mappa razionale

$$\beta : X \dashrightarrow \mathcal{H}, \quad \beta(p) = [C_p].$$

Diciamo che  $X$  è trasversale alla congruenza se per il punto generale  $p \in X$  la curva  $\beta(p)$  non è contenuta in  $X$ , *i.e.*, se la composizione  $\alpha \circ \beta$  è ben definita.

Se  $X$  è trasversale alla congruenza, allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono l'una l'inversa dell'altra, e quindi  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$ , e sia  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  irriducibile.

Se  $[C] \in \mathcal{H}$  è generale, dal teorema di Bézout esiste un unico punto  $p \in X$  definito da  $\{p\} = (C \cap X) \setminus (C \cap S)$ . Quindi abbiamo una mappa razionale

$$\alpha : \mathcal{H} \dashrightarrow X.$$

Se  $p \in X$  è un punto generale, dallo *Zariski's Main Theorem* segue che esiste un unico  $[C_p] \in \mathcal{H}$  tale che  $p \in C_p$  (infatti il luogo dei punti di  $\mathbb{P}^5$  per cui passano almeno due curve della famiglia  $\mathcal{H}$  deve avere codimensione almeno 2). Quindi abbiamo definito una mappa razionale

$$\beta : X \dashrightarrow \mathcal{H}, \quad \beta(p) = [C_p].$$

Diciamo che  $X$  è trasversale alla congruenza se per il punto generale  $p \in X$  la curva  $\beta(p)$  non è contenuta in  $X$ , *i.e.*, se la composizione  $\alpha \circ \beta$  è ben definita.

Se  $X$  è trasversale alla congruenza, allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono l'una l'inversa dell'altra, e quindi  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

## Proposizione

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado e parametrizzate da  $\mathcal{H}$ . Supponiamo inoltre che  $S$  sia una intersezione schematica di ipersuperfici di grado  $r$  che definiscono una mappa birazionale (dominante)  $\varphi = \varphi|_{H^0(\mathcal{I}_S(r))} : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^n$ . Allora

- 1 una ipersuperficie generale  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  è trasversale alla congruenza; in particolare,  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .
- 2 Ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

## Dimostrazione.

- 1 Sia  $p \in \mathbb{P}^5$  un punto generale e sia  $C \in \mathcal{H}$  la curva della congruenza passante per  $p$ . La mappa  $\varphi$  manda la curva  $C$  in una retta  $L$  passante per  $q = \varphi(p)$ . Siccome una sezione iperpiana generale  $W = Z \cap \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$  passante per  $q$  non contiene  $L$ , abbiamo che  $X = \varphi^{-1}(W)$  è una ipersuperficie generale contenente  $S$  e passante per  $p$  che non contiene  $C$ .
- 2 La seconda parte segue dalla prima applicando il risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)].



## Proposizione

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado e parametrizzate da  $\mathcal{H}$ . Supponiamo inoltre che  $S$  sia una intersezione schematica di ipersuperfici di grado  $r$  che definiscono una mappa birazionale (dominante)  $\varphi = \varphi|_{H^0(\mathcal{I}_S(r))} : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^n$ . Allora

- 1 una ipersuperficie generale  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  è trasversale alla congruenza; in particolare,  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .
- 2 Ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è birazionale a  $\mathcal{H}$ .

## Dimostrazione.

- 1 Sia  $p \in \mathbb{P}^5$  un punto generale e sia  $C \in \mathcal{H}$  la curva della congruenza passante per  $p$ . La mappa  $\varphi$  manda la curva  $C$  in una retta  $L$  passante per  $q = \varphi(p)$ . Siccome una sezione iperpiana generale  $W = \overline{Z \cap \mathbb{P}^{n-1}} \subset \mathbb{P}^n$  passante per  $q$  non contiene  $L$ , abbiamo che  $X = \varphi^{-1}(W)$  è una ipersuperficie generale contenente  $S$  e passante per  $p$  che non contiene  $C$ .
- 2 La seconda parte segue dalla prima applicando il risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)].



## Proposizione

*Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$  parametrizzate da  $\mathcal{H}$ . Supponiamo inoltre che  $S$  sia una intersezione schematica di ipersuperfici di grado  $r$  che definiscono una mappa birazionale (dominante)  $\varphi = \varphi|_{H^0(\mathcal{I}_S(r))} : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^n$ . Allora*

- 1 una ipersuperficie generale  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  è trasversale alla congruenza; in particolare,  $X$  è birazionale a  $\mathcal{H}$ .*
- 2 Ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è birazionale a  $\mathcal{H}$ .*

## Dimostrazione.

- 1 Sia  $p \in \mathbb{P}^5$  un punto generale e sia  $C \in \mathcal{H}$  la curva della congruenza passante per  $p$ . La mappa  $\varphi$  manda la curva  $C$  in una retta  $L$  passante per  $q = \varphi(p)$ . Siccome una sezione iperpiana generale  $W = \overline{Z \cap \mathbb{P}^{n-1}} \subset \mathbb{P}^n$  passante per  $q$  non contiene  $L$ , abbiamo che  $X = \varphi^{-1}(W)$  è una ipersuperficie generale contenente  $S$  e passante per  $p$  che non contiene  $C$ .*
- 2 La seconda parte segue dalla prima applicando il risultato principale di [Kontsevich e Tschinkel (2017)].*



# Come applicare le congruenze

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$  parametrizzate da  $\mathcal{H}$  come nelle ipotesi della proposizione precedente.

Supponiamo di saper dimostrare almeno una delle due affermazioni:

- $\mathcal{H}$  è razionale (risp. irrazionale);
- esiste una particolare ipersuperficie singolare  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  trasversale alla congruenza e tale che sia razionale (risp. irrazionale); per esempio,  $\text{Sing}(X)$  consiste di un unico punto doppio (risp. un unico punto triplo).

Allora possiamo concludere che ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è razionale (risp. irrazionale).

# Come applicare le congruenze

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$  parametrizzate da  $\mathcal{H}$  come nelle ipotesi della proposizione precedente.

Supponiamo di saper dimostrare almeno una delle due affermazioni:

- 1  $\mathcal{H}$  è razionale (risp. irrazionale);
- 2 esiste una particolare ipersuperficie singolare  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  trasversale alla congruenza e tale che sia razionale (risp. irrazionale); per esempio,  $\text{Sing}(X)$  consiste di un unico punto doppio (risp. un unico punto triplo).

Allora possiamo concludere che ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è razionale (risp. irrazionale).

# Come applicare le congruenze

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$  parametrizzate da  $\mathcal{H}$  come nelle ipotesi della proposizione precedente.

Supponiamo di saper dimostrare almeno una delle due affermazioni:

- 1  $\mathcal{H}$  è razionale (risp. irrazionale);
- 2 esiste una particolare ipersuperficie singolare  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  trasversale alla congruenza e tale che sia razionale (risp. irrazionale); per esempio,  $\text{Sing}(X)$  consiste di un unico punto doppio (risp. un unico punto triplo).

Allora possiamo concludere che ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è razionale (risp. irrazionale).

