Forme aggiunte su varietà algebriche

Luca Rizzi

Università degli studi di Udine

Genova
31 Maggio 2018

Famiglia di Varietà

Definizione

Una **famiglia** di varietà n-dimensionali è un morfismo proprio sommersivo $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ tale che la **fibra** $X_b := \pi^{-1}(b)$ sopra un punto $b \in B$ ha dimensione n. La varietà B è detta **base della famiglia**.

Famiglia di Varietà

Definizione

Una **famiglia** di varietà n-dimensionali è un morfismo proprio sommersivo $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ tale che la **fibra** $X_b := \pi^{-1}(b)$ sopra un punto $b \in B$ ha dimensione n. La varietà B è detta **base della famiglia**.

Fissiamo un punto $0 \in B$ e chiamiamo $X := X_0$ la fibra sopra tale punto. Possiamo interpretare la famiglia $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ come una **deformazione della struttura complessa** di X.
In pratica interpretiamo le fibre $X_b := \pi^{-1}(b)$ con $b \in B$ come deformazione della fibra centrale $X = X_0$.

La mappa dei periodi

Consideriamo una famiglia $\pi\colon \mathcal{X} \to B$.
Ad ogni fibra X_b possiamo associare la struttura di Hodge sulla coomologia k-esima.
Più in dettaglio: ad ogni punto della base associamo il pezzo p-esimo della filtrazione di Hodge

$$b \mapsto F^p H^k(X_b, \mathbb{C}) < H^k(X_b, \mathbb{C}).$$

La mappa dei periodi

Consideriamo una famiglia $\pi \colon \mathcal{X} \to B$.
Ad ogni fibra X_b possiamo associare la struttura di Hodge sulla coomologia k-esima.
Più in dettaglio: ad ogni punto della base associamo il pezzo p-esimo della filtrazione di Hodge

$$b \mapsto F^p H^k(X_b, \mathbb{C}) < H^k(X_b, \mathbb{C}).$$

Per il Teorema di Ehresmann, eventualmente restringendo la base B, otteniamo che lo spazio vettoriale $H^k(X_b, \mathbb{C})$ è isomorfo a $V := H^k(X, \mathbb{C})$, per ogni $b \in B$.
Denotiamo con $b^{p,k}$ la dimensione $\dim_{\mathbb{C}} F^p H^k(X_b, \mathbb{C})$.

La mappa dei periodi

Definizione

La **mappa dei periodi**

$$\mathcal{P}^{p,k}\colon B \to \mathbb{G} = \mathrm{Grass}(b^{p,k}, V)$$

è la mappa che a $b \in B$ associa il sottospazio $F^p H^k(X_b, \mathbb{C})$ di V.

Teorema (P. Griffiths)

La mappa $\mathcal{P}^{p,k}$ è olomorfa per ogni p, k con $p \leq k$.

Mettendo insieme le mappe $\mathcal{P}^{p,k}$ per $p = 1, \ldots, k$, otteniamo una mappa, anch'essa chiamata mappa dei periodi,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{k}\colon B &\to \prod_{p=1}^{k} \mathrm{Grass}(b^{p,k}, V) \\ b &\mapsto (\mathcal{P}^{1,k}(b), \ldots, \mathcal{P}^{k,k}(b)). \end{aligned}$$

Il differenziale della mappa dei periodi

Lo spazio tangente alla varietà Grassmanniana Grass(r, V) in un punto W è $\mathrm{Hom}(W, V/W)$, quindi il differenziale della mappa dei Periodi è:

$$d\mathcal{P}^{p,k} \colon T_{B,b} \to \mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b, \mathbb{C}), H^k(X_b, \mathbb{C})/F^pH^k(X_b, \mathbb{C}))$$

Denotiamo con Θ_X il fascio dei vettori tangenti ad X e con Ω^p_X il fascio delle p-forme olomorfe.

