CONNESSIONI LOGARITMICHE e ALGEBROIDI di ATIYAH

X varietà complessa (analitica o algebrica) liscia

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Rappresentazioni}\\ \pi_1(X) \to GL(V)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Connessioni piatte}\\ \text{su } X \text{ di}\end{array}\right\}$$

• V sp. v. f. dim

rango = dim V

Ω_X 1-forme olom.

$\rho : \pi_1(X) \to GL(V)$

(E, ∇) $\quad E$ $\mathcal{O}_X$-modulo coerente (loc. libero)

$\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega_X \longrightarrow E \otimes \Omega_X^2$

$\nabla(fs) = f\nabla s + s \otimes df \quad \forall f \in \mathcal{O}_X,\ s \in E$

topologica $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{c}\text{Sistemi locali}\\ \text{su } X \text{ con fibra } V\end{array}\right\}$

$\nabla^2 = 0$

fascio localmente costante = V
$\exists\, U_i$ ric.
$L(U_i) \simeq V$

$(E, \nabla) \longmapsto E^{\nabla} = \{ s \mid \nabla s = 0 \}$

$E = L \otimes \mathcal{O}_X \longleftarrow\!\shortmid L$

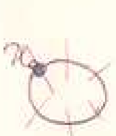
$\nabla(s \otimes f) = s \otimes df$

$\rho : \pi_1(X) \to GL(V)$

L sistema locale

$\hat{X}$ universal cover

γ cappio in X



$L|_\gamma \leftarrow L|_{\gamma_i} \qquad \gamma_i = \gamma \cap U_i$

$\gamma \rightsquigarrow \rho(\gamma) \in \mathrm{Aut}(L_{x_0}) = GL(V)$

$\hat{X} \downarrow X \qquad \pi_1(X)$

$\hat{X} \times V / \sim$ discende ad un sistema locale su X

DELIGNE

$D \subseteq X$ divisore (liscio vale = per snc / irriducibile)

Rappr.

$\pi_1(X \setminus D) \longrightarrow GL(V) \rightsquigarrow (E_U, \nabla_U)$ connessione piatta su U

$U = X \setminus D$

$\boxed{\text{CONNESSIONI LOGARITMICHE}}$

~~Supponiamo~~ Prendiamo coord. $x_1, \dots, x_{n-1}, t$ di X t.che $D = \{t = 0\}$

$$\Omega_X(\log D) \underset{loc.}{=} \mathcal{O}_X \langle dx_1, \dots, dx_{n-1}, \frac{dt}{t} \rangle$$

$$= \{ \alpha \in \Omega_X(D) \mid d\alpha \in \Omega^2_X(D) \} \qquad \Omega^p_X(\log D) = \Lambda^p \Omega_X(\log D)$$

D ha snc $\Rightarrow$ loc. free

$\left(\cancel{R^i\ \Omega^p_X(\log D) \to \Omega^{p-1}_{D_i}} \right)$

$$R : \Omega^p_X(\log D) \longrightarrow \Omega^{p-1}_D$$

$$\text{loc. } \eta = \eta_0 + \eta_n \wedge \frac{dt}{t} \qquad R(\eta) = \eta_n|_D$$

Connessione logaritmica

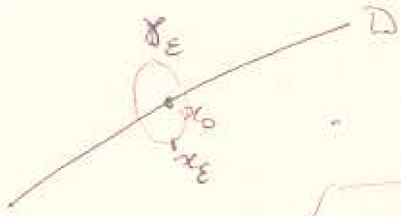
(E, ∇) con E f. vett. $/X$

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega_X(\log D) \qquad \nabla(fs) = f\nabla s + s\,df$$

$$\nabla^2 = 0$$

$$\mathrm{Res}_D \nabla = \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \otimes \Omega_X(\log D) \\ \downarrow & & \downarrow R \\ E|_D & \xrightarrow{\Delta} & E|_D \end{array} \quad \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(E|_D)$$

(E,∇) conn. logaritmica $\Rightarrow$ $(E_U, \nabla_U) = (E,\nabla)|_U$ è conn piatta



$\gamma_\varepsilon \rightsquigarrow \pi_1(U) \rightsquigarrow T_\varepsilon \in \mathrm{Aut}\, E_{x_\varepsilon}$

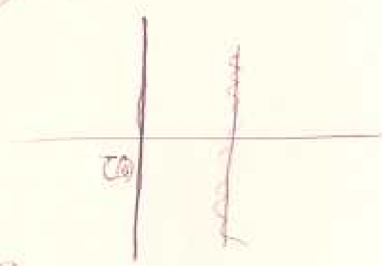
$\boxed{\text{PROP}}$ Per $\varepsilon \to 0$

$T_\varepsilon \longrightarrow T_0 \in \mathrm{Aut}\, E_{x_0}$ (può essere non ~ non ha la stessa partess)

e $T_0 = \exp(2\pi i \,\mathrm{Res}_D \nabla)$

$\boxed{\text{THM (Deligne)}}$ $\forall\, \tau : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ splitting di $\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ scelta di un logaritmo $\log_\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$



Dato (E_U, ∇_U) connessione piatta su U

$\exists!$ $(E^{(\tau)}, \nabla^{(\tau)})$ connessione logaritmica

- $(E^{(\tau)}, \nabla^{(\tau)})|_U = (E_U, \nabla_U)$
- $\mathrm{Res}_D \nabla^{(\tau)}$ ha autovalori in $\mathrm{Im}\,\tau$

$\tau(0) = 0 \rightsquigarrow$ canonical extension

PROBLEMA Capire che struttura ha $(E,\nabla)|_D$ (SPECIALIZZAZIONE)