# Come applicare le congruenze

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$  parametrizzate da  $\mathcal{H}$  come nelle ipotesi della proposizione precedente.

Supponiamo di saper dimostrare almeno una delle due affermazioni:

- 1  $\mathcal{H}$  è razionale (risp. irrazionale);
- 2 esiste una particolare ipersuperficie singolare  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  trasversale alla congruenza e tale che sia razionale (risp. irrazionale); per esempio,  $\text{Sing}(X)$  consiste di un unico punto doppio (risp. un unico punto triplo).

Allora possiamo concludere che ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è razionale (risp. irrazionale).

# Come applicare le congruenze

Sia  $S \subset \mathbb{P}^5$  una superficie che ammette una congruenza di curve  $(re - 1)$ -secanti di grado  $e$  parametrizzate da  $\mathcal{H}$  come nelle ipotesi della proposizione precedente.

Supponiamo di saper dimostrare almeno una delle due affermazioni:

- 1  $\mathcal{H}$  è razionale (risp. irrazionale);
- 2 esiste una particolare ipersuperficie singolare  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  trasversale alla congruenza e tale che sia razionale (risp. irrazionale); per esempio,  $\text{Sing}(X)$  consiste di un unico punto doppio (risp. un unico punto triplo).

Allora possiamo concludere che ogni  $X \in |H^0(\mathcal{I}_S(r))|$  liscia è razionale (risp. irrazionale).

# Come rilevare la congruenza

L'idea della "retta mancante" in un esempio.

Sia  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \subset \mathbb{P}^8$  uno scroll razionale normale di grado 7. Prendiamo 3 punti generali sulla sua varietà secante e proiettiamo lo scroll dal piano generato dai tre punti, ottenendo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  con 3 nodi.

Le seguenti affermazioni possono essere verificate a partire dalle equazioni di  $S$  usando per esempio MACAULAY2 [Grayson e Stillman (2018)] con i pacchetti *Cremona.m2* [Staglianò (2017)] e *Cubics.m2* (file ancillary su arXiv).

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 13 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi: \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^{12}$  su una varietà  $Z$  di grado 29.

Per 3 punti generali  $p, q, r \in \mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , mentre che per  $p, q \in \mathbb{P}^5$  passano 5 rette secanti a  $S$  e una "retta mancante"  $L$ .

C'è quindi "una retta mancante"  $L \subset Z$  passante per  $q$  e che non proviene da rette secanti a  $S$  e passanti per  $p$ . Quindi  $C = \varphi^{-1}(L)$  è una curva razionale di un certo grado  $e > 1$  che dev'essere  $(3e - 1)$ -secante a  $S$  (infatti  $\varphi(C) = L$ ). Una verifica diretta mostra che di fatto  $e = 3$  e  $C$  è una conica 5-secante a  $S$ .

# Come rilevare la congruenza

L'idea della "retta mancante" in un esempio.

Sia  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \subset \mathbb{P}^8$  uno scroll razionale normale di grado 7.

Prendiamo 3 punti generali sulla sua varietà secante e proiettiamo lo scroll dal piano generato dai tre punti, ottenendo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  con 3 nodi.

Le seguenti affermazioni possono essere verificate a partire dalle equazioni di  $S$  usando per esempio MACAULAY2 [Grayson e Stillman (2018)] con i pacchetti *Cremona.m2* [Staglianò (2017)] e *Cubics.m2* (file ancillary su arXiv).

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 13 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^{12}$  su una varietà  $Z$  di grado 29.
- Per il punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , inviate da  $\varphi$  in rette contenute in  $Z$ , e per il punto generale  $q = \varphi(p) \in Z$  passano 8 rette contenute in  $Z$ .

C'è quindi "una retta mancante"  $L \subset Z$  passante per  $q$  e che non proviene da rette secanti a  $S$  e passanti per  $p$ . Quindi  $C = \overline{\varphi^{-1}(L)}$  è una curva razionale di un certo grado  $e > 1$  che dev'essere  $(3e - 1)$ -secante a  $S$  (infatti  $\varphi(C) = L$ ). Una verifica diretta mostra che di fatto  $e = 2$  e  $C$  è una conica 5-secante a  $S$ .

# Come rilevare la congruenza

L'idea della "retta mancante" in un esempio.

Sia  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \subset \mathbb{P}^8$  uno scroll razionale normale di grado 7. Prendiamo 3 punti generali sulla sua varietà secante e proiettiamo lo scroll dal piano generato dai tre punti, ottenendo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  con 3 nodi.

Le seguenti affermazioni possono essere verificate a partire dalle equazioni di  $S$  usando per esempio MACAULAY2 [Grayson e Stillman (2018)] con i pacchetti *Cremona.m2* [Staglianò (2017)] e *Cubics.m2* (file ancillary su arXiv).

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 13 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^{12}$  su una varietà  $Z$  di grado 29.
- Per il punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , inviate da  $\varphi$  in rette contenute in  $Z$ , e per il punto generale  $q = \varphi(p) \in Z$  passano 8 rette contenute in  $Z$ .

C'è quindi "una retta mancante"  $L \subset Z$  passante per  $q$  e che non proviene da rette secanti a  $S$  e passanti per  $p$ . Quindi  $C = \overline{\varphi^{-1}(L)}$  è una curva razionale di un certo grado  $e > 1$  che dev'essere  $(3e - 1)$ -secante a  $S$  (infatti  $\varphi(C) = L$ ). Una verifica diretta mostra che di fatto  $e = 2$  e  $C$  è una conica 5-secante a  $S$ .

# Come rilevare la congruenza

L'idea della "retta mancante" in un esempio.

Sia  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \subset \mathbb{P}^8$  uno scroll razionale normale di grado 7. Prendiamo 3 punti generali sulla sua varietà secante e proiettiamo lo scroll dal piano generato dai tre punti, ottenendo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  con 3 nodi.

Le seguenti affermazioni possono essere verificate a partire dalle equazioni di  $S$  usando per esempio MACAULAY2 [Grayson e Stillman (2018)] con i pacchetti *Cremona.m2* [Staglianò (2017)] e *Cubics.m2* (file ancillary su arXiv).

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 13 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^{12}$  su una varietà  $Z$  di grado 29.
- Per il punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , inviate da  $\varphi$  in rette contenute in  $Z$ , e per il punto generale  $q = \varphi(p) \in Z$  passano 8 rette contenute in  $Z$ .

C'è quindi "una retta mancante"  $L \subset Z$  passante per  $q$  e che non proviene da rette secanti a  $S$  e passanti per  $p$ . Quindi  $C = \overline{\varphi^{-1}(L)}$  è una curva razionale di un certo grado  $e > 1$  che dev'essere  $(3e - 1)$ -secante a  $S$  (infatti  $\varphi(C) = L$ ). Una verifica diretta mostra che di fatto  $e = 2$  e  $C$  è una conica 5-secante a  $S$ .

# Come rilevare la congruenza

L'idea della “retta mancante” in un esempio.

