Numeri di Betti Multi-graduati e applicazioni alla TDA

Martina Scolamiero

KTH, Stoccolma

5 Giugno 2014

Scaletta

- Proprietá omologiche di funtori $F : \mathbb{N}^r \to Vect$.

Scaletta

- Proprietá omologiche di funtori $F : \mathbb{N}^r \rightarrow Vect$.
- Calcolo locale dei numeri di Betti multigraduati.

Scaletta

- Proprietá omologiche di funtori $F : \mathbb{N}^r \to Vect$.
- Calcolo locale dei numeri di Betti multigraduati.
- Omologia Multipersistente.

Scaletta

- Proprietá omologiche di funtori $F : \mathbb{N}^r \to Vect$.
- Calcolo locale dei numeri di Betti multigraduati.
- Omologia Multipersistente.
- Numeri di Betti di un point cloud.

Scaletta

- Proprietá omologiche di funtori $F : \mathbb{N}^r \rightarrow Vect$.
- Calcolo locale dei numeri di Betti multigraduati.
- Omologia Multipersistente.
- Numeri di Betti di un point cloud.
- Presentazione di un modulo di omologia multipersistente.

Definizioni

- $\mathbb{N}^r$ categoria associata al poset $(\mathbb{N}^r, \leq)$ con $v \leq w \iff v_i \leq w_i \quad i : 1 \ldots r.$

Definizioni

- $\mathbb{N}^r$ categoria associata al poset $(\mathbb{N}^r, \leq)$ con $v \leq w \iff v_i \leq w_i \quad i : 1 \ldots r$.
- k campo, $Vect_k$ categoria k-spazi vettoriali.

Definizioni

- $\mathbb{N}^r$ categoria associata al poset $(\mathbb{N}^r, \leq)$ con $v \leq w \iff v_i \leq w_i \quad i : 1 \dots r.$
- k campo, $Vect_k$ categoria k-spazi vettoriali.
- $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$ categoria oggetti: funtori

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{N}^r & \longrightarrow & Vect_k \\ v & \to & F(v) \\ v \leq w & \to & F(v \leq w) : F(v) \to F(w) \end{array}$$

morfismi: trasformazioni naturali $N : F \to G$

$$N = \{N(v) : F(v) \to G(v)\}_{v \in \mathbb{N}^r} \text{ t.c } \begin{tikzcd} F(v) \arrow[r] \arrow[d] & G(v) \arrow[d] \\ F(w) \arrow[r] & G(w) \end{tikzcd} \quad \forall v \leq w$$

Funtore $\mathrm{N}^2 \to Vect_k$

Un funtore $F : \mathbb{N}^2 \to Vect_k$ é una rappresentazione del quiver

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} & & {} & \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \dots & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \dots & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \dots \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \dots & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

con relazione di commutativitá sui quadrati.

Funtori Semi-semplici

Definizione

Un funtore $F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é semi-semplice *se*
$F(v < w) = 0 \quad \forall v < w.$

$$
\begin{tikzcd}
U_v : & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \\
 & 0 \arrow[r] & v \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Definizione

Un funtore semi-semplice ha rango finito *se*

- $F(v) \neq 0$ *per un numero finito di indici*
- $dim_k F(v) < \infty$

Radicale

$\forall v \in \mathbb{N}^r$, $radF(v) \subseteq F(v)$ generato da $\bigcup_{u<v} Im\, F(u<v)$.

$$F(u<v)(radF(u)) \subset radF(v)$$

$radF : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é un sottofuntore di F.

Radicale

$\forall v \in \mathbb{N}^r$, $radF(v) \subseteq F(v)$ generato da $\bigcup_{u<v} Im\, F(u<v)$.

$$F(u<v)(radF(u)) \subset radF(v)$$

$radF : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é un sottofuntore di F.

Osservazione

$F/radF$ é semisemplice.

Definizione

Un funtore $F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ ha rango finito se $F/radF$ ha rango finito.

