Spazi di moduli di fasci su K3 e varietà di Nakajima

Giulia Saccà

Torino, 5 giugno 2014

Introduzioni sugli spazi di moduli

Teoria geometrica degli invarianti

Rappresentazioni di quiver

Risultati principali

Spazi di moduli di fasci su superfici K3

- Sia S una K3,

Spazi di moduli di fasci su superfici K3

- Sia S una K3, i.e., $\begin{cases} \pi_1(S) = 1 \\ H^0(S, \Omega^2_S) = \mathbb{C}\omega, \end{cases}$

Spazi di moduli di fasci su superfici K3

- Sia S una K3, i.e., $\begin{cases} \pi_1(S) = 1 \\ H^0(S, \Omega_S^2) = \mathbb{C}\omega, \end{cases}$
- F un fascio coerente su S.

Spazi di moduli di fasci su superfici K3

- Sia S una K3, i.e., $\begin{cases} \pi_1(S) = 1 \\ H^0(S, \Omega_S^2) = \mathbb{C}\omega, \end{cases}$
- F un fascio coerente su S.

Gli invarianti numerici:

$$v(F) = \mathrm{ch}(F)\sqrt{td(X)} \in H^*(S, \mathbb{Z})$$
$$v = v(F) = (\mathrm{rk}, c_1, \mathrm{ch}_2)$$

Spazi di moduli di fasci su superfici K3

- Sia S una K3, i.e., $\begin{cases} \pi_1(S) = 1 \\ H^0(S, \Omega_S^2) = \mathbb{C}\omega, \end{cases}$
- F un fascio coerente su S.

Gli invarianti numerici:

$$\begin{aligned} v(F) &= \mathrm{ch}(F)\sqrt{td(X)} \in H^*(S, \mathbb{Z}) \\ v &= v(F) = (\mathrm{rk}, c_1, \mathrm{ch}_2) \end{aligned}$$

$$H \text{ ampio } \rightsquigarrow M_{v,H} = \left\{ \begin{array}{l} \text{spazio moduli dei fasci } H\text{-semistabili} \\ \text{con vettore di Mukai } v \end{array} \right\}.$$

Mukai: Se F è H-stabile,

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F,F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Hom}(F,F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F,F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Hom}(F,F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$
  induce una forma simplettica su $M_{v,H}$.

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F,F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Hom}(F,F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$
  induce una forma simplettica su $M_{v,H}$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Sing}(M_H) = \{$fasci strettamente H-semistabili$\}$.

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F,F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Hom}(F,F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$
  induce una forma simplettica su $M_{v,H}$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Sing}(M_H) = \{$fasci strettamente H-semistabili$\}$.

In generale $M_H^{stabile} \subsetneq M_H$.

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F, F) \times \mathrm{Ext}^1(F, F) \to \mathrm{Ext}^2(F, F) = \mathrm{Hom}(F, F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$
  induce una forma simplettica su $M_{v,H}$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Sing}(M_H) = \{$fasci strettamente H-semistabili$\}$.

In generale $M_H^{stabile} \subsetneq M_H$. Se invece,

$$M_H^{stabile} = M_H,$$

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F,F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Hom}(F,F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$
  induce una forma simplettica su $M_{v,H}$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Sing}(M_H) = \{$fasci strettamente H-semistabili$\}$.

In generale $M_H^{stabile} \subsetneq M_H$. Se invece,

$$M_H^{stabile} = M_H,$$

allora M_H è una varietà Hyperkähler [Huybrechts, O'Grady, Yoshioka,...]

Mukai: Se F è H-stabile,

- $[F] \in M_H = M_{v,H}$ è un punto liscio;
- $T_F M_{v,H} = \mathrm{Ext}^1(F,F)$;
- Il prodotto cup
  $\sigma : \mathrm{Ext}^1(F,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Hom}(F,F)^\vee \overset{\omega}{\cong} \mathbb{C}$
  induce una forma simplettica su $M_{v,H}$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Sing}(M_H) = \{$fasci strettamente H-semistabili$\}$.

In generale $M_H^{stabile} \subsetneq M_H$. Se invece,

$$M_H^{stabile} = M_H,$$

allora M_H è una varietà Hyperkähler [Huybrechts, O'Grady, Yoshioka,...]

i.e., M_H è liscia, proiettiva, e $\begin{cases} \pi_1(M_H) = 1 \\ H^0(M_H, \Omega^2_{M_H}) = \mathbb{C}\sigma, \end{cases}$

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare.

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare.
(i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare.
  (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare. (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ *delle singolarità di* Y

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare.
  (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare.
  (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica se $f^*\sigma_Y$ si estende a una forma simplettica su tutta X

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare. (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica se $f^*\sigma_Y$ si estende a una forma simplettica su tutta X (quindi olomorfa e non degenere).