Sia  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \subset \mathbb{P}^8$  uno scroll razionale normale di grado 7. Prendiamo 3 punti generali sulla sua varietà secante e proiettiamo lo scroll dal piano generato dai tre punti, ottenendo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  con 3 nodi.

Le seguenti affermazioni possono essere verificate a partire dalle equazioni di  $S$  usando per esempio MACAULAY2 [Grayson e Stillman (2018)] con i pacchetti *Cremona.m2* [Staglianò (2017)] e *Cubics.m2* (file ancillary su arXiv).

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 13 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^{12}$  su una varietà  $Z$  di grado 29.
- Per il punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , inviate da  $\varphi$  in rette contenute in  $Z$ , e per il punto generale  $q = \varphi(p) \in Z$  passano 8 rette contenute in  $Z$ .

C'è quindi “una retta mancante”  $L \subset Z$  passante per  $q$  e che non proviene da rette secanti a  $S$  e passanti per  $p$ . Quindi  $C = \overline{\varphi^{-1}(L)}$  è una curva razionale di un certo grado  $e > 1$  che dev'essere  $(3e - 1)$ -secante a  $S$  (infatti  $\varphi(C) = L$ ). Una verifica diretta mostra che di fatto  $e = 2$  e  $C$  è una conica 5-secante a  $S$ .

# Come rilevare la congruenza

L'idea della “retta mancante” in un esempio.

Sia  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \subset \mathbb{P}^8$  uno scroll razionale normale di grado 7. Prendiamo 3 punti generali sulla sua varietà secante e proiettiamo lo scroll dal piano generato dai tre punti, ottenendo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  con 3 nodi.

Le seguenti affermazioni possono essere verificate a partire dalle equazioni di  $S$  usando per esempio MACAULAY2 [Grayson e Stillman (2018)] con i pacchetti *Cremona.m2* [Staglianò (2017)] e *Cubics.m2* (file ancillary su arXiv).

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 13 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^{12}$  su una varietà  $Z$  di grado 29.
- Per il punto generale  $p \in \mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , inviate da  $\varphi$  in rette contenute in  $Z$ , e per il punto generale  $q = \varphi(p) \in Z$  passano 8 rette contenute in  $Z$ .

C'è quindi “una retta mancante”  $L \subset Z$  passante per  $q$  e che non proviene da rette secanti a  $S$  e passanti per  $p$ . Quindi  $C = \varphi^{-1}(L)$  è una curva razionale di un certo grado  $e > 1$  che dev'essere  $(3e - 1)$ -secante a  $S$  (infatti  $\varphi(C) = L$ ). Una verifica diretta mostra che di fatto  $e = 2$  e  $C$  è una conica 5-secante a  $S$ .

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^3$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^5$  su una varietà  $Z$  di grado 17.

- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^3$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto

- generico di  $Z$  passano 30 cubiche secanti a  $Z$ .

- Congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Questo 14 rette sono di tre specie:

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Queste 14 rette sono di tre specie:

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Queste 14 rette sono di tre specie:
  - 7 rette provengono dalle 7 rette secanti a  $S$ ;
  - 7 rette provengono da 5 cubiche 8-secanti a  $S$ .

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Queste 14 rette sono di tre specie:
  - 7 rette provengono dalle 7 rette secanti a  $S$ ;
  - 6 rette provengono da 6 coniche 5-secanti a  $S$ ;
  - una retta proviene da una curva cubica gobba 8-secante a  $S$ .

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Queste 14 rette sono di tre specie:
  - 7 rette provengono dalle 7 rette secanti a  $S$ ;
  - 6 rette provengono da 6 coniche 5-secanti a  $S$ ;
  - una retta proviene da una curva cubica gobba 8-secante a  $S$ .

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Queste 14 rette sono di tre specie:
  - 7 rette provengono dalle 7 rette secanti a  $S$ ;
  - 6 rette provengono da 6 coniche 5-secanti a  $S$ ;
  - una retta proviene da una curva cubica gobba 8-secante a  $S$ .

# Un altro esempio di congruenza

Congruenza di cubiche gobbe 8-secanti

Può accadere che ci siano più “*rette mancanti*”, ma di avere lo stesso una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ .

Sia  $T \subset \mathbb{P}^8$  la superficie ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite la mappa razionale definita dalle curve cubiche con un punto base (del Pezzo ottica).

Prendiamo 3 punti generali su  $\text{Sec}(T)$  e proiettiamo  $T$  dal piano generato dai tre punti. Otteniamo così una superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  di grado 8 con 3 nodi.

- La superficie  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una intersezione di 10 cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\varphi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^9$  su una varietà  $Z$  di grado 17.
- Per il punto generale di  $\mathbb{P}^5$  passano 7 rette secanti a  $S$ , e per il punto generale di  $Z$  passano 14 rette contenute in  $Z$ .
- Queste 14 rette sono di tre specie:
  - 7 rette provengono dalle 7 rette secanti a  $S$ ;
  - 6 rette provengono da 6 coniche 5-secanti a  $S$ ;
  - una retta proviene da una curva cubica gobba 8-secante a  $S$ .

# Applicazioni classiche di congruenze ( $r = 3, e = 1$ )

Le superfici irriducibili  $S \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di rette 2-secanti sono chiamate OADP (*one apparent double point*). Le superfici OADP lisce sono state completamente classificate:

Teorema ([Severi (1901), Russo (2000)])

Se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie OADP liscia e non degenerata, allora  $S$  è

- 1 una superficie di del Pezzo di grado 5, oppure
- 2 uno scroll razionale normale di grado 4.

Come abbiamo già osservato, il divisore  $\mathcal{C}_{14} \subset \mathcal{C}$  può essere descritto come la chiusura del luogo delle cubiche contenenti uno dei due tipi di superficie OADP.

Segue quindi che l'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$  è razionale. Infatti è ben noto che la famiglia  $\mathcal{H}$  delle rette secanti una superficie  $S \subset \mathbb{P}^N$  è birazionale al prodotto simmetrico  $S^{(2)}$  di  $S$ , che risulta razionale se  $S$  lo è.

# Applicazioni classiche di congruenze ( $r = 3, e = 1$ )

Le superfici irriducibili  $S \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di rette 2-secanti sono chiamate OADP (*one apparent double point*). Le superfici OADP lisce sono state completamente classificate:

## Teorema ([Severi (1901), Russo (2000)])

Se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie OADP liscia e non degenerata, allora  $S$  è

- 1 una superficie di del Pezzo di grado 5, oppure
- 2 uno scroll razionale normale di grado 4.

Come abbiamo già osservato, il divisore  $\mathcal{C}_{14} \subset \mathcal{C}$  può essere descritto come la chiusura del luogo delle cubiche contenenti uno dei due tipi di superficie OADP.

Segue quindi che l'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$  è razionale. Infatti è ben noto che la famiglia  $\mathcal{H}$  delle rette secanti una superficie  $S \subset \mathbb{P}^N$  è birazionale al prodotto simmetrico  $S^{(2)}$  di  $S$ , che risulta razionale se  $S$  lo è.