Teorema (P. Griffiths)

Il differenziale della mappa dei periodi $d\mathcal{P}^{p,k}$ assume valori in $\mathrm{Hom}(H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b}))$ ed è dato dalla composizione della mappa di Kodaira-Spencer con la mappa data dal prodotto cup:

$$d\mathcal{P}^{p,k} \colon T_{B,b} \to H^1(X_b, \Theta_{X_b}) \to \mathrm{Hom}(H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b})).$$

La famiglia di Kuranishi

Teorema (M. Kuranishi)

Per ogni varietà complessa compatta X esiste una famiglia $\pi \colon \mathcal{X} \to B$ con $\pi^{-1}(0) = X$ e tale che la mappa di Kodaira-Spencer $T_{B,0} \to H^1(X, \Theta_X)$ è un isomorfismo.

Tale famiglia è detta **famiglia di Kuranishi** di X.
Quindi, per la famiglia di Kuranishi, la prima parte del differenziale della mappa dei periodi è un isomorfismo:

$$d\mathcal{P}^{p,k} \colon T_{B,b} \cong H^1(X_b, \Theta_{X_b}) \to \mathrm{Hom}(H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b})).$$

Problemi di tipo Torelli

Ci sono vari problemi di Torelli:
Il **problema di Torelli globale** indaga l'iniettività della mappa dei periodi, cioè se è possibile ricostruire la struttura complessa della varietà X a partire dalla sua struttura di Hodge.
Il **problema di Torelli generico** indaga l'iniettività generica della mappa dei periodi.
Infine il **problema di Torelli infinitesimale** studia l'iniettività del differenziale della mappa dei periodi per la famiglia di Kuranishi $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ nel punto $0 \in B$.
La teoria dell'aggiunta risulta utile per lo studio di quest'ultimo problema.

Il problema infinitesimale di Torelli: alcuni dettagli

Dobbiamo studiare l'iniettività del differenziale della mappa dei periodi

$$d\mathcal{P}^{p,k}\colon\ T_{B,0} \cong H^1(X,\Theta_X) \to \mathrm{Hom}(H^q(X,\Omega_X^p), H^{q+1}(X,\Omega_X^{p-1})).$$

Poiché la Kodaira-Spencer è un isomorfismo per la famiglia di Kuranishi, è sufficiente far vedere l'iniettività di

$$H^1(X,\Theta_X) \to \mathrm{Hom}(H^q(X,\Omega_X^p), H^{q+1}(X,\Omega_X^{p-1}))$$

per opportuni p e q. D'ora in poi considereremo $q = 0$ e $p = 1$.

Il problema infinitesimale di Torelli: alcuni risultati noti

Nel caso delle curve lisce, il risultato del problema di Torelli è ben noto:

Teorema

Il teorema di Torelli infinitesimale vale per ogni curva liscia C con $g(C)$ pari a $1, 2$ o $g(C) \geq 3$ e C non iperellittica.

In dimensione più alta la situazione non è così chiara: ci sono sia risultati positivi (ipersuperfici lisce dello spazio proiettivo, divisori lisci sufficientemente ampi di una varietà liscia, intersezioni complete) ma anche controesempi (superfici di tipo generale con $H^0(X, \Omega^1_X) = H^0(X, \Omega^2_X) = 0$, prodotto simmetrico di curve iperellittiche).

Interpretazione via estensioni

Definizione

Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli. Una estensione di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$ è una sequenza esatta corta di $\mathcal{O}_X$-moduli

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Se fissiamo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, tutte le classi di isomorfismo di estensioni di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$ formano un gruppo abeliano denotato con $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.
Se i fasci sono localmente liberi e $\mathcal{G}$ è $\mathcal{O}_X$ abbiamo:

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{F}^\vee).$$

Interpretazione via estensioni

Per studiare l'iniettività di

$$H^1(X,\Theta_X) \to \mathrm{Hom}(H^0(X,\Omega^1_X), H^1(X,\mathcal{O}_X))$$

prendiamo un elemento $\xi \in H^1(X,\Theta_X)$. Poiché $H^1(X,\Theta_X) \cong \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X,\mathcal{O}_X)$, ξ è unicamente associato (a meno di isomorfismo) ad una estensione del fascio delle 1-forme olomorfe Ω^1_X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\mathcal{X}|X} \to \Omega^1_X \to 0.$$