Funtori Compatti

Caratterizzazione di oggetti compatti in $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Il funtore $F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é compatto in $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$.
- F ha rango finito
- $F(v)$ ha dimensione finita $\forall v \in \mathbb{N}^r$.
  Esiste un indice $n \in \mathbb{N}$ t.c per ogni $v = (v_1 \dots v_r)$ l'omomorfismo $F(min(n, v_1), \dots, min(n, v_r) \leq v)$ é un isomorfismo.

Definizioni

$K(v, -) : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é t.c $F(w) = k$ se $w \geq v$ e $F(w) = 0$ altrimenti.

Definizione

Sia S un insieme di oggetti in $\mathbb{N}^r$ e $\{V_v\}_{v \in S}$ una famiglia di spazi vettoriali. Funtori del tipo $F = \oplus_{v \in S} K(v, -) \otimes V_v$ sono detti liberi.

Se F é libero, $F/radF \simeq \oplus_{v \in S} U(v) \otimes V_v$

Definizione

Una trasformazione naturale $\phi : F \to G$ é minimale se F é libero e il morfismo indotto $F/radF \to G/radG$ é un isomorfismo.

Risoluzione Minimale

Costruiamo una risoluzione proiettiva minimale di $G : \mathbb{N}^r \to Vect_k$.

- $G/radG$ é semisemplice e quindi isomorfo a $\oplus_{v \in S_0} U(v) \otimes V_{v,0}$

Risoluzione Minimale

Costruiamo una risoluzione proiettiva minimale di $G : \mathbb{N}^r \to Vect_k$.

- $G/radG$ é semisemplice e quindi isomorfo a $\oplus_{v \in S_0} U(v) \otimes V_{v,0}$
- Sia $F_0 := \oplus_{v \in S_0} K(v,-) \otimes V_{v,0}$.
  $F_0/radF_0 \simeq G/radG$.
  Inoltre F_0 é proiettivo, esiste trasformazione naturale
  $\phi : F_0 \to G$ t.c il diagramma é commutativo

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ F_0/radF_0 \arrow[r, "\simeq"] & G/radG \end{tikzcd}$$

Costruiamo una risoluzione proiettiva minimale di $G : \mathbb{N}^r \to Vect_k$.

- $G/radG$ é semisemplice e quindi isomorfo a $\oplus_{v \in S_0} U(v) \otimes V_{v,0}$
- Sia $F_0 := \oplus_{v \in S_0} K(v,-) \otimes V_{v,0}$.
  $F_0/radF_0 \simeq G/radG$.
  Inoltre F_0 é proiettivo, esiste trasformazione naturale
  $\phi : F_0 \to G$ t.c il diagramma é commutativo

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ F_0/radF_0 \arrow[r, "\simeq"] & G/radG \end{tikzcd}$$

- $K_0 = \ker \phi$. Calcoliamo $K_0/radK_0$..

Dato un funtore $G : \mathbb{N}^2 \to Vect_k$,

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\dots \arrow[r] & G(v_1) \arrow[r] \arrow[u] & G(v) \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
\dots \arrow[r] & G(v_{1,2}) \arrow[r] \arrow[u] & G(v_2) \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

funtorialmente ogni quadrato definisce un chain complex

$$C_{G,v} : G(v_{1,2}) \to G(v_1) \oplus G(v_2) \to G(v).$$

Teorema

Sia $0 \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to G \to 0$ *una risoluzione minimale di* G *nella categoria* $Fun(\mathbb{N}^2, Vect_k)$*, allora*
$\frac{F_i}{radF_i}(v) = H_i(C_{G,v}) \quad i : 0 \ldots 2.$

$$\begin{tikzcd}
G(v_1) \arrow[r] & G(v) \\
G(v_{1,2}) \arrow[u] \arrow[r] & G(v_2) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione

Sketch della dimostrazione

- L'omologia di un funtore libero é concentrata in grado 0 e multigrado $w \in S$.