# Applicazioni classiche di congruenze ( $r = 3, e = 1$ )

Le superfici irriducibili  $S \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di rette 2-secanti sono chiamate OADP (*one apparent double point*). Le superfici OADP lisce sono state completamente classificate:

## Teorema ([Severi (1901), Russo (2000)])

Se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie OADP liscia e non degenerata, allora  $S$  è

- 1 una superficie di del Pezzo di grado 5, oppure
- 2 uno scroll razionale normale di grado 4.

Come abbiamo già osservato, il divisore  $\mathcal{C}_{14} \subset \mathcal{C}$  può essere descritto come la chiusura del luogo delle cubiche contenenti uno dei due tipi di superficie OADP.

Segue quindi che l'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$  è razionale. Infatti è ben noto che la famiglia  $\mathcal{H}$  delle rette secanti una superficie  $S \subset \mathbb{P}^N$  è birazionale al prodotto simmetrico  $S^{(2)}$  di  $S$ , che risulta razionale se  $S$  lo è.

# Applicazioni classiche di congruenze ( $r = 3, e = 1$ )

Le superfici irriducibili  $S \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di rette 2-secanti sono chiamate OADP (*one apparent double point*). Le superfici OADP lisce sono state completamente classificate:

## Teorema ([Severi (1901), Russo (2000)])

Se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie OADP liscia e non degenerata, allora  $S$  è

- 1 una superficie di del Pezzo di grado 5, oppure
- 2 uno scroll razionale normale di grado 4.

Come abbiamo già osservato, il divisore  $\mathcal{C}_{14} \subset \mathcal{C}$  può essere descritto come la chiusura del luogo delle cubiche contenenti uno dei due tipi di superficie OADP.

Segue quindi che l'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$  è razionale. Infatti è ben noto che la famiglia  $\mathcal{H}$  delle rette secanti una superficie  $S \subset \mathbb{P}^N$  è birazionale al prodotto simmetrico  $S^{(2)}$  di  $S$ , che risulta razionale se  $S$  lo è.

# Rappresentazioni birazionali per le cubiche in $\mathcal{C}_{14}$

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente uno scroll razionale normale  $\Sigma_4$  di grado 4. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $\Sigma_4$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale (precisamente, se  $X$  non contiene piani) allora la mappa inversa è data dalle cubiche contenenti una superficie liscia in  $\mathbb{G}(1, 3)$  di grado 10 e genere sezionale 7, ottenuta come proiezione da un piano tangente di una superficie K3 in  $\mathbb{P}^8$  di grado 14 e genere sezionale 8.

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente una superficie di del Pezzo  $T$  di grado 5. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $T$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^4$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale, allora l'inversa è data dalle quartiche contenenti una superficie liscia K3 (non minimale, con 5  $(-1)$ -rette) di grado 9 e genere sezionale 8.

# Rappresentazioni birazionali per le cubiche in $\mathcal{C}_{14}$

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente uno scroll razionale normale  $\Sigma_4$  di grado 4. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $\Sigma_4$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale (precisamente, se  $X$  non contiene piani) allora la mappa inversa è data dalle cubiche contenenti una superficie liscia in  $\mathbb{G}(1, 3)$  di grado 10 e genere sezionale 7, ottenuta come proiezione da un piano tangente di una superficie K3 in  $\mathbb{P}^8$  di grado 14 e genere sezionale 8.

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente una superficie di del Pezzo  $T$  di grado 5. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $T$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^4$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale, allora l'inversa è data dalle quartiche contenenti una superficie liscia K3 (non minimale, con 5  $(-1)$ -rette) di grado 9 e genere sezionale 8.

# Rappresentazioni birazionali per le cubiche in $\mathcal{C}_{14}$

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente uno scroll razionale normale  $\Sigma_4$  di grado 4. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $\Sigma_4$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale (precisamente, se  $X$  non contiene piani) allora la mappa inversa è data dalle cubiche contenenti una superficie liscia in  $\mathbb{G}(1, 3)$  di grado 10 e genere sezionale 7, ottenuta come proiezione da un piano tangente di una superficie K3 in  $\mathbb{P}^8$  di grado 14 e genere sezionale 8.

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente una superficie di del Pezzo  $T$  di grado 5. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $T$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^4$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale, allora l'inversa è data dalle quartiche contenenti una superficie liscia K3 (non minimale, con 5  $(-1)$ -rette) di grado 9 e genere sezionale 8.

# Rappresentazioni birazionali per le cubiche in $\mathcal{C}_{14}$

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente uno scroll razionale normale  $\Sigma_4$  di grado 4. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $\Sigma_4$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale (precisamente, se  $X$  non contiene piani) allora la mappa inversa è data dalle cubiche contenenti una superficie liscia in  $\mathbb{G}(1, 3)$  di grado 10 e genere sezionale 7, ottenuta come proiezione da un piano tangente di una superficie K3 in  $\mathbb{P}^8$  di grado 14 e genere sezionale 8.

## Teorema ([Fano (1943)])

*Sia  $X \subset \mathbb{P}^5$  una ipersuperficie cubica liscia contenente una superficie di del Pezzo  $T$  di grado 5. Allora la restrizione a  $X$  del sistema lineare delle quadriche contenenti  $T$  definisce una mappa birazionale  $X \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^4$ .*

Se  $[X] \in \mathcal{C}_{14}$  è generale, allora l'inversa è data dalle quartiche contenenti una superficie liscia K3 (non minimale, con 5  $(-1)$ -rette) di grado 9 e genere sezionale 8.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Stagliano (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Staglianò (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Staglianò (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Staglianò (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Staglianò (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Staglianò (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

- Il problema di classificare le superfici in  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti sembra non essere mai stato considerato.
- In [Russo e Staglianò (2017)] abbiamo scoperto quattro esempi di (famiglie di) superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di coniche 5-secanti.
- Tutte e quattro queste superfici sono intersezione schematica di cubiche che definiscono una mappa birazionale  $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .
- Il luogo delle cubiche  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono una delle quattro superfici ha codimensione 1 in  $\mathcal{C}$ .
- Conosciamo altri esempi di superfici di  $\mathbb{P}^5$  che ammettono una congruenza di curve  $(3e - 1)$ -secanti di grado  $e$ , ma per queste i luoghi delle  $[X] \in \mathcal{C}$  che contengono la superficie ha codimensione  $\geq 2$  in  $\mathcal{C}$ .

Vediamo i quattro esempi di superfici più in dettaglio.

# Esempi di superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

## Esempio I

Una proiezione isomorfa  $S_I \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie liscia razionale  $S' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 8 e genere sezionale 3 ( $S'$  è il luogo base di una trasformazione di Cremona speciale ed è stata studiata in [Semple e Tyrrell (1970)]).

$S_I$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 28 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio II

Una proiezione isomorfa  $S_{II} \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie  $S'' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 7 con un nodo, ottenuta come proiezione di una superficie liscia di del Pezzo di grado 7 in  $\mathbb{P}^7$  da un punto generale sulla sua varietà secante.

$S_{II}$  è una intersezione di 14 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 34 di  $\mathbb{P}^{13}$ .