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare. (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica se $f^*\sigma_Y$ si estende a una forma simplettica su tutta X (quindi olomorfa e non degenere).

- f simplettica $\Longrightarrow$ f crepante.

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare. (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica se $f^*\sigma_Y$ si estende a una forma simplettica su tutta X (quindi olomorfa e non degenere).

- f simplettica $\Longrightarrow$ f crepante.

Esempio

$Y = \mathbb{C}^{2n}/\pm 1.$

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare.
  (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica se $f^*\sigma_Y$ si estende a una forma simplettica su tutta X (quindi olomorfa e non degenere).

- f simplettica $\Longrightarrow$ f crepante.

Esempio

$Y = \mathbb{C}^{2n}/\pm 1$.
Allora, $f : X := Bl_0 Y \to Y$, *è simplettica*

- Y varietà simplettica, possibilmente singolare. (i.e., Y^{reg} ha una forma simplettica σ_Y).

Definizione

Una risoluzione $f : X \to Y$ delle singolarità di Y è chiamata simplettica se $f^*\sigma_Y$ si estende a una forma simplettica su tutta X (quindi olomorfa e non degenere).

- f simplettica $\implies f$ crepante.

Esempio

$Y = \mathbb{C}^{2n}/\pm 1$.
Allora, $f : X := Bl_0 Y \to Y$, *è simplettica* $\iff 2n \geq 3$

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ non primitivo;

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ *non primitivo;*

(su un curva $\leftrightarrow \mathrm{MCD}(\mathrm{rk}, \deg) \neq 1$)

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.

- Lo scopo è studiarne la struttura.

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ non primitivo;

(su un curva $\leftrightarrow$ $\mathrm{MCD}(\mathrm{rk}, \deg) \neq 1$)

Caso 2

v primitivo, H non generico;

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.
- Lo scopo è studiarne la struttura.

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ non primitivo;

(su un curva $\leftrightarrow$ $\mathrm{MCD}(\mathrm{rk}, \deg) \neq 1$)

[O'Grady]

Due nuovi esempi!

Caso 2

v primitivo, H non generico;

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.
- Lo scopo è studiarne la struttura.

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ non primitivo;

(su un curva $\leftrightarrow$ $\mathrm{MCD}(\mathrm{rk}, \deg) \neq 1$)

[O'Grady]

Due nuovi esempi! Trovando una risoluzione simplettica di $M_{2w_0,H}$

Caso 2

v primitivo, H non generico;

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.
- Lo scopo è studiarne la struttura.

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ non primitivo;

(su un curva $\leftrightarrow$ $\mathrm{MCD}(\mathrm{rk}, \deg) \neq 1$)

[O'Grady]

Due nuovi esempi! Trovando una risoluzione simplettica di $M_{2w_0,H}$

[Kaledin-Lehn-Sorger]

$\nexists$ altre risoluzioni simplettiche.

Caso 2

v primitivo, H non generico;

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.
- Lo scopo è studiarne la struttura.

- Due fonti di fasci strettamente H-semistabili:

Caso 1

$v = mv_0$ non primitivo;

(su un curva $\leftrightarrow \mathrm{MCD}(\mathrm{rk}, \deg) \neq 1$)

[O'Grady]

Due nuovi esempi! Trovando una risoluzione simplettica di $M_{2w_0,H}$

[Kaledin-Lehn-Sorger]

$\nexists$ altre risoluzioni simplettiche.

Caso 2

v primitivo, H non generico; $\leftarrow$ *[Arbarello-S]*

- Cambiare $H \rightsquigarrow$ risoluzione simplettiche di $M_{v,H}$.
- Lo scopo è studiarne la struttura.

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S,

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \operatorname{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \operatorname{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\operatorname{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \mathrm{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\mathrm{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]:

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \mathrm{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\mathrm{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \mathrm{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\mathrm{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

$$F \text{ è } H\text{-(semi)stabile} \iff \forall \ F \twoheadrightarrow G, \ \mu_H(F) \ (\leq) \ \mu_H(G)$$

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \operatorname{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\operatorname{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

$$F \text{ è } H\text{-(semi)stabile} \iff \forall \ F \twoheadrightarrow G, \ \mu_H(F) \ (\leq) \ \mu_H(G)$$

Esempio

- *$j : D \subset S$ una curva*

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \operatorname{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\operatorname{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

$$F \text{ è } H\text{-(semi)stabile} \iff \forall \; F \twoheadrightarrow G, \; \mu_H(F) \; (\leq) \; \mu_H(G)$$