Questa sequenza esatta corta dà in coomologia una sequenza lunga

$$\cdots \to H^0(X,\Omega^1_{\mathcal{X}|X}) \to H^0(X,\Omega^1_X) \xrightarrow{\delta_\xi} H^1(X,\mathcal{O}_X) \to \cdots$$

Il problema di Torelli infinitesimale si riduce alla seguente domanda: se l'omomorfismo di cobordo δ_ξ è zero, possiamo dire che $\xi = 0$, cioè che $\Omega^1_{\mathcal{X}|X} = \mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_X$?
In maggior generalità studiamo il problema: sia

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$$

una sequenza esatta di fasci localmente liberi associata ad un elemento $\xi \in H^1(X, \mathcal{F}^\vee)$ tale che la mappa in coomologia

$$H^0(X, \mathcal{F}) \stackrel{\delta_\xi}{\to} H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

sia zero. Cosa possiamo dire di ξ?
La teoria delle **forme aggiunte** è particolarmente adatta per lo studio di tale problema.

Forma aggiunta

Consideriamo una sequenza esatta di fasci localmente liberi su X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Assumiamo che $\mathcal{F}$ sia di rango n e che il nucleo dell'omomorfismo di connessione $\delta_\xi \colon H^0(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ abbia dimensione $\geq n+1$.

Forma aggiunta

Consideriamo una sequenza esatta di fasci localmente liberi su X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Assumiamo che $\mathcal{F}$ sia di rango n e che il nucleo dell'omomorfismo di connessione $\delta_\xi \colon H^0(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ abbia dimensione $\geq n+1$.
Prendiamo un sottospazio $n+1$-dimensionale $W \subset \ker \delta_\xi$ e una base $\mathcal{B} = \{\eta_1, \dots, \eta_{n+1}\}$ di W. Poiché $\eta_1, \dots, \eta_{n+1}$ sono elementi di $\ker \delta_\xi$, dalla sequenza esatta lunga in coomologia

$$\dots \to H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \stackrel{\delta_\xi}{\to} H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \dots$$

possiamo scegliere dei sollevamenti $s_i \in H^0(X, \mathcal{E})$ di η_i, per $i = 1, \dots, n+1$.

Consideriamo il prodotto wedge $s_1 \wedge \ldots \wedge s_{n+1} \in \bigwedge^{n+1} H^0(X, \mathcal{E})$ e chiamiamo Ω la sua immagine in $H^0(X, \det \mathcal{E})$ tramite la mappa naturale

$$\begin{aligned} \bigwedge^{n+1} H^0(X, \mathcal{E}) &\to H^0(X, \det \mathcal{E}) \\ s_1 \wedge \ldots \wedge s_{n+1} &\mapsto \Omega \end{aligned}$$

Poiché $\det \mathcal{E} \cong \det \mathcal{F}$ otteniamo da Ω una sezione globale ω di $\det \mathcal{F}$, che dipende dai sollevamenti scelti e da $\mathcal{B}$.

$$\begin{gathered} H^0(X, \det \mathcal{E}) \cong H^0(X \det \mathcal{F}) \\ \Omega \mapsto \omega \end{gathered}$$

Definizione

Chiamiamo $\omega \in H^0(X, \det \mathcal{F})$ una **forma aggiunta** di $\xi, W, \mathcal{B}$.

Chiamiamo ω_i per $i = 1, \ldots, n+1$ l'immagine di $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\eta_i} \wedge \ldots \wedge \eta_{n+1} \in \bigwedge^n H^0(X, \mathcal{F})$ tramite l'applicazione

$$\bigwedge^n H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \det \mathcal{F}).$$

Chiamiamo $\lambda^n W = \langle \omega_1, \ldots, \omega_{n+1} \rangle < H^0(X, \det \mathcal{F})$ lo spazio vettoriale generato dalle sezioni ω_i.
Denotiamo con D_W e Z_W la parte fissa e il luogo base del sistema lineare $|\lambda^n W|$.