# Esempi di superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

## Esempio I

Una proiezione isomorfa  $S_I \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie liscia razionale  $S' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 8 e genere sezionale 3 ( $S'$  è il luogo base di una trasformazione di Cremona speciale ed è stata studiata in [Semple e Tyrrell (1970)]).

$S_I$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 28 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio II

Una proiezione isomorfa  $S_{II} \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie  $S'' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 7 con un nodo, ottenuta come proiezione di una superficie liscia di del Pezzo di grado 7 in  $\mathbb{P}^7$  da un punto generale sulla sua varietà secante.

$S_{II}$  è una intersezione di 14 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 34 di  $\mathbb{P}^{13}$ .

# Esempi di superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

## Esempio I

Una proiezione isomorfa  $S_I \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie liscia razionale  $S' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 8 e genere sezionale 3 ( $S'$  è il luogo base di una trasformazione di Cremona speciale ed è stata studiata in [Semple e Tyrrell (1970)]).

$S_I$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 28 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio II

Una proiezione isomorfa  $S_{II} \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie  $S'' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 7 con un nodo, ottenuta come proiezione di una superficie liscia di del Pezzo di grado 7 in  $\mathbb{P}^7$  da un punto generale sulla sua varietà secante.

$S_{II}$  è una intersezione di 14 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 34 di  $\mathbb{P}^{13}$ .

# Esempi di superfici con una congruenza di coniche pentasecanti

## Esempio I

Una proiezione isomorfa  $S_I \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie liscia razionale  $S' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 8 e genere sezionale 3 ( $S'$  è il luogo base di una trasformazione di Cremona speciale ed è stata studiata in [Semple e Tyrrell (1970)]).

$S_I$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 28 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio II

Una proiezione isomorfa  $S_{II} \subset \mathbb{P}^5$  di una superficie  $S'' \subset \mathbb{P}^6$  di grado 7 con un nodo, ottenuta come proiezione di una superficie liscia di del Pezzo di grado 7 in  $\mathbb{P}^7$  da un punto generale sulla sua varietà secante.

$S_{II}$  è una intersezione di 14 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 34 di  $\mathbb{P}^{13}$ .

## Esempio III

Uno scroll razionale normale  $S_{III} \subset \mathbb{P}^5$  di grado 7 con 3 nodi, considerato in [Farkas e Verra (2018)].

$S_{III}$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 29 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio IV

Una superficie  $S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  liscia razionale e linearmente normale di grado 10 e genere sezionale 6, ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite il sistema lineare delle curve di grado 10 con 10 punti tripli fissati (questa superficie fu studiata classicamente da Coble, si veda anche [Nuer (2015)]).

$S_{IV}$  è intersezione di 10 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 20 di  $\mathbb{P}^9$ .

## Esempio III

Uno scroll razionale normale  $S_{III} \subset \mathbb{P}^5$  di grado 7 con 3 nodi, considerato in [Farkas e Verra (2018)].

$S_{III}$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 29 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio IV

Una superficie  $S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  liscia razionale e linearmente normale di grado 10 e genere sezionale 6, ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite il sistema lineare delle curve di grado 10 con 10 punti tripli fissati (questa superficie fu studiata classicamente da Coble, si veda anche [Nuer (2015)]).

$S_{IV}$  è intersezione di 10 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 20 di  $\mathbb{P}^9$ .

## Esempio III

Uno scroll razionale normale  $S_{III} \subset \mathbb{P}^5$  di grado 7 con 3 nodi, considerato in [Farkas e Verra (2018)].

$S_{III}$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 29 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio IV

Una superficie  $S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  liscia razionale e linearmente normale di grado 10 e genere sezionale 6, ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite il sistema lineare delle curve di grado 10 con 10 punti tripli fissati (questa superficie fu studiata classicamente da Coble, si veda anche [Nuer (2015)]).

$S_{IV}$  è intersezione di 10 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 20 di  $\mathbb{P}^9$ .

## Esempio III

Uno scroll razionale normale  $S_{III} \subset \mathbb{P}^5$  di grado 7 con 3 nodi, considerato in [Farkas e Verra (2018)].

$S_{III}$  è una intersezione di 13 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 29 di  $\mathbb{P}^{12}$ .

## Esempio IV

Una superficie  $S_{IV} \subset \mathbb{P}^5$  liscia razionale e linearmente normale di grado 10 e genere sezionale 6, ottenuta come l'immagine di  $\mathbb{P}^2$  tramite il sistema lineare delle curve di grado 10 con 10 punti tripli fissati (questa superficie fu studiata classicamente da Coble, si veda anche [Nuer (2015)]).

$S_{IV}$  è intersezione di 10 cubiche che danno una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^5$  in una varietà di grado 20 di  $\mathbb{P}^9$ .

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusioni:

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $C_{14}, C_{26}, C_{38}$ . Più precisamente:

- $C_{14} = \{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_7\}$ , [Russo e Stagliano (2017)];
- $C_{26} = \{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{17}\}$ , [Russo e Stagliano (2017)];
- $C_{38} = \{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{17}\}$ , [Pappas e Verra (2012)].

## Conclusioni:

L'elemento generale di  $C_{14}, C_{26}$  e  $C_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$ ,  $\mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusioni

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusioni

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusione:

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$ ,  $\mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusione:

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}, \mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusione:

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

# Seconda applicazione di congruenze ( $r = 3, e = 2$ )

## Fatto 1

Tutte e quattro le superfici viste sono contenute in ipersuperfici cubiche trasversali alla congruenza con un unico punto doppio e quindi razionali.

## Fatto 2

Le quattro superfici possono essere usate per descrivere i luoghi  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$ ,  $\mathcal{C}_{38}$ . Più precisamente:

- $\mathcal{C}_{14} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_I\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{II}\}}$ , [Russo e Staglianò (2017)];
- $\mathcal{C}_{26} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{III}\}}$ , [Farkas e Verra (2018)];
- $\mathcal{C}_{38} = \overline{\{[X] \in \mathcal{C} : X \supset S_{IV}\}}$ , [Nuer (2015)].

## Conclusione:

L'elemento generale di  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$  è razionale.

## Section 6

Rappresentazioni birazionali per le cubiche  
generiche in  $\mathcal{C}_{26}$  e  $\mathcal{C}_{38}$

# Contrazione di coniche pentasecanti

Osserviamo che se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie che ammette una congruenza di coniche 5-secanti, allora la mappa razionale

$$\psi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^N,$$

definita dal sistema lineare delle ipersuperfici quintiche singolari lungo  $S$ , deve contrarre tutte le coniche 5-secanti della famiglia. Quindi se  $p \in \mathbb{P}^5$  è un punto generale, allora la fibra  $\overline{\psi^{-1}(\psi(p))}$  contiene la conica 5-secante  $C_p$  passante per  $p$ .