Esempio

- *$j : D \subset S$ una curva*
- *L fibrato lineare su D*

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \operatorname{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\operatorname{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

$$F \text{ è } H\text{-(semi)stabile} \iff \forall \ F \twoheadrightarrow G, \ \mu_H(F) \ (\leq) \ \mu_H(G)$$

Esempio

- *$j : D \subset S$ una curva*
- *L fibrato lineare su D*
- $\rightsquigarrow$ $F = j_* L$ *puro di dimensione uno,*

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \operatorname{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\operatorname{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

$$F \text{ è } H\text{-(semi)stabile} \iff \forall \; F \twoheadrightarrow G, \;\; \mu_H(F) \; (\leq) \; \mu_H(G)$$

Esempio

- *$j : D \subset S$ una curva*
- *L fibrato lineare su D*
- $\rightsquigarrow$ $F = j_* L$ *puro di dimensione uno,* $v(F) = (0, D, \chi(L))$.

Fasci puri di dimensione uno

F fascio puro di dimensione uno su S, i.e., $\begin{cases} G \subset F \\ \dim \mathrm{Supp}(G) = 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow v(F) = (0, \underbrace{c_1(F)}_{\mathrm{Supp}(F)}, \chi(F))$$

Stabilità [Geiseker]: $\mu_H(F) := \frac{\chi(F)}{c_1(F) \cdot H}$

$$F \text{ è } H\text{-(semi)stabile} \iff \forall \ F \twoheadrightarrow G, \ \mu_H(F) \ (\leq) \ \mu_H(G)$$

Esempio

- *$j : D \subset S$ una curva*
- *L fibrato lineare su D*
- $\rightsquigarrow$ $F = j_* L$ *puro di dimensione uno,* $v(F) = (0, D, \chi(L))$.
- *D irriducibile $\Longrightarrow$ $F = j_* L$ è H-stabile*

Esempio

Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,

Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \; i \neq j \quad (*)$

Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \; i \neq j \quad (*)$
- F è H-stabile $\iff$

Esempio

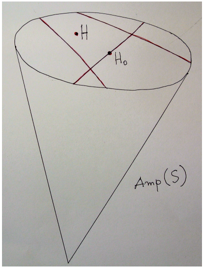
- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0,\ i \neq j \quad (*)$
- F *è* H*-stabile* $\iff \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H},\ i = 1, 2$

Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \; i \neq j \quad (*)$
- F *è H-stabile* $\iff \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H}, \; i = 1, 2$
- $\mu_H(F) \stackrel{!}{=} \mu_H(F_{D_1}) \rightsquigarrow$ *muro* W_{D_1} *in* $\mathrm{Amp}(S)$.

Esempio

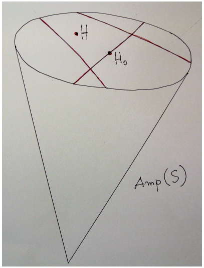
- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \ i \neq j \quad (*)$
- F è H-stabile $\Longleftrightarrow \ \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H}, \ i = 1, 2$
- $\mu_H(F) \stackrel{!}{=} \mu_H(F_{D_1}) \rightsquigarrow$ *muro* W_{D_1} *in* $\mathrm{Amp}(S)$.



Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \ i \neq j \quad (*)$
- F è H-stabile $\iff \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H}, \ i = 1, 2$
- $\mu_H(F) \overset{!}{=} \mu_H(F_{D_1}) \rightsquigarrow$ *muro* W_{D_1} *in* $\mathrm{Amp}(S)$.

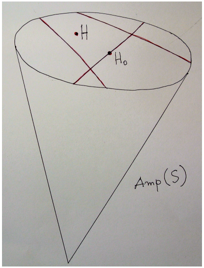
- $H_t \rightsquigarrow H_0$



Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \ i \neq j \quad (*)$
- F *è* H*-stabile* $\Longleftrightarrow \ \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H}, \ i = 1, 2$
- $\mu_H(F) \overset{!}{=} \mu_H(F_{D_1}) \rightsquigarrow$ *muro* W_{D_1} *in* $\mathrm{Amp}(S)$.

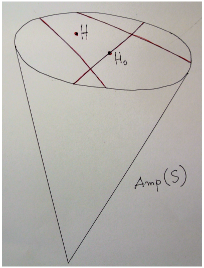
- $H_t \rightsquigarrow H_0$
- $\mu_{H_0}(F) = \mu_{H_0}(F_{D_1})$



Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \; i \neq j \quad (*)$
- F è H-stabile $\Longleftrightarrow \; \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H}, \; i = 1, 2$
- $\mu_H(F) \stackrel{!}{=} \mu_H(F_{D_1}) \rightsquigarrow$ *muro* W_{D_1} *in* $\mathrm{Amp}(S)$.