L'espressione locale della forma aggiunta

Sia $U \subset X$ un aperto su cui i fasci $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ della sequenza

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$$

sono banali. Prendiamo generatori $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ di $\mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{E}$ è generato su U da $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, d\epsilon)$. Possiamo scrivere le sezioni η_i

$$\eta_{i|U} = \sum_{j=1}^{n} b_j^i \cdot \sigma_j$$

e

$$s_{i|U} = \sum_{j=1}^{n} b_j^i \cdot \sigma_j + c^i \cdot d\epsilon.$$

Risulta che

$$\omega_{|U} = \begin{vmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 & c^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1^{n+1} & \dots & b_n^{n+1} & c^{n+1} \end{vmatrix} \cdot \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n. \tag{1}$$

e

$$\omega_{i|U} = \begin{vmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{i-1} & \dots & b_n^{i-1} \\ b_1^{i+1} & \dots & b_n^{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n+1} & \dots & b_n^{n+1} \end{vmatrix} \cdot \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$$

L'espressione locale delle sezioni ω_i dà delle entrate della **matrice aggiunta** di (1), questo spiega il nome della teoria.

Il risultato principale

Problema

La forma aggiunta ω appartiene al sottospazio $\lambda^n W = \langle \omega_1, \ldots, \omega_{n+1} \rangle$? Se questo accade, cosa possiamo dire della classe di estensione ξ?

Il risultato principale

Problema

La forma aggiunta ω appartiene al sottospazio $\lambda^n W = \langle \omega_1, \ldots, \omega_{n+1} \rangle$? Se questo accade, cosa possiamo dire della classe di estensione ξ?

Il teorema dell'aggiunta risponde a questo problema:

Teorema (Teorema dell'aggiunta)

Siano ω una forma aggiunta associata al sottospazio $W \subset H^0(X, \det \mathcal{F})$.
Se $\omega \in \lambda^n W$ allora $\xi \in \ker(H^1(X, \mathcal{F}^\vee) \to H^1(X, \mathcal{F}^\vee(D_W)))$.
Viceversa, se ξ sta in questo nucleo e $h^0(X, \mathcal{O}_X(D_W)) = 1$, allora $\omega \in \lambda^n W$.

Corollario

Se $D_W = 0$ abbiamo che $\omega \in \lambda^n W$ se e solo se $\xi = 0$.

Il risultato principale

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hat{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(-D_W) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Ritorniamo al problema di Torelli

Il teorema dell'aggiunta può essere usato per dimostrare il teorema infinitesimale di Torelli in certe classi di varietà. Prendiamo la sequenza

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\mathcal{X}|X} \to \Omega^1_X \to 0$$

e ricordiamo che abbiamo ridotto il problema allo studio della seguente: se la mappa di cobordo δ_ξ è zero, possiamo dire che $\xi = 0$?

Ritorniamo al problema di Torelli

Il teorema dell'aggiunta può essere usato per dimostrare il teorema infinitesimale di Torelli in certe classi di varietà. Prendiamo la sequenza

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\mathcal{X}|X} \to \Omega^1_X \to 0$$

e ricordiamo che abbiamo ridotto il problema allo studio della seguente: se la mappa di cobordo δ_ξ è zero, possiamo dire che $\xi = 0$?

- Scegliamo un sottospazio opportuno $W \subset H^0(X, \Omega^1_X)$ (dato che stiamo assumendo $\delta_\xi = 0$, la sollevabilità delle sezioni η_i è garantita)
- Verifichiamo che ω è un elemento di $\lambda^n W$
- Verifichiamo che $D_W = 0$.

Per il corollario precedente otteniamo che $\xi = 0$.