Se per  $p \in \mathbb{P}^5$  generale, abbiamo  $\overline{\psi^{-1}(\psi(p))} = C_p$ , allora la restrizione di  $\psi$  a una cubica generale  $X$  contenente  $S$  dà una mappa birazionale sulla sua immagine

$$\psi|_X : X \dashrightarrow \overline{\psi(X)} \subseteq \mathbb{P}^N$$

Sorprendentemente, se  $S$  è una delle nostre quattro superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}$ , non solo vale la precedente condizione, ma inoltre la varietà immagine  $\overline{\psi(X)}$  risulta essere  $\mathbb{P}^4$  o una sezione lineare di  $\mathbb{G}(1, 4)$  (in completa analogia con le rappresentazioni di Morin e Fano).

# Contrazione di coniche pentasecanti

Osserviamo che se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie che ammette una congruenza di coniche 5-secanti, allora la mappa razionale

$$\psi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^N,$$

definita dal sistema lineare delle ipersuperfici quintiche singolari lungo  $S$ , deve contrarre tutte le coniche 5-secanti della famiglia. Quindi se  $p \in \mathbb{P}^5$  è un punto generale, allora la fibra  $\overline{\psi^{-1}(\psi(p))}$  contiene la conica 5-secante  $C_p$  passante per  $p$ .

Se per  $p \in \mathbb{P}^5$  generale, abbiamo  $\overline{\psi^{-1}(\psi(p))} = C_p$ , allora la restrizione di  $\psi$  a una cubica generale  $X$  contenente  $S$  dà una mappa birazionale sulla sua immagine

$$\psi|_X : X \dashrightarrow \overline{\psi(X)} \subseteq \mathbb{P}^N$$

Sorprendentemente, se  $S$  è una delle nostre quattro superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}$ , non solo vale la precedente condizione, ma inoltre la varietà immagine  $\overline{\psi(X)}$  risulta essere  $\mathbb{P}^4$  o una sezione lineare di  $\mathbb{G}(1, 4)$  (in completa analogia con le rappresentazioni di Morin e Fano).

# Contrazione di coniche pentasecanti

Osserviamo che se  $S \subset \mathbb{P}^5$  è una superficie che ammette una congruenza di coniche 5-secanti, allora la mappa razionale

$$\psi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^N,$$

definita dal sistema lineare delle ipersuperfici quintiche singolari lungo  $S$ , deve contrarre tutte le coniche 5-secanti della famiglia. Quindi se  $p \in \mathbb{P}^5$  è un punto generale, allora la fibra  $\overline{\psi^{-1}(\psi(p))}$  contiene la conica 5-secante  $C_p$  passante per  $p$ .

Se per  $p \in \mathbb{P}^5$  generale, abbiamo  $\overline{\psi^{-1}(\psi(p))} = C_p$ , allora la restrizione di  $\psi$  a una cubica generale  $X$  contenente  $S$  dà una mappa birazionale sulla sua immagine

$$\psi|_X : X \dashrightarrow \overline{\psi(X)} \subseteq \mathbb{P}^N$$

Sorprendentemente, se  $S$  è una delle nostre quattro superfici  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}$ , non solo vale la precedente condizione, ma inoltre la varietà immagine  $\overline{\psi(X)}$  risulta essere  $\mathbb{P}^4$  o una sezione lineare di  $\mathbb{G}(1, 4)$  (in completa analogia con le rappresentazioni di Morin e Fano).

Precisamente, abbiamo il seguente:

**Teorema (Russo e Staglianò (in preparazione))**

- Se  $S = S_I$  (proiezione isomorfa di una superficie di grado 8), o  $S = S_{III}$  (scroll di grado 7 con 3 nodi), o  $S = S_{IV}$  (superficie liscia di grado 10), allora il sistema lineare  $|H^0(\mathcal{I}_S^2(5))|$  ha dimensione 4 e definisce una mappa birazionale

$$\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$$

con fibra generica una conica irriducibile.

- Se  $S = S_{II}$  (del Pezzo di grado 7 con un nodo), allora il sistema lineare  $|H^0(\mathcal{I}_S^2(5))|$  ha dimensione 7 e definisce una mappa birazionale

$$\mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^7$$

con immagine una sezione lineare  $Z$  della Grassmanniana  $G(1,4) \subset \mathbb{P}^7$ , e con fibra generica una conica irriducibile.

Precisamente, abbiamo il seguente:

## Teorema (Russo e Staglianò (in preparazione))

- Se  $S = S_I$  (proiezione isomorfa di una superficie di grado 8), o  $S = S_{III}$  (scroll di grado 7 con 3 nodi), o  $S = S_{IV}$  (superficie liscia di grado 10), allora il sistema lineare  $|H^0(\mathcal{I}_S^2(5))|$  ha dimensione 4 e definisce una mappa birazionale

$$\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$$

con fibra generica una conica irriducibile.

- Se  $S = S_{II}$  (del Pezzo di grado 7 con un nodo), allora il sistema lineare  $|H^0(\mathcal{I}_S^2(5))|$  ha dimensione 7 e definisce una mappa birazionale

$$\mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^7$$

con immagine una sezione lineare  $Z$  della Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, 4) \subset \mathbb{P}^9$ , e con fibra generica una conica irriducibile.

Precisamente, abbiamo il seguente:

## Teorema (Russo e Staglianò (in preparazione))

- Se  $S = S_I$  (proiezione isomorfa di una superficie di grado 8), o  $S = S_{III}$  (scroll di grado 7 con 3 nodi), o  $S = S_{IV}$  (superficie liscia di grado 10), allora il sistema lineare  $|H^0(\mathcal{I}_S^2(5))|$  ha dimensione 4 e definisce una mappa birazionale

$$\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$$

con fibra generica una conica irriducibile.

- Se  $S = S_{II}$  (del Pezzo di grado 7 con un nodo), allora il sistema lineare  $|H^0(\mathcal{I}_S^2(5))|$  ha dimensione 7 e definisce una mappa birazionale

$$\mathbb{P}^5 \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^7$$

con immagine una sezione lineare  $Z$  della Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, 4) \subset \mathbb{P}^9$ , e con fibra generica una conica irriducibile.

# Una illustrazione pratica del risultato

Carichiamo in *Macaulay2* il file *Cubics.m2* (il quale dipende dal pacchetto *Cremona.m2* [Staglianò (2017)]) e prendiamo per esempio in considerazione il caso della superficie  $S = S_{IV}$  contenuta nella generica cubica  $X$  di  $\mathcal{C}_{38}$ .

```
i1 : needsPackage "Cubics";
i2 : f = first example(38,QQ);
o2 : RationalMap (cubic rational map from PP^2 to PP^5)
i3 : S = image f;
o3 : Ideal of QQ[x , x , x , x , x , x ]
      0 1 2 3 4 5
i4 : X = randomSmoothCubic S;
```

La mappa razionale  $\psi$  definita dal sistema lineare delle quintiche singolari lungo  $S$  e la sua restrizione  $\psi' = \psi|_X$ , possono essere calcolate come segue:

```
i5 : psi = rationalMap(S,5,2);
o5 : RationalMap (rational map from PP^5 to PP^4)
i6 : psi' = psi|X;
o6 : RationalMap (rational map from hypersurface in PP^5 to PP^4)
```