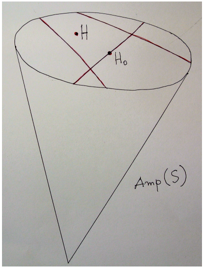
- $H_t \rightsquigarrow H_0$
- $\mu_{H_0}(F) = \mu_{H_0}(F_{D_1})$
- F è H_0-*semistabile*



Esempio

- $D = D_1 \cup D_2$,
- $0 \to F^{D_j} \to F \to F_{D_i} \to 0, \ i \neq j \quad (*)$
- F *è* H*-stabile* $\iff \frac{\chi(F)}{D \cdot H} < \frac{\chi(F_{D_i})}{D_i \cdot H}, \ i = 1, 2$
- $\mu_H(F) \overset{!}{=} \mu_H(F_{D_1}) \rightsquigarrow$ *muro* W_{D_1} *in* $\mathrm{Amp}(S)$.

- $H_t \rightsquigarrow H_0$
- $\mu_{H_0}(F) = \mu_{H_0}(F_{D_1})$
- F *è* H_0*-semistabile*
- $(*)$ *è la filtrazione di Jordan-Hölder di* F



In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\iff$ H-stabilità

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\Longleftrightarrow$ H-stabilità

[Zowislok]:

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\Longleftrightarrow$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\Longleftrightarrow$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\Longleftrightarrow$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\Longleftrightarrow$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \ \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Dove $F \sim_{H_0} F' \iff \mathrm{gr}_{H_0}(F) = \mathrm{gr}_{H_0}(F')$.

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\iff$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \quad \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Dove $F \sim_{H_0} F' \iff \mathrm{gr}_{H_0}(F) = \mathrm{gr}_{H_0}(F')$.

Quindi, se $H \in \mathcal{C}amera$

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\iff$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \quad \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Dove $F \sim_{H_0} F' \iff \mathrm{gr}_{H_0}(F) = \mathrm{gr}_{H_0}(F')$.

Quindi, se $H \in \mathcal{C}amera \Longrightarrow h : M_H \longrightarrow M_{H_0}$ è una risoluzione simplettica!

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\iff$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Dove $F \sim_{H_0} F' \iff \mathrm{gr}_{H_0}(F) = \mathrm{gr}_{H_0}(F')$.

Quindi, se $H \in \mathcal{C}amera \Longrightarrow h : M_H \longrightarrow M_{H_0}$ è una risoluzione simplettica!

Esempio

- $F_1 := F_{D_1}$,

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\iff$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Dove $F \sim_{H_0} F' \iff \mathrm{gr}_{H_0}(F) = \mathrm{gr}_{H_0}(F')$.

Quindi, se $H \in \mathcal{C}amera \implies h : M_H \longrightarrow M_{H_0}$ è una risoluzione simplettica!

Esempio

- $F_1 := F_{D_1}, \qquad e \qquad F_2 := F^{D_2} = \ker[F \to F_{D_1}]$.

In generale, [Yoshioka]: se v primitivo

- sottocurve di $|D| \leftrightarrow$ muri in $\mathrm{Amp}(S)$
- nelle camere: H-semistabilità $\iff$ H-stabilità

[Zowislok]: Degenerare $H \rightsquigarrow H_0$ induce un morfismo birazionale

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} = \{\text{classi di } S_{H_0}\text{-equivalenza}\} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Dove $F \sim_{H_0} F' \iff \mathrm{gr}_{H_0}(F) = \mathrm{gr}_{H_0}(F')$.

Quindi, se $H \in \mathcal{C}amera \implies h : M_H \longrightarrow M_{H_0}$ è una risoluzione simplettica!

Esempio

- $F_1 := F_{D_1}, \qquad e \qquad F_2 := F^{D_2} = \ker[F \to F_{D_1}]$.
- $h^{-1}(F_1 \oplus F_2) = \mathbb{P}\,\mathrm{Ext}^1(F_1, F_2)$
- $M_H \dashrightarrow M_{H'}$ *è un flop di Mukai*

Teoria geometrica degli invarianti

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G$

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.
- $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carattere,

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.
- $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carattere,

$$A_n := \{f \in A \mid g \cdot f(x) = \chi(g)^n f(x)\},$$

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.
- $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carattere,

$$A_n := \{f \in A \mid g \cdot f(x) = \chi(g)^n f(x)\},$$

$$X /\!\!/_\chi G := \operatorname{Proj} \oplus A_n \longrightarrow X /\!\!/ G$$

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.
- $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carattere,

$$A_n := \{f \in A \mid g \cdot f(x) = \chi(g)^n f(x)\},$$

$$X /\!\!/_\chi G := \operatorname{Proj} \oplus A_n \longrightarrow X /\!\!/ G$$

- $\exists$ una nozione di punti χ-semistabili $X^{ss}_\chi \subset X$,

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.
- $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carattere,

$$A_n := \{ f \in A \mid g \cdot f(x) = \chi(g)^n f(x) \},$$

$$X /\!\!/_\chi G := \operatorname{Proj} \oplus A_n \longrightarrow X /\!\!/ G$$

- $\exists$ una nozione di punti χ-semistabili $X_\chi^{ss} \subset X$,

  $X /\!\!/_\chi G = \{\text{classi di } S\text{-equivalenza di orbite di punti } \chi\text{-semistabili}\}$