Esempio di applicazione

Corollario

Sia X una varietà n-dimensionale primitiva di tipo generale tale che $p_g = q = n + 1$. Se Ω^1_X è generato da sezioni globali allora il teorema di Torelli infinitesimale vale per X.

In questo caso

- prendiamo $W = H^0(X, \Omega^1_X)$ $(q = n + 1)$
- ω è un elemento di $\lambda^n W$ perché $\lambda^n W = \langle \omega_1, \dots, \omega_{n+1} \rangle = H^0(X, \omega_X)$ (X è primitiva e $p_g = n + 1$)
- $D_W = 0$ (Ω^1_X è generato dalle sezioni globali).

Quadriche aggiunte

La seguente nozione risulta essere importante per ottenere soluzioni positive al problema infinitesimale di Torelli.

Definizione

Una **quadrica aggiunta** per ω è una quadrica in $\mathbb{P}(H^0(X, \det \mathcal{F})^\vee)$ della forma

$$\omega^2 - \sum L_i \cdot \omega_i,$$

dove ω è una forma aggiunta di $W \subset H^0(X, \mathcal{F})$, le sezioni ω_i sono come sopra e $L_i \in H^0(X, \det \mathcal{F})$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Nel caso di problemi di Torelli in cui $\mathcal{F} = \Omega^1_X$, le quadriche aggiunte sono quadriche nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(H^0(X, \omega_X)^\vee)$. In particolare ci possiamo chiedere che relazione abbiano con l'immagine canonica della varietà X. Risulta che

Teorema

Se non ci sono quadriche aggiunte che svaniscono sull'immagine canonica di X, allora la forma aggiunta ω appartiene al sottospazio generato dalle ω_i, $\lambda^n W$.

Quindi lo studio delle quadriche che passano per l'immagine canonica di X può essere utile per lo studio della condizione

- $\omega \in \lambda^n W$

e quindi anche per la soluzione del problema infinitesimale di Torelli.

Esempi di applicazione

La tecnica delle quadriche aggiunte risulta efficiente nel caso in cui ci siano poche (o meglio ancora nessuna) quadriche che svaniscono sull'immagine canonica di X.

Esempio

L'immagine canonica di X è una ipersuperficie di grado > 2 o una intersezione completa di ipersuperfici di grado > 2.

Esempio

Superfici di Schoen. Una superficie di Schoen ha $p_g = 5$ e $q = 4$. La sua mappa canonica $S \to \mathbb{P}^4$ è un morfismo 2:1 su una superficie che è l'intersezione completa di una quadrica ed una quartica. La sua immagine canonica è singolare con 40 nodi.

È possibile dimostrare che la quadrica che contiene l'immagine canonica di una superficie di Schoen non è una quadrica aggiunta, ottenendo quindi il seguente risultato:

Teorema

Il teorema infinitesimale di Torelli vale per superfici di Schoen.

Con questa tecnica dovrebbe essere possibile studiare altri esempi simili.

È possibile dimostrare che la quadrica che contiene l'immagine canonica di una superficie di Schoen non è una quadrica aggiunta, ottenendo quindi il seguente risultato:

Teorema

Il teorema infinitesimale di Torelli vale per superfici di Schoen.

Con questa tecnica dovrebbe essere possibile studiare altri esempi simili.
Per studiare il problema di Torelli tramite la teoria dell'aggiunta è necessario avere almeno $\dim X + 1$ forme differenziali. Cosa fare se non ci troviamo in questo caso?

Una generalizzazione della teoria

Consideriamo l'estensione

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Se vogliamo applicare la teoria come presentata finora abbiamo bisogno dell'ipotesi $h^0(X, \mathcal{F}) \geq n+1$ dove n è il rango di $\mathcal{F}$. Questo può essere restrittivo.
La prima idea che viene in mente è tensorizzare questa sequenza con un fascio invertibile sufficientemente ampio $\mathcal{L}$ ed ottenere la sequenza

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L} \to 0.$$

Scegliendo $\mathcal{L}$ opportunamente avremo $h^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) \geq n+1$.
Inoltre questa sequenza è ancora associata alla stessa estensione ξ.
Dobbiamo quindi estendere la teoria dell'aggiunta a sequenze esatte in cui il primo fascio non è necessariamente $\mathcal{O}_X$.