Dimostrazione

Sketch della dimostrazione

- L'omologia di un funtore libero é concentrata in grado 0 e multigrado $w \in S$.
- Il funtore $\mathcal{F} : Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k) \to Fun(\mathbb{N}^r, Ch)$ é esatto.

Dimostrazione

Sketch della dimostrazione

- L'omologia di un funtore libero é concentrata in grado 0 e multigrado $w \in S$.
- Il funtore $\mathcal{F} : Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k) \to Fun(\mathbb{N}^r, Ch)$ é esatto.
- Usando l'immagine in $Fun(\mathbb{N}^r, Ch)$ di sequenze esatte corte del tipo $0 \to K_0 \to F_0 \to G \to 0$ otteniamo la formula ricorsiva:

$$H_j(C_{G,w}) \simeq H_0(C_{K_{(j-1)},w}) \simeq \frac{K_{j-1}}{radK_{j-1}}(w) \simeq \frac{F_j}{radF_j}(w) \quad j : 1 \ldots r.$$

Moduli Multigraduati

k campo, $\quad R := k[x_1 \dots x_r], \quad Mod_R \rightsquigarrow R$-moduli graduati da $\mathbb{N}^r$.

Theorem

Le categorie $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$ e Mod_R sono isomorfe.

Moduli Multigraduati

k campo, $\quad R := k[x_1 \dots x_r], \quad Mod_R \rightsquigarrow R$-moduli graduati da $\mathbb{N}^r$.

Theorem

Le categorie $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$ e Mod_R sono isomorfe.

- Ad $F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ associamo lo spazio vettoriale

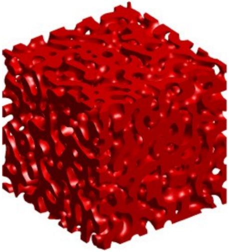
$$F = \bigoplus_{v \in \mathbb{N}^r} F(v)$$

con azione di R data da:

$$\begin{array}{rcl} \cdot x_i : F(v) & \longrightarrow & F(v + e_i) \\ m & \to & F(v < v + e_i)(m) \end{array}$$

Persistent Homology

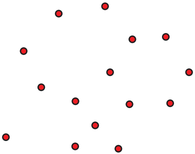
Introdotta da Carlsson, Zomorodian, Ghrist, De Silva, Edelsbrunner etc..('02)



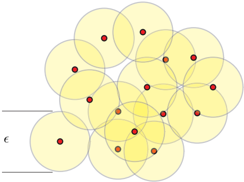
Usata per analizzare la forma di un point cloud. Implementata (Plex, jPlex, Java Plex, Dionysus).

RIPS-VIETORIS COMPLEX

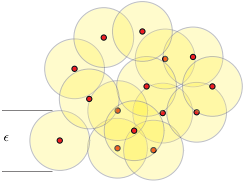
Dato un point cloud

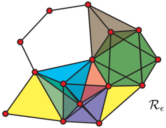


- Associamo ad ogni punto p una sfera $D(p, \epsilon)$ di raggio ϵ

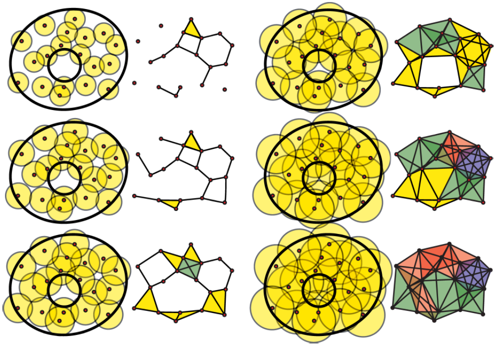


- Costruiamo un grafo:
  vertici $\rightsquigarrow$ punti del point cloud e lati $\rightsquigarrow$ intersezione di sfere.
- Costruiamo il clique complex:
  una k clique corrisponde ad un $k-1$ simplesso.