NITSURE - SABBAH

Connessioni piatte — sono un T_X-modulo $\mathcal{O}_X$-loc. libero

$\uparrow$ tangente come algebroide di Lie

Connessioni logaritmiche — sono un $T_X(-\log D)$-modulo $\mathcal{O}_X$-loc. libero

$$T_X(-\log D) = \Omega_X(\log D)^{\vee} \qquad \Omega_X \hookrightarrow \Omega_X(\log D)$$

$$= \mathcal{O}_X\langle \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{n-1}}, t\cdot\partial_t\rangle \qquad T_X(-\log D) \hookrightarrow T_X$$

$$= \{ v \in T_X \mid v I_D \subseteq I_D \}$$ = campi vettoriali su X che diventano tangenti a D

($T_X = \mathrm{Der}\,\mathcal{O}_X$)

$$[T_X(-\log D), T_X(-\log D)] \subseteq T_X(-\log D) \qquad 0 \to T_X(-\log D) \to T_X \to N_{D/X} \to 0$$

$\to$ è sotto-algebroide di Lie del T_X

OSSERVAZIONE (SIMPSON)

$T_X(-\log D)|_D$

ha una struttura di algebroide.

$$\boxed{T_X(-\log D)|_D \simeq At_{N_{D/X}}}$$

ALGEBROIDE di LIE

$(L, \#, [\cdot,\cdot])$

L $\mathcal{O}_X$-loc. libero

$\# : L \to T_X$

$[\cdot,\cdot]$ parentesi $\mathbb{C}_X$-Lie

comp. con $\#$

$[u, fv] = f[u,v] + \#(u)(f)v$

At_V V fibrato vettoriale su X

$\shortparallel$ { op. diff. ≤ 1 ordine, con simbolo scalare }

$\shortparallel$ $\{ D : V \to V \ \mathbb{C}_X\text{-lineari} \mid \exists\, \sigma_D \in T_X \text{ t.che } D(fs) = f Ds + \sigma_D(f)\cdot s \}$

$$\boxed{0 \to End_{\mathcal{O}_X} V \to At_V \xrightarrow{\sigma} T_X \to 0}$$

$[\cdot,\cdot]$ commutatore di op. diff.

V di rango 1

$$0 \to \mathcal{O}_X \to At_V \to T_X \to 0$$

classificati dal $F^1H^2(X;\mathbb{C})$

$$\boxed{At_V \leftrightarrow c_1(V) \in H^2(X;\mathbb{C})}$$

$$0 \to T_X(-\log D) \to T_X \to N_{D/X} \to 0$$

$$0 \to T_D \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_D \to T_X(-\log D)|_D \to T_X|_D \to N_{D/X} \to 0$$

$\shortparallel$

$\boxed{At_{N_{D/X}}}$ $\rightsquigarrow$ definisce un azione di $T_X(-\log D)|_D$ sul $N_{D/X}$

~~[illegible]~~

{ Connessioni logaritmiche } $\Longrightarrow$ $\longleftarrow$ { Algebroidi di Atiyah }

Y varietà e $N \xrightarrow{p} Y$ fibrato in rette

$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{R} At_N \to T_Y \to 0$

Capire At_N - moduli $\mathcal{O}_Y$ - loc. liberi

PROP:

1) M è At_N - modulo $\to$ $\underline{c}(N)$ divide le classi caratteristiche di M

2)

$$\begin{tikzcd} At_N \otimes M \arrow[r, "\nabla"] & M \\ \mathcal{O}_Y \otimes M \arrow[u] \arrow[ur, "\nabla_R \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_Y} M"'] & \end{tikzcd}$$

$\lambda_i(y)$ autovalori di $\nabla_R(y) \in \mathrm{End}\, M(y)$

$\Rightarrow$ SONO COSTANTI λ_i

$\Rightarrow$ $\bigoplus_\lambda M_\lambda = M$ decomp. in autofibrati per ∇_R

M_λ sono sotto At_N - moduli

$\Rightarrow$ $M = \bigoplus_\lambda M_\lambda$ decomp. as At_N - moduli

3)

i) ogni T_Y - modulo è At_N - modulo con $\nabla_R = 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_Y$ è At_N-modulo

ii) N e $N^{\otimes a}$ $a \in \mathbb{Z}$ sono At_N - modulo e $\nabla_R^{N^{\otimes a}} = a \cdot \mathbb{1}$

iii) M, M' At_N - moduli $\Rightarrow$ $M \otimes M'$ lo è e $\nabla_R^{M \otimes M'} = \nabla_R^M \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \nabla_R^{M'}$

$\Rightarrow$ $M \otimes N^a$ e avrò $\nabla_R^{M \otimes N^a} = \nabla_R^M + a \cdot \mathbb{1}$

LEMMA $p^* At_N \simeq T_N(-\log Y)$

$\hookrightarrow$ p^*M è $T_N(-\log Y)$-modulo

M At_N-modulo,

$\hookrightarrow$ $p^*M|_{N\setminus Y}$ è conn. piatta su $N \setminus Y$

$\hookrightarrow$ Rappresentazioni del $\boxed{\pi_1(N\setminus Y) = \pi_1(B)}$ S^1-bundle

CARATTERIZZARE i At_N-moduli con la stessa info topologica

- Possiamo supporre che M ha un solo autoval. per ∇_R

Fissiamo un τ (per esempio $[0,1) \times \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$)

Allora da M

$\exists\, a$ t.c. $M \otimes N^{\otimes a}$ ha autoval. in $[0,1) \times \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$ ∇_R con

THM

$M \sim M'$

sse

$M' = M \otimes N^{\otimes a}$ per q.che $a \in \mathbb{Z}$

$M = \mathcal{O}_Y$
$= N$ hanno stessa monodromia = banale