Il seguente calcolo ci conferma che  $\psi|_X$  è birazionale e inoltre dice che l'inversa è definita da forme di grado 9.

```
i7 : projectiveDegrees psi'
o7 = {3, 15, 27, 9, 1}
o7 : List
```

# Una illustrazione pratica del risultato

Carichiamo in *Macaulay2* il file *Cubics.m2* (il quale dipende dal pacchetto *Cremona.m2* [Staglianò (2017)]) e prendiamo per esempio in considerazione il caso della superficie  $S = S_{IV}$  contenuta nella generica cubica  $X$  di  $\mathcal{C}_{38}$ .

```
i1 : needsPackage "Cubics";
i2 : f = first example(38,QQ);
o2 : RationalMap (cubic rational map from PP^2 to PP^5)
i3 : S = image f;
o3 : Ideal of QQ[x0, x1, x2, x3, x4, x5]
i4 : X = randomSmoothCubic S;
```

La mappa razionale  $\psi$  definita dal sistema lineare delle quintiche singolari lungo  $S$  e la sua restrizione  $\psi' = \psi|_X$ , possono essere calcolate come segue:

```
i5 : psi = rationalMap(S,5,2);
o5 : RationalMap (rational map from PP^5 to PP^4)
i6 : psi' = psi|X;
o6 : RationalMap (rational map from hypersurface in PP^5 to PP^4)
```

Il seguente calcolo ci conferma che  $\psi|_X$  è birazionale e inoltre dice che l'inversa è definita da forme di grado 9.

```
i7 : projectiveDegrees psi'
o7 = {3, 15, 27, 9, 1}
o7 : List
```

# Una illustrazione pratica del risultato

Carichiamo in *Macaulay2* il file *Cubics.m2* (il quale dipende dal pacchetto *Cremona.m2* [Staglianò (2017)]) e prendiamo per esempio in considerazione il caso della superficie  $S = S_{IV}$  contenuta nella generica cubica  $X$  di  $\mathcal{C}_{38}$ .

```
i1 : needsPackage "Cubics";
i2 : f = first example(38,QQ);
o2 : RationalMap (cubic rational map from PP^2 to PP^5)
i3 : S = image f;
o3 : Ideal of QQ[x , x , x , x , x , x ]
           0   1   2   3   4   5
i4 : X = randomSmoothCubic S;
```

La mappa razionale  $\psi$  definita dal sistema lineare delle quintiche singolari lungo  $S$  e la sua restrizione  $\psi' = \psi|_X$ , possono essere calcolate come segue:

```
i5 : psi = rationalMap(S,5,2);
o5 : RationalMap (rational map from PP^5 to PP^4)
i6 : psi' = psi|X;
o6 : RationalMap (rational map from hypersurface in PP^5 to PP^4)
```

Il seguente calcolo ci conferma che  $\psi|_X$  è birazionale e inoltre dice che l'inversa è definita da forme di grado 9.

```
i7 : projectiveDegrees psi'
o7 = {3, 15, 27, 9, 1}
o7 : List
```

## Section 7

### Riferimenti bibliografici



Addington N.; Thomas R. (2014).  
Hodge theory and derived categories of cubic fourfolds.  
*Duke Math. J.*, **163**(10), 1886–1927.



Addington N.; Hassett B.; Tschinkel Y.; Várilly-Alvarado A. (2016).  
Cubic fourfolds fibered in sextic del Pezzo surfaces.  
Preprint: <https://arxiv.org/abs/1606.05321>.



Auel A.; Bernardara M.; Bolognesi M.; Várilly-Alvarado A. (2014).  
Cubic fourfolds containing a plane and a quintic del Pezzo surface.  
*Algebr. Geom.*, **1**(2), 181–193.



Bolognesi M.; Russo F.; Staglianò G. (2015).  
Some loci of rational cubic fourfolds.  
Preprint: <http://arxiv.org/abs/1504.05863>.



Clemens C. H.; Griffiths P. A. (1972).  
The intermediate Jacobian of the cubic threefold.  
*Ann. of Math.*, **95**(2), 281–356.



de Fernex T.; Fusi D. (2013).  
Rationality in families of threefolds.  
*Rend. Circ. Mat. Palermo*, **62**(1), 127–135.



Fano G. (1943).  
Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del 4° ordine.  
*Comment. Math. Helv.*, **15**(1), 71–80.



Farkas G.; Verra A. (2018).  
The universal  $k^3$  surface of genus 14 via cubic fourfolds.  
*J. Math. Pures Appl.*, **111**, 1–20.



Grayson D. R.; Stillman M. E. (2018).  
MACAULAY2 — A software system for research in algebraic geometry (version 1.11).  
Home page: <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.



Hassett B. (1999).  
Some rational cubic fourfolds.  
*J. Algebraic Geom.*, **8**(1), 103–114.

# Riferimenti bibliografici III



Hassett B. (2000).

Special cubic fourfolds.

*Comp. Math.*, **120**(1), 1–23.



Hassett B. (2016).

Cubic fourfolds, K3 surfaces, and rationality questions In *Rationality Problems in Algebraic Geometry: Levico Terme, Italy 2015*.

A cura di Pardini R., Pirola G. P., pp. 29–66. Springer International Publishing, Cham.



Kontsevich M.; Tschinkel Y. (2017).

Specialization of birational types.

Preprint: <https://arxiv.org/abs/1708.05699>.



Kuznetsov A. (2010).

Derived categories of cubic fourfolds.

In *Cohomological and Geometric Approaches to Rationality Problems*, volume 282 di *Progress in Mathematics*, pp. 219–243. Birkhäuser Boston.



Kuznetsov A. (2016).

Derived categories view on rationality problems In *Rationality Problems in Algebraic Geometry: Levico Terme, Italy 2015*.

A cura di Pardini R., Pirola G. P., pp. 67–104. Springer International Publishing, Cham.



Lai K. (2016).

New cubic fourfolds with odd degree unirational parametrizations.

Preprint: <http://arxiv.org/abs/1606.03853>.



Morin U. (1940).

Sulla razionalità dell'ipersuperficie cubica dello spazio lineare  $s_5$ .

*Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **11**, 108–112.



Nuer H. (2015).

Unirationality of moduli spaces of special cubic fourfolds and K3 surfaces.

*Algebr. Geom.*, **4**, 281–289.



Russo F. (2000).

On a theorem of Severi.

*Math. Ann.*, **316**(1), 1–17.



Russo F.; Stagliano G. (2017).

Congruences of 5-secant conics and the rationality of some admissible cubic fourfolds.

Preprint: <https://arxiv.org/abs/1707.00999>.

# Riferimenti bibliografici V



Semple J. G.; Tyrrell J. A. (1970).

The  $T_{2,4}$  of  $S_6$  defined by a rational surface  ${}^3F^8$ .  
*Proc. Lond. Math. Soc.*, **s3-20**, 205–221.



Severi F. (1901).

Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti.  
*Rend. Circ. Mat. Palermo*, **15(1)**, 33–51.



Staglianò G. (2017).