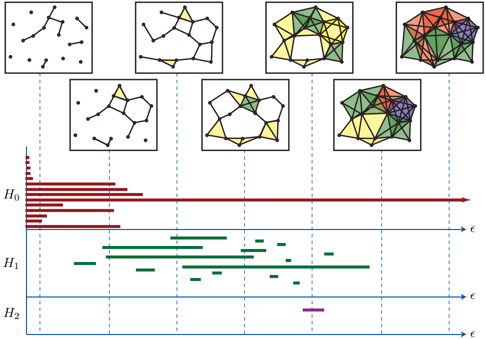


Al crescere di ϵ otteniamo una filtrazione.



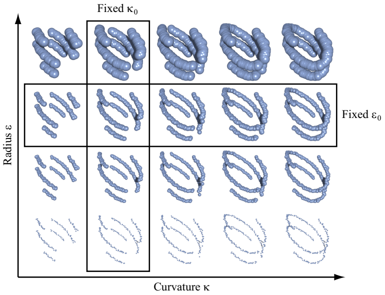
Omologia Persistente

L'Omologia Persistente confronta l'omologia simpliciale dei complessi nella filtrazione, cercando generatori persistenti.



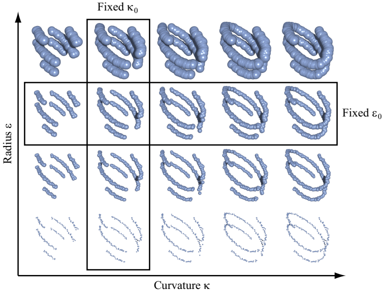
Multidimensional Persistence

Generalizzazione dell'omologia persistente in cui si studia l'omologia di una multi-filtrazione.



Multidimensional Persistence

Generalizzazione dell'omologia persistente in cui si studia l'omologia di una multi-filtrazione.



Introdotta da Carlsson e Zomorodian ('09)
Finora nessuna implementazione.

Bi-filtrazione

- Serie temporale, (t, ϵ).
  Point cloud che cresce nel tempo.

Bi-filtrazione

- Serie temporale, (t, ϵ).
  Point cloud che cresce nel tempo.

- Densitá/Distanza, (N, ϵ).

  Densitá $\sim$ distanza dal $k-$esimo vicino.
  Aggiungiamo i top N% punti con densitá piú alta.

Bi-filtrazione

- Serie temporale, (t, ϵ).
  Point cloud che cresce nel tempo.

- Densitá/Distanza, (N, ϵ).

  Densitá $\sim$ distanza dal $k-$esimo vicino.
  Aggiungiamo i top N% punti con densitá piú alta.

  (P_1, P_2) é un lato $\iff$ ci sono almeno N punti nell'intersezione delle sfere di raggio ϵ.

Bi-filtrazione

- Serie temporale, (t, ϵ).
  Point cloud che cresce nel tempo.

- Densitá/Distanza, (N, ϵ).

  Densitá $\sim$ distanza dal $k-$esimo vicino.
  Aggiungiamo i top N% punti con densitá piú alta.

  (P_1, P_2) é un lato $\iff$ ci sono almeno N punti nell'intersezione delle sfere di raggio ϵ.

- Due metriche, (ϵ_1, ϵ_2).
  (P_1, P_2) é un lato $\iff$ $d_1(P_1, P_2) \leq \epsilon_1$ e $d_2(P_1, P_2) \leq \epsilon_2$.

Omologia Multipersistente

Una multi-filtrazione é un funtore

$$\begin{array}{rcl} M : \mathbb{N}^r & \longrightarrow & SC \\ v & \rightarrow & M(v) \\ v \leq w & \rightarrow & M(v) \subseteq M(w) \end{array}$$

Omologia Multipersistente

Una multi-filtrazione é un funtore

$$\begin{array}{rcl} M : \mathbb{N}^r & \longrightarrow & SC \\ v & \to & M(v) \\ v \leq w & \to & M(v) \subseteq M(w) \end{array}$$

L'omologia multipersistente di M é il funtore

$$\begin{array}{rcl} H_n \circ M : \mathbb{N}^r & \longrightarrow & Vect_k \\ v & \to & H_n(M(v)) \\ v \leq w & \to & H_n(M(v)) \to H_n(M(w)) \end{array}$$

Esempi di Betti numbers di $H_0(M)$

U insieme di punti in $\mathbb{R}^2$.

Due vertici $P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2)$ sono connessi da un lato in $M(\epsilon_1, \epsilon_2) \iff |x_1 - x_2| < \epsilon_1$ e $|y_1 - y_2| < \epsilon_2$.

Esempi di Betti numbers di $H_0(M)$

U insieme di punti in $\mathbb{R}^2$.

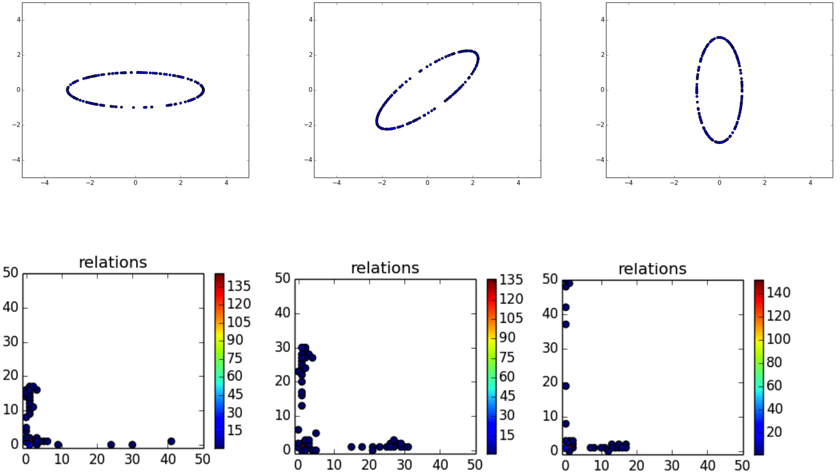
Due vertici $P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2)$ sono connessi da un lato in $M(\epsilon_1, \epsilon_2) \iff |x_1 - x_2| < \epsilon_1$ e $|y_1 - y_2| < \epsilon_2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & (B, d_1) \\
(C, d_2) &
\end{tikzcd}$$

$P_1 \sim P_2 \iff d_1(f(P_1), f(P_2)) \leq \epsilon_1$ e $d_2(g(P_1), g(P_2)) \leq \epsilon_2$.

Numeri di Betti di point clouds

Esempi di Betti numbers di $H_0(M)$



Rank Invariant

Definition

Il rank invariant di un modulo di multipersistenza é la funzione

$$\begin{aligned} R : \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (v, w) &\rightarrow rank_k H_n(M(v \leq w)) \end{aligned}$$

Nel caso in cui tutti i morfismi sono epi, $R(v, w) = dim_k H_n(M(v))$

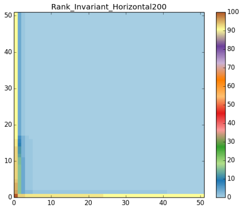
Rank Invariant

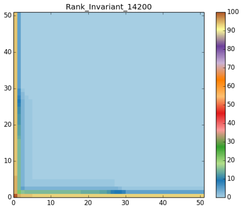
Definition

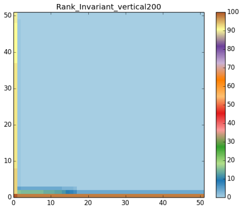
Il rank invariant di un modulo di multipersistenza é la funzione

$$
\begin{aligned}
R : \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(v, w) &\rightarrow rank_k H_n(M(v \leq w))
\end{aligned}
$$