Prendiamo la sequenza esatta su X:

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Assumiamo che $\mathcal{F}$ sia di rango n e che il nucleo dell'omomorfismo di connessione $\delta_\xi \colon H^0(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ abbia dimensione $\geq n+1$.

Scegliamo un sottospazio $n+1$-dimensionale $W \subset \ker \delta_\xi$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}\}$. Scegliamo sollevamenti $s_i \in H^0(X, \mathcal{E})$ di η_i, per $i = 1, \ldots, n+1$.

Definizione

La sezione $\Omega \in H^0(X, \det \mathcal{E})$ che corrisponde a $s_1 \wedge \ldots \wedge s_{n+1}$ tramite

$$\bigwedge^{n+1} H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \det \mathcal{E})$$

è detta **forma aggiunta generalizzata**.

Differenze con la teoria classica

- La forma aggiunta ω è un elemento di $H^0(X, \det \mathcal{F})$, la forma aggiunta generalizzata Ω è un elemento di $H^0(X, \det \mathcal{E})$
- Per la teoria classica la giusta condizione da studiare è

  $$\omega \in \lambda^n W,$$

  per la teoria generalizzata invece

  $$\Omega \in \mathrm{Im}\,(H^0(X, \mathcal{L}) \otimes \lambda^n W \to H^0(X, \det \mathcal{E})).$$

Notiamo che se $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, allora $\det \mathcal{F} \cong \det \mathcal{E}$ e $H^0(X, \mathcal{L}) = \mathbb{C}$, quindi la teoria generalizzata si riduce a quella classica.

Il teorema dell'aggiunta generalizzata

Teorema (Dell'aggiunta generalizzata)

Se $\Omega \in \mathrm{Im}\,(H^0(X,\mathcal{L}) \otimes \lambda^n W \to H^0(X, \det \mathcal{E}))$ *allora*

$$\xi \in \ker(H^1(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{L}) \to H^1(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{L}(D_W))).$$

Viceversa assumiamo che ξ *è in questo nucleo e che* $H^0(X,\mathcal{L}) \cong H^0(X,\mathcal{L}(D_W))$, *allora* $\Omega \in \mathrm{Im}\,(H^0(X,\mathcal{L}) \otimes \lambda^n W \to H^0(X, \det \mathcal{E}))$.

Corollario

Se $D_W = 0$ *abbiamo che* $\Omega \in \mathrm{Im}\,(H^0(X,\mathcal{L}) \otimes \lambda^n W \to H^0(X, \det \mathcal{E}))$ *se e solo se* $\xi = 0$.

Applicazioni: ipersuperfici di $\mathbb{P}^n$

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie liscia di grado d definita dal polinomio omogeneo F. Ricordiamo che, dato il polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, l'**ideale Jacobiano** di F è l'ideale $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ generato dalle derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ per $i = 0, \ldots, n$.
Poichè l'anello $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ e l'ideale Jacobiano $\mathcal{J}$ sono graduati, il loro quoziente $R := \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]/\mathcal{J}$, chiamato **anello Jacobiano**, ha una graduazione naturale. Denotiamo con R^k gli elementi di grado k.

Il differenziale della mappa dei periodi per ipersuperfici

Proposizione

Se $n \geq 4$ o $n = 3$ e $d \neq 4$ c'è un isomorfismo

$$H^1(X, \Theta_X) \cong R^d.$$

Inoltre per ogni p

$$H^{n-p,p-1}(X) \cong R^{dp-n-1}.$$

Una deformazione infinitesima $\xi \in H^1(X, \Theta_X)$ è data da una classe $[G] \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J}$ dove G è un polinomio omogeneo di grado d. Intuitivamente, la famiglia di deformazione data da $[G]$ ha equazione $F + tG = 0$. Per $t = 0$ otteniamo la varietà X di partenza e per $t \neq 0$ sufficientemente piccolo abbiamo una nuova ipersuperficie liscia di $\mathbb{P}^n$ che è una deformazione di X.