A Macaulay2 package for computations with rational maps.  
Preprint: <https://arxiv.org/abs/1701.05329>.



Voisin C. (1986).

Théorème de Torelli pour les cubiques de  $\mathbb{P}^5$ .  
*Invent. Math.*, **86(3)**, 577–601.



Voisin C. (2012).

Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal.  
*J. Algebraic Geom.*, **22(1)**, 141–174.

## Section 8

### Deformazioni della superficie $S_{IV}$

# Deformazioni della superficie $S_{IV}$

Denotiamo con  $S(a; i, j, k)$  l'immagine della mappa definita dal sistema lineare delle curve piane di grado  $a$  con  $i$  punti base generali semplici,  $j$  punti generali doppi e  $k$  punti generali tripli.

Con questa notazione la superficie  $S = S_{IV}$  si scrive come  $S(10; 0, 0, 10)$ .

La superficie  $S$  fa parte di una serie di 7 superfici lisce di  $\mathbb{P}^5$  di grado 10, genere sezionale 6, con ideale generato da 10 cubiche, e contenute nella generica cubica di  $\mathcal{C}_d$ , con  $d = 44 - 6j$ ,  $j = 0, \dots, 6$  [Nuer (2015)].

$d$	Superficie $S \subset \mathbb{P}^5$	Rette 2-secanti $S$ per il punto generale	Coniche 5-secanti $S$ per il punto generale	Multigrado di $ H^0(\mathcal{I}_S(3)) $
8	$S(5; 15, 0, 0)$	12	6	1, 3, 9, 17, 21, 15
14	$S(6; 10, 4, 0)$	11	5	1, 3, 9, 17, 21, 16
20	$S(7; 6, 6, 1)$	10	4	1, 3, 9, 17, 21, 17
26	$S(7; 3, 9, 0)$	9	3	1, 3, 9, 17, 21, 18
32	$S(9; 1, 4, 6)$	8	2	1, 3, 9, 17, 21, 19
38	$S(10; 0, 0, 10)$	7	1	1, 3, 9, 17, 21, 20
44	Enriques	6	0	1, 3, 9, 17, 21, 21

# Deformazioni della superficie $S_{IV}$

Denotiamo con  $S(a; i, j, k)$  l'immagine della mappa definita dal sistema lineare delle curve piane di grado  $a$  con  $i$  punti base generali semplici,  $j$  punti generali doppi e  $k$  punti generali tripli.

Con questa notazione la superficie  $S = S_{IV}$  si scrive come  $S(10; 0, 0, 10)$ .

La superficie  $S$  fa parte di una serie di 7 superfici lisce di  $\mathbb{P}^5$  di grado 10, genere sezionale 6, con ideale generato da 10 cubiche, e contenute nella generica cubica di  $\mathcal{C}_d$ , con  $d = 44 - 6j$ ,  $j = 0, \dots, 6$  [Nuer (2015)].

$d$	Superficie $S \subset \mathbb{P}^5$	Rette 2-secanti $S$ per il punto generale	Coniche 5-secanti $S$ per il punto generale	Multigrado di $ H^0(\mathcal{I}_S(3)) $
8	$S(5; 15, 0, 0)$	12	6	1, 3, 9, 17, 21, 15
14	$S(6; 10, 4, 0)$	11	5	1, 3, 9, 17, 21, 16
20	$S(7; 6, 6, 1)$	10	4	1, 3, 9, 17, 21, 17
26	$S(7; 3, 9, 0)$	9	3	1, 3, 9, 17, 21, 18
32	$S(9; 1, 4, 6)$	8	2	1, 3, 9, 17, 21, 19
38	$S(10; 0, 0, 10)$	7	1	1, 3, 9, 17, 21, 20
44	Enriques	6	0	1, 3, 9, 17, 21, 21

# Deformazioni della superficie $S_{IV}$

Denotiamo con  $S(a; i, j, k)$  l'immagine della mappa definita dal sistema lineare delle curve piane di grado  $a$  con  $i$  punti base generali semplici,  $j$  punti generali doppi e  $k$  punti generali tripli.

Con questa notazione la superficie  $S = S_{IV}$  si scrive come  $S(10; 0, 0, 10)$ .

La superficie  $S$  fa parte di una serie di 7 superfici lisce di  $\mathbb{P}^5$  di grado 10, genere sezionale 6, con ideale generato da 10 cubiche, e contenute nella generica cubica di  $\mathcal{C}_d$ , con  $d = 44 - 6j$ ,  $j = 0, \dots, 6$  [Nuer (2015)].

$d$	Superficie $S \subset \mathbb{P}^5$	Rette 2-secanti $S$ per il punto generale	Coniche 5-secanti $S$ per il punto generale	Multigrado di $ H^0(\mathcal{I}_S(3)) $
8	$S(5; 15, 0, 0)$	12	6	1, 3, 9, 17, 21, 15
14	$S(6; 10, 4, 0)$	11	5	1, 3, 9, 17, 21, 16
20	$S(7; 6, 6, 1)$	10	4	1, 3, 9, 17, 21, 17
26	$S(7; 3, 9, 0)$	9	3	1, 3, 9, 17, 21, 18
32	$S(9; 1, 4, 6)$	8	2	1, 3, 9, 17, 21, 19
38	$S(10; 0, 0, 10)$	7	1	1, 3, 9, 17, 21, 20
44	Enriques	6	0	1, 3, 9, 17, 21, 21

# Deformazioni della superficie $S_{IV}$

Denotiamo con  $S(a; i, j, k)$  l'immagine della mappa definita dal sistema lineare delle curve piane di grado  $a$  con  $i$  punti base generali semplici,  $j$  punti generali doppi e  $k$  punti generali tripli.

Con questa notazione la superficie  $S = S_{IV}$  si scrive come  $S(10; 0, 0, 10)$ .

La superficie  $S$  fa parte di una serie di 7 superfici lisce di  $\mathbb{P}^5$  di grado 10, genere sezionale 6, con ideale generato da 10 cubiche, e contenute nella generica cubica di  $\mathcal{C}_d$ , con  $d = 44 - 6j$ ,  $j = 0, \dots, 6$  [Nuer (2015)].

$d$	Superficie $S \subset \mathbb{P}^5$	Rette 2-secanti $S$ per il punto generale	Coniche 5-secanti $S$ per il punto generale	Multigrado di $ H^0(\mathcal{I}_S(3)) $
8	$S(5; 15, 0, 0)$	12	6	1, 3, 9, 17, 21, 15
14	$S(6; 10, 4, 0)$	11	5	1, 3, 9, 17, 21, 16
20	$S(7; 6, 6, 1)$	10	4	1, 3, 9, 17, 21, 17
26	$S(7; 3, 9, 0)$	9	3	1, 3, 9, 17, 21, 18
32	$S(9; 1, 4, 6)$	8	2	1, 3, 9, 17, 21, 19
38	$S(10; 0, 0, 10)$	7	1	1, 3, 9, 17, 21, 20
44	<b>Enriques</b>	6	0	1, 3, 9, 17, 21, 21