Teoria geometrica degli invarianti

- G un gruppo riduttivo, $G \circlearrowright X = \operatorname{Spec} A$.
- $X /\!\!/ G = \operatorname{Spec} A^G = \{\text{orbite chiuse}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di } S\text{-equiv.} \\ \text{di orbite} \end{array} \right\}$

  dove $G \cdot x \sim G \cdot y \iff \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$.
- $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carattere,

$$A_n := \{f \in A \mid g \cdot f(x) = \chi(g)^n f(x)\},$$

$$X /\!\!/_\chi G := \operatorname{Proj} \oplus A_n \longrightarrow X /\!\!/ G$$

- $\exists$ una nozione di punti χ-semistabili $X_\chi^{ss} \subset X$,

  $X /\!\!/_\chi G = \{\text{classi di } S\text{-equivalenza di orbite di punti } \chi\text{-semistabili}\}$

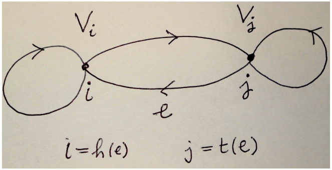
- $X /\!\!/ G = X /\!\!/_0 G$ è il quoziente rispetto al carattere banale.

Rappresentazioni di quiver

Rappresentazioni di quiver

Definizione

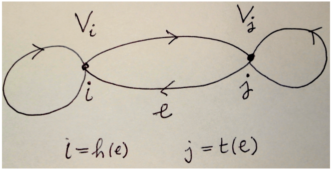
Un quiver è un grafo orientato Q.



Rappresentazioni di quiver

Definizione

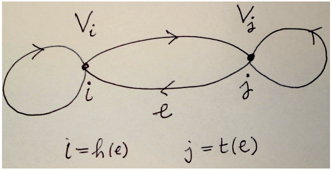
Un quiver è un grafo orientato Q.
$I = \{vertici\ di\ Q\} = \{1, \ldots, s\}$,
$E = \{lati\ di\ Q\}$.



Rappresentazioni di quiver

Definizione

Un quiver è un grafo orientato Q.
$I = \{$vertici di $Q\} = \{1, \ldots, s\}$,
$E = \{$lati di $Q\}$.

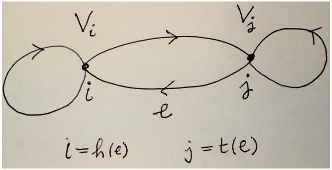


Dato $n = \{n_i\}_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I$,

Rappresentazioni di quiver

Definizione

Un quiver è un grafo orientato Q.
$I = \{vertici\ di\ Q\} = \{1, \ldots, s\}$,
$E = \{lati\ di\ Q\}$.



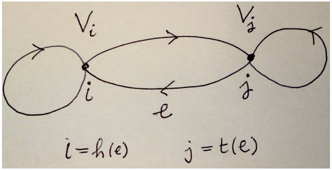
Dato $n = \{n_i\}_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I$,

$$\mathrm{Rep}(Q, n) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}(V_{t(e)}, V_{h(e)}),$$

Rappresentazioni di quiver

Definizione

Un quiver è un grafo orientato Q.
$I = \{\textit{vertici di } Q\} = \{1, \ldots, s\}$,
$E = \{\textit{lati di } Q\}$.



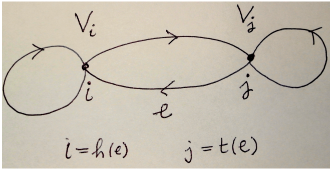
Dato $n = \{n_i\}_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I$,

$$\mathrm{Rep}(Q, n) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}(V_{t(e)}, V_{h(e)}), \qquad G(n) = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i)$$

Rappresentazioni di quiver

Definizione

Un quiver è un grafo orientato Q.
$I = \{vertici\ di\ Q\} = \{1, \ldots, s\}$,
$E = \{lati\ di\ Q\}$.