P. Griffiths ha dimostrato che:

Teorema

Grazie alle identificazioni precedenti, il differenziale della mappa dei periodi

$$H^1(X, \Theta_X) \to \mathrm{Hom}(H^{n-p,p-1}(X), H^{n-p-1,p}(X))$$

è data dalla moltiplicazione polinomiale

$$R^d \to \mathrm{Hom}(R^{dp-n-1}, R^{d(p+1)-n-1}).$$

Ciò significa che il problema infinitesimale di Torelli è ricondotto al livello di polinomi.

Il teorema di Macaulay

Teorema (Macaulay)

Dati due interi a, b *tali che* $b \geq 0$ *e* $a + b \leq (n+1)(d-2)$*, la mappa data dal prodotto*

$$R^a \to \mathrm{Hom}(R^b, R^{a+b})$$

è iniettiva.

Questo risultato permette di dimostrare il teorema di Torelli infinitesimale per ipersuperfici lisce.

Aggiunta generalizzata e Torelli infinitesimale

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ Una ipersuperficie liscia definita da un polinomio omogeneo $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ di grado $\deg F = d$. Una deformazione infinitesimale $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ di X dà una sequenza esatta per il fascio di forme differenziali Ω^1_X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\mathcal{X}|X} \to \Omega^1_X \to 0. \tag{2}$$

Assumiamo che $n \geq 3$, quindi $H^0(X, \Omega^1_X) = 0$ e non possiamo applicare direttamente la teoria della forma aggiunta classica. Come abbiamo visto l'idea è di tensorizzare (2) per un intero a in modo che $\Omega^1_X(a)$ abbia almeno n sezioni globali. Non è difficile vedere che $a = 2$ è sufficiente.
L'aggiunta generalizzata funziona perfettamente con la sequenza

$$0 \to \mathcal{O}_X(2) \to \Omega^1_{\mathcal{X}|X}(2) \to \Omega^1_X(2) \to 0.$$

Usando l'aggiunta generalizzata otteniamo il seguente risultato.

Teorema

Per una ipersuperficie liscia X di grado d in $\mathbb{P}^n$ con $n \geq 3$ e $d > 3$ le seguenti sono equivalenti:

- i) *Il differenziale della mappa dei periodi è zero sulla deformazione infinitesima $[G] \in R^d \cong H^1(X, \Theta_X)$*
- ii) *G è un elemento dell'ideale $\mathcal{J}$*
- iii) *$\Omega \in \operatorname{Im}(H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) \otimes \lambda^n W \to H^0(X, \mathcal{O}_X(n+d-1)))$ per la generica aggiunta generalizzata Ω*
- iv) *La generica aggiunta generalizzata Ω appartiene all'ideale $\mathcal{J}$.*

Questo teorema è il teorema infinitesimale di Torelli per ipersuperfici proiettive riformulato nel linguaggio della teoria delle forme aggiunte. Un risultato simile vale anche per divisori ampi sufficientemente lisci di una varietà razionale omogenea con numero di Picard pari a uno.

Il teorema dell'aggiunta per curve Gorenstein

La teoria dell'aggiunta può essere estesa anche a varietà singolari.
Il caso che consideriamo è quello di una **curva Gorenstein**.

Definizione

Una curva di Gorenstein è una curva proiettiva C tale che il fascio dualizzante ω_C è invertibile.

Possiamo estendere la teoria dell'aggiunta a curve Gorenstein irriducibili.
Consideriamo una sequenza di fasci localmente liberi

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$$

con $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$ di rango 1.