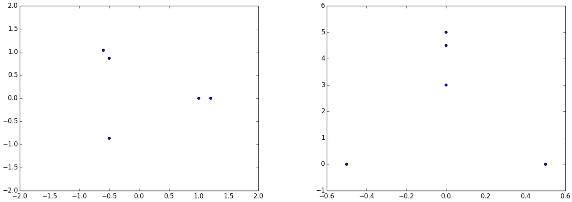
Nel caso in cui tutti i morfismi sono epi, $R(v, w) = dim_k H_n(M(v))$



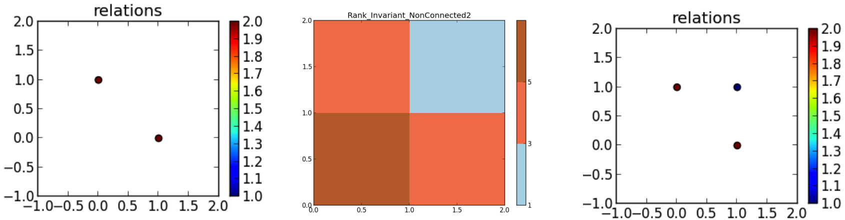




Rank Invariant



Stesso rank invariant ma Betti diagrams diversi.



Presentazione dei moduli di Omologia Multipersistente

Il modulo $H_n = \bigoplus_{v \in \mathbb{N}^r} H_n(M(v))$ é n-esima omologia di:

$$C_M : 0 \to C_d \to \ldots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} \ldots \to C_0 \to 0$$

$C_n = \bigoplus_{v \in \mathbb{N}^r} C_n(M(v))$ e $\partial_n = \bigoplus_{v \in \mathbb{N}^r} \partial_n(v)$

Osservazione

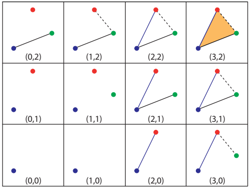
Il chain complex C_M é doppiamente graduato.
Fissato $n \in \mathbb{N}$ abbiamo le n catene della multifiltrazione.
Fissato $v \in \mathbb{N}^r$ abbiamo $C_{M(v)}$ chain complex simpliciale di $M(v)$, quindi $C_M = \bigoplus_v C_{M(v)}$.

Moduli delle catene

I moduli delle catene $C_n = \bigoplus_{v \in \mathbb{N}^r} C_n(M(v))$ hanno una struttura speciale.

Proposizione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, il modulo C_n é isomorfo a una somma diretta di ideali monomiali.



$C_0 \simeq < 1 > \oplus < x_1^2, x_2 > \oplus < x_2^2, x_1x_2, x_1^3 >$ $C_1 \simeq < x_2^2, x_1^2x_2 > \oplus < x_1^2 > \oplus < x_1x_2^2, x_1^3 >$

$C_2 \simeq < x_1^3x_2^2 >$

Funtori $F : \mathbb{N}^r \to Sets$

Categoria dei funtori $Fun(\mathbb{N}^r, Sets)$

- $F : \mathbb{N}^r \to Sets$ é indecomponibile $\iff$ $colim F = \{*\}$.

Funtori $F : \mathbb{N}^r \to Sets$

Categoria dei funtori $Fun(\mathbb{N}^r, Sets)$

- $F : \mathbb{N}^r \to Sets$ é indecomponibile $\iff$ $colimF = \{*\}$.
- Se $F(v \leq w)$ é iniettiva $\forall v \leq w$, F é idecomponibile $\iff$ é un funtore a scala.

Funtori $F : \mathbb{N}^r \to Sets$

Categoria dei funtori $Fun(\mathbb{N}^r, Sets)$

- $F : \mathbb{N}^r \to Sets$ é indecomponibile $\iff$ $colimF = \{*\}$.
- Se $F(v \leq w)$ é iniettiva $\forall v \leq w$, F é idecomponibile $\iff$ é un funtore a scala.
- Ogni funtore in $Fun(\mathbb{N}^r, Sets)$ con $F(v \leq w)$ iniettiva $\forall v \leq w$ puó essere decomposto in modo unico come unione di funtori a scala. Se il funtore é compatto la decomposizione é finita.