Dato $n = \{n_i\}_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I$,

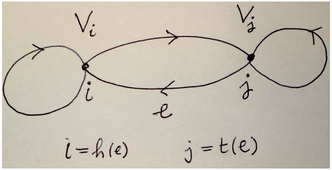
$$\mathrm{Rep}(Q, n) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}(V_{t(e)}, V_{h(e)}), \qquad G(n) = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i)$$

$G(n) \circlearrowright \mathrm{Rep}(Q, n)$ per cambiamento di base,

Rappresentazioni di quiver

Definizione

Un quiver è un grafo orientato Q.
$I = \{\text{vertici di } Q\} = \{1, \ldots, s\}$,
$E = \{\text{lati di } Q\}$.



Dato $n = \{n_i\}_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I$,

$$\mathrm{Rep}(Q, n) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}(V_{t(e)}, V_{h(e)}), \qquad G(n) = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i)$$

$G(n) \circlearrowright \mathrm{Rep}(Q, n)$ per cambiamento di base, $\rightsquigarrow$ spazio dei moduli delle rappresentazioni n-dimensionali di Q.

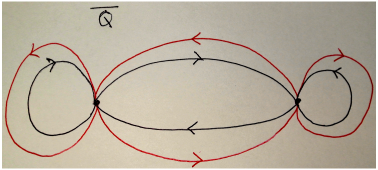
Sia $\overline{Q}$ il quiver

Sia $\overline{Q}$ il quiver

Sia $\overline{Q}$ il quiver con

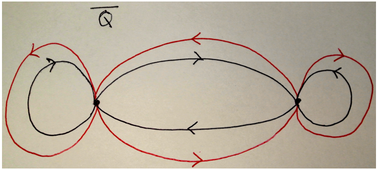
Sia $\overline{Q}$ il quiver con

$$\begin{cases} I_{\overline{Q}} = I \\ E_{\overline{Q}} = E \cup E^{\vee} \end{cases}$$



Sia $\overline{Q}$ il quiver con

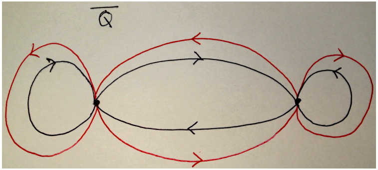
$$\begin{cases} I_{\overline{Q}} = I \\ E_{\overline{Q}} = E \cup E^{\vee} \end{cases}$$



- $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q^{op}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee}$

Sia $\overline{Q}$ il quiver con

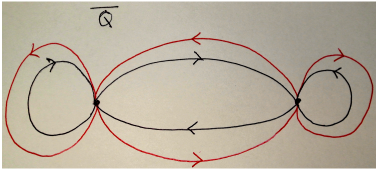
$$\begin{cases} I_{\overline{Q}} = I \\ E_{\overline{Q}} = E \cup E^{\vee} \end{cases}$$



- $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q^{op}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee}$ è uno spazio vettoriale simplettico

Sia $\overline{Q}$ il quiver con

$$\begin{cases} I_{\overline{Q}} = I \\ E_{\overline{Q}} = E \cup E^{\vee} \end{cases}$$

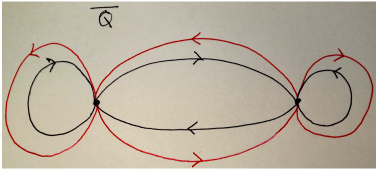


- $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q^{op}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee}$ è uno spazio vettoriale simplettico

- l'applicazione momento

Sia $\overline{Q}$ il quiver con

$$\begin{cases} I_{\overline{Q}} = I \\ E_{\overline{Q}} = E \cup E^{\vee} \end{cases}$$



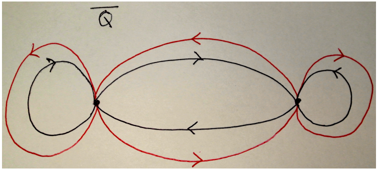
- $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q^{op}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee}$ è uno spazio vettoriale simplettico

- l'applicazione momento

$$\mu : \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i)$$

Sia $\overline{Q}$ il quiver con

$$\begin{cases} I_{\overline{Q}} = I \\ E_{\overline{Q}} = E \cup E^{\vee} \end{cases}$$



- $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q^{op}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee}$ è uno spazio vettoriale simplettico
- l'applicazione momento

$$\mu : \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^{\vee} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i)$$

$$\{(X_e, Y_{e^{\vee}})\}_{e \in E} \longmapsto \sum_{e \in E} [X_e, Y_{e^{\vee}}]$$

Riduzione simplettica:
$G \circlearrowright M$ liberamente
l'applicazione momento $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^\vee$
$T^*(M/G) = \mu^{-1}(0)/G$