Il problema principale

Sia $\delta_\xi \colon H^0(C, \mathcal{F}) \to H^1(C, \mathcal{L})$ il suo omomorfismo di connessione, e sia $W \subset \ker \delta_\xi$ un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Scegliamo una base $\mathcal{B} := \{\eta_1, \eta_2\}$ di W. Possiamo scegliere sollevamenti $s_1, s_2 \in H^0(C, \mathcal{E})$ delle sezioni η_1, η_2. Consideriamo il luogo base di W. Consiste di un numero finito di punti lisci e singolari. Denotiamo con D_W il divisore di Cartier associato ai punti lisci nel luogo base e con $\mathcal{I}_W$ l'ideale dei punti singolari. L'ideale $\mathcal{I}_W$ è un **divisore effettivo generalizzato** sulla curva C.

Una nuova definizione di aggiunta

Proposizione

Abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^\vee(D_W)\otimes\mathcal{I}_W^{-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\omega"] & W\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, "(s_1,s_2)"] & \mathcal{F}(-D_W)\otimes\mathcal{I}_W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

che può essere completato con una mappa $\omega \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\vee(D_W)\otimes\mathcal{I}_W^{-1},\mathcal{L})$.

Definizione

Il morfismo $\omega \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\vee(D_W)\otimes\mathcal{I}_W^{-1},\mathcal{L})$ è detto aggiunto di W e ξ.

Una nuova definizione di aggiunta

Nel caso liscio il diagramma è

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^\vee(D_W) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & W \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, "(s_1, s_2)"] & \mathcal{F}(-D_W) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e la prima freccia verticale è data per contrazione con l'aggiunta generalizzata $\Omega \in H^0(X, \det \mathcal{E})$.
Nel caso singolare studiamo la condizione $\omega \in \mathrm{Im}\, \Phi_{\mathcal{B}}$ dove

$$\Phi_{\mathcal{B}} \colon \mathrm{Hom}(W \otimes \mathcal{O}_C, \mathcal{L}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\vee(D_W) \otimes \mathcal{I}_W^{-1}, \mathcal{L}).$$

Una nuova definizione di aggiunta

Nel caso liscio il diagramma è

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^\vee(D_W) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & W \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, "{(s_1,s_2)}"] \arrow[dl] & \mathcal{F}(-D_W) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e la prima freccia verticale è data per contrazione con l'aggiunta generalizzata $\Omega \in H^0(X, \det \mathcal{E})$.
Nel caso singolare studiamo la condizione $\omega \in \mathrm{Im}\, \Phi_{\mathcal{B}}$ dove

$$\Phi_{\mathcal{B}} \colon \mathsf{Hom}(W \otimes \mathcal{O}_C, \mathcal{L}) \to \mathsf{Hom}(\mathcal{F}^\vee(D_W) \otimes \mathcal{I}_W^{-1}, \mathcal{L}).$$

Teorema dell'aggiunta per curve Gorenstein

Teorema

Sia C una curva Gorenstein irriducibile. Siano $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ fasci invertibili su C. Consideriamo $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ associata all'estensione $0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$.
Abbiamo che $\omega \in \mathrm{Im}\,\Phi_{\mathcal{B}}$ se e solo se ξ è nel nucleo di $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{L}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(-D_W) \otimes \mathcal{I}_W, \mathcal{L})$.

Come applicazione abbiamo

Teorema

Sia C una curva di Gorenstein irriducibile di genere 2 o non iperellittica di genere ≥ 3, $\xi \in H^1(C, \omega_C^\vee)$ tale che $\delta_\xi = 0$. Allora $\xi = 0$.

Questo teorema è sostanzialmente il teorema di Torelli infinitesimale per deformazioni di curve Gorenstein che non rimuovono le singolarità.
Infatti abbiamo la sequenza esatta

$$0 \to H^1(C, \mathcal{H}om(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C)) \to \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C) \to R \to 0.$$

Questa sequenza ci dice che ci sono due tipi di deformazioni al primo ordine di C. Quelle che vengono da R sono quelle che rimuovono le singolarità.
D'altra parte le deformazioni di

$$H^1(C, \mathcal{H}om(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C))$$

sono localmente banali intorno ad i punti singolari.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE