Connessioni logaritmiche e algebroidi di Atiyah

Pietro Tortella

Université d'Angers

Abstract

Sia X una varietà complessa, e D un divisore in X. Denotiamo con T_X il fibrato tangente (olomorfo) di X, con Ω^1_X il fascio delle uno forme olomorfe e con Ω^p_X il p-esimo prodotto esterno di Ω^1_X. Il fascio delle *p-forme logaritmiche* su (X, D) è il $\mathcal{O}_X$-modulo $\Omega^p_X(\log D)$, definito come il sottofascio di $\Omega^p_X(D)$ che consiste delle forme α tali che $d\alpha \in \Omega^{p+1}_X(D)$. Se D è un divisore a incroci normali, $\Omega^1_X(\log D)$ è $\mathcal{O}_X$-localmente libero, e $\Omega^p_X(\log D)$ coincide con il p-esimo prodotto esterno di $\Omega^1_X(\log D)$.

Una *connessione logaritmica* su (X, D) è una coppia (E, ∇), con E un fibrato vettoriale olomorfo su X e ∇ una applicazione

$$\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_X(\log D)$$

che soddisfi la regola di Leibniz $\nabla(fs) = f\nabla s + s \otimes df$, e la condizione di integrabilità $\nabla \circ \nabla = 0$.

Questi oggetti giocano un ruolo fondamentale nella comprensione della geometria delle varietà non compatte. Un problema classico, noto come *specializzazione*, è capire la struttura della restrizione di una connessione logaritmica al divisore D dove presenta i poli. Spostando l'attenzione sugli algebroidi di Lie associati, mostreremo un nuovo approccio a questo problema.

Infatti, una struttura di connessione logaritmica è equivalente alla struttura di $T_X(-\log D)$-modulo visto come algebroide di Lie, dove $T_X(-\log D)$ è il fascio dei campi vettori su X tangenti al divisore D. A questo punto, l'osservazione è che la restrizione $L_N := (T_X(-\log D))_{|D}$ ha a sua volta una struttura di algebroide di Lie.

Mostreremo che L_N è isomorfo all'algebroide di Atiyah di $N_{D/X}$, il normale di D in X. Questo ci dà un morfismo di specializzazione dalla categoria delle connessioni logaritmiche alla categoria degli L_N-moduli. Inoltre mostreremo che questa restrizione determina univocamente la connessione logaritmica in un intorno di D in X, dimostrando una equivalenza tra questi oggetti, che può essere interpretata come una corrispondenza di Riemann-Hilbert.