Riduzione simplettica:
$G \circlearrowright M$ liberamente
l'applicazione momento $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^\vee$
$T^*(M/G) = \mu^{-1}(0)/G$

$$\mu : \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^\vee \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i)$$

$$\{(X_e, Y_{e^\vee})\}_{e \in E} \longmapsto \sum_{e \in E} [X_e, Y_{e^\vee}]$$

Riduzione simplettica:
$G \circlearrowright M$ liberamente
l'applicazione momento $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^\vee$
$T^*(M/G) = \mu^{-1}(0)/G$

$$\mu : \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^\vee \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i)$$

$$\{(X_e, Y_{e^\vee})\}_{e \in E} \longmapsto \sum_{e \in E} [X_e, Y_{e^\vee}]$$

- μ è G-equivariante

Riduzione simplettica:

$G \circlearrowright M$ liberamente

l'applicazione momento $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^\vee$

$T^*(M/G) = \mu^{-1}(0)/G$

$$\mu : \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Rep}(Q, n) \oplus \mathrm{Rep}(Q, n)^\vee \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i)$$

$$\{(X_e, Y_{e^\vee})\}_{e \in E} \longmapsto \sum_{e \in E} [X_e, Y_{e^\vee}]$$

- μ è G-equivariante
- $\mu^{-1}(0) /\!\!/ G$ è la varietà di Nakajima

Riduzione simplettica:
$G \circlearrowright M$ liberamente
l'applicazione momento $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^\vee$
$T^*(M/G) = \mu^{-1}(0)/G$

$$\mu : \operatorname{Rep}(\overline{Q}, n) = \operatorname{Rep}(Q, n) \oplus \operatorname{Rep}(Q, n)^\vee \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i)$$

$$\{(X_e, Y_{e^\vee})\}_{e \in E} \longmapsto \sum_{e \in E} [X_e, Y_{e^\vee}]$$

- μ è G-equivariante
- $\mu^{-1}(0) /\!\!/ G$ è la varietà di Nakajima
- Il luogo liscio di $\mu^{-1}(0) /\!\!/ G$ ha una forma simplettica

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^l$,

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \ldots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \ldots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

.

Dato $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \dots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ G \qquad .$$

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \ldots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta\, G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ G =: \mathfrak{M}_0.$$

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \ldots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ G =: \mathfrak{M}_0.$$

[Nakajima, Crawley-Boevey]:

Dato $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \dots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta \, G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ \, G =: \mathfrak{M}_0.$$

[Nakajima, Crawley-Boevey]:

- ξ_θ è birazionale;

Dato $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \dots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta \, G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ \, G =: \mathfrak{M}_0.$$

[Nakajima, Crawley-Boevey]:

- ξ_θ è birazionale;
- Il luogo liscio di $\mathfrak{M}_\theta$ ha una forma simplettica;

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \ldots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ G =: \mathfrak{M}_0.$$

[Nakajima, Crawley-Boevey]:

- ξ_θ è birazionale;
- Il luogo liscio di $\mathfrak{M}_\theta$ ha una forma simplettica;
- Il luogo che parametrizza rappresentazioni semplici è liscio;

Dato $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \ldots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta\, G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ G =: \mathfrak{M}_0.$$

[Nakajima, Crawley-Boevey]:

- ξ_θ è birazionale;
- Il luogo liscio di $\mathfrak{M}_\theta$ ha una forma simplettica;
- Il luogo che parametrizza rappresentazioni semplici è liscio;

Quindi,

Dato $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \mathbb{Z}^I$, $\rightsquigarrow$ carattere di G:

$$\chi_\theta : (g_1, \dots, g_s) \mapsto \prod \det(g_i)^{\theta_i} \in \mathbb{C}^\times$$

e un morfismo proiettivo

$$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta := \mu^{-1}(0) /\!\!/_\theta \, G \longrightarrow \mu^{-1}(0) /\!\!/ \, G =: \mathfrak{M}_0.$$

[Nakajima, Crawley-Boevey]:

- ξ_θ è birazionale;
- Il luogo liscio di $\mathfrak{M}_\theta$ ha una forma simplettica;
- Il luogo che parametrizza rappresentazioni semplici è liscio;

Quindi,

- se $\mathfrak{M}_\theta$ è liscio, $\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \to \mathfrak{M}_0$ è una risoluzione simplettica

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è θ-(semi)stabile*

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è θ-(semi)stabile* $\iff \begin{cases} \forall N \subsetneq V, \\ \mu_\theta(N) \ (\leq) \ \mu_\theta(V) \end{cases}$

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è* θ*-(semi)stabile* $\iff \begin{cases} \forall N \subsetneq V, \\ \mu_\theta(N) \; (\leq) \; \mu_\theta(V) \end{cases}$

Se $V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)^{ss}$,

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è θ-(semi)stabile* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall N \subsetneq V, \\ \mu_\theta(N) \; (\leq) \; \mu_\theta(V) \end{cases}$

Se $V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)^{ss}$, $\rightsquigarrow$ filtrazione di Jordan-Hölder