Componendo un funtore $F : \mathbb{N}^r \to Sets$ con il funtore linear span $K : Sets \to Vect_k$ otteniamo un funtore $K \circ F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$.

Osservazione

Non tutti i funtori in $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$ sono di questa forma.

$$
\begin{tikzcd}
k \arrow[r] & k^2 \arrow[r] & k^2 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & k \arrow[r] \arrow[u] & k^2 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Funtori $F : \mathbb{N}^r \to Sets$

Proposizione

Se $S : \mathbb{N}^r \to Set$ é un funtore a scala, allora $K \circ S : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é un ideale monomiale.

Corollario

Se $F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é t.c $F(v \leq w)$ sono monomorfismi e $F \simeq K \circ G$ per $G : \mathbb{N}^r \to Sets$, F puó essere decomposto come somma diretta di ideali monomiali.

Funtori $F : \mathbb{N}^r \to Sets$

Proposizione

Se $S : \mathbb{N}^r \to Set$ é un funtore a scala, allora $K \circ S : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é un ideale monomiale.

Corollario

Se $F : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ é t.c $F(v \leq w)$ sono monomorfismi e $F \simeq K \circ G$ per $G : \mathbb{N}^r \to Sets$, F puó essere decomposto come somma diretta di ideali monomiali.

- $C_n(v \leq w)$ sono monomorfismi $\forall v \leq w$.
- $C_n : \mathbb{N}^r \to Vect_k$ fattorizza attraverso $Fun(\mathbb{N}^r, Sets)$.

Cicli e Bordi

I moduli dei cicli $Z_n = \bigoplus_v Z_n(M(v))$

e dei bordi $B_n = \bigoplus_v B_n(M(v))$ non ammettono questa decomposizione.

Cicli e Bordi

I moduli dei cicli $Z_n = \bigoplus_v Z_n(M(v))$

e dei bordi $B_n = \bigoplus_v B_n(M(v))$ non ammettono questa decomposizione.

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r] & k^2 \arrow[r] & k^2 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & k \arrow[r] \arrow[u] & k^2 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Presentazione

$$
\begin{tikzcd}
R_{n+1} \arrow[d] & R_n \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[d] \\
G_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & G_n \arrow[r] \arrow[d] & G_{n-1} \arrow[d] \\
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[d] \\
D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

Teorema

L' n-esimo modulo di omologia multipersistente é l' H_1 di

$$R_n \oplus G_{n+1} \to G_n \to D_{n-1}$$

Prospettive future

- Metrica su i diagrammi di Betti. Quantificare la differenza tra diagrammi. Verificare che il processo sia continuo.

Prospettive future

- Metrica su i diagrammi di Betti. Quantificare la differenza tra diagrammi. Verificare che il processo sia continuo.

- Scrivere H_n come co-nucleo di una matrice. (presentazione di Z_n).

Prospettive future

- Metrica su i diagrammi di Betti. Quantificare la differenza tra diagrammi. Verificare che il processo sia continuo.

- Scrivere H_n come co-nucleo di una matrice. (presentazione di Z_n).

- Invarianti discreti di funtori in $Fun(\mathbb{N}^r, Vect_k)$ che fattorizzano attraverso $Fun(\mathbb{N}^r, Sets)$.

Bibliografia

- W. Chacholski, M.Scolamiero, F.Vaccarino *Combinatorial resolutions of mutigraded modules and multipersistent homology*.
- G.Carlsson, A.Zomorodian *The Theory of Multidimensional Persistence*, Discrete Comput Geom (2009)
- G.Carlsson, A.Zomorodian *Computing Persistent Homology*, Discrete Comput Geom (2004)
- G.Carlsson *Topology and Data*, Bulletin of the American Mathematical Society (2009) Volume 46, Number 2, pag. 255-308
- H.Edelsbrunner, J.L.Harer *Computational Topology an Introduction*, American Mathematical Society (2010).

Grazie !