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è θ-(semi)stabile* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall N \subsetneq V, \\ \mu_\theta(N) \; (\leq) \; \mu_\theta(V) \end{cases}$

Se $V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)^{ss}$, $\rightsquigarrow$ filtrazione di Jordan-Hölder

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_l = V,$$

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è θ-(semi)stabile* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall N \subsetneq V, \\ \mu_\theta(N) \ (\leq) \ \mu_\theta(V) \end{cases}$

Se $V \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, n)^{ss}$, $\rightsquigarrow$ filtrazione di Jordan-Hölder

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_l = V, \quad \mathrm{gr}_\theta(V) := \oplus N_i / N_{i-1}.$$

Cosa rappresentano questi quozienti?

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$
- $\theta \in \mathbb{Z}^I$,

$\rightsquigarrow$ la pendenza di V rispetto a θ:

$$\mu_\theta(V) = \frac{\sum \theta_i \dim V_i}{\sum \dim V_i}.$$

Definizione (King, Rudakov)

$V \in \operatorname{Rep}(\overline{Q}, n)$ *è θ-(semi)stabile* $\iff \begin{cases} \forall N \subsetneq V, \\ \mu_\theta(N) \ (\leq) \ \mu_\theta(V) \end{cases}$

Se $V \in \operatorname{Rep}(\overline{Q}, n)^{ss}$, $\rightsquigarrow$ filtrazione di Jordan-Hölder

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_l = V, \quad \operatorname{gr}_\theta(V) := \oplus N_i / N_{i-1}.$$

$$V \sim_{S_\theta} V' \iff \operatorname{gr}_\theta(V) = \operatorname{gr}_\theta(V')$$

Teorema (King)

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ *con* $\sum n_i\theta_i = 0$.

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ *con* $\sum n_i\theta_i = 0$.

- μ_θ-*(semi)stabilità* $\iff$ χ_θ-*(semi)stabilità;*

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i\theta_i = 0$.

- μ_θ-*(semi)stabilità* $\iff$ χ_θ-*(semi)stabilità;*
- S_θ-*equivalenza* $\iff$ *S-equivalenza di orbite di punti* χ_θ-*semistabili.*

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ *con* $\sum n_i \theta_i = 0$.

- μ_θ-*(semi)stabilità* $\iff$ χ_θ-*(semi)stabilità;*
- S_θ-*equivalenza* $\iff$ *S-equivalenza di orbite di punti* χ_θ-*semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \ldots, 0)$,

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ *con* $\sum n_i \theta_i = 0$.

- μ_θ-*(semi)stabilità* $\Longleftrightarrow$ χ_θ-*(semi)stabilità;*
- S_θ-*equivalenza* $\Longleftrightarrow$ *S-equivalenza di orbite di punti* χ_θ-*semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \ldots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i \theta_i = 0$.

- *μ_θ-(semi)stabilità $\Longleftrightarrow$ χ_θ-(semi)stabilità;*
- *S_θ-equivalenza $\Longleftrightarrow$ S-equivalenza di orbite di punti χ_θ-semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \dots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

- $\mathrm{Rep}(Q, n)^{ss} = \mathrm{Rep}(Q, n)$

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i\theta_i = 0$.

- *μ_θ-(semi)stabilità $\iff$ χ_θ-(semi)stabilità;*
- *S_θ-equivalenza $\iff$ S-equivalenza di orbite di punti χ_θ-semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \ldots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

- $\mathrm{Rep}(Q, n)^{ss} = \mathrm{Rep}(Q, n)$
- $W \in \mathrm{Rep}(Q, n)$ stabile $\iff$ W è semplice.

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i\theta_i = 0$.

- *μ_θ-(semi)stabilità $\iff$ χ_θ-(semi)stabilità;*
- *S_θ-equivalenza $\iff$ S-equivalenza di orbite di punti χ_θ-semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \dots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

- $\mathrm{Rep}(Q, n)^{ss} = \mathrm{Rep}(Q, n)$
- $W \in \mathrm{Rep}(Q, n)$ stabile $\iff$ W è semplice.
- $\mathfrak{M}_0 = \{\oplus W_\alpha \mid W_\alpha \text{ semplice}\}$

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i \theta_i = 0$.

- *μ_θ-(semi)stabilità $\Longleftrightarrow$ χ_θ-(semi)stabilità;*
- *S_θ-equivalenza $\Longleftrightarrow$ S-equivalenza di orbite di punti χ_θ-semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \ldots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

- $\mathrm{Rep}(Q, n)^{ss} = \mathrm{Rep}(Q, n)$
- $W \in \mathrm{Rep}(Q, n)$ stabile $\Longleftrightarrow$ W è semplice.
- $\mathfrak{M}_0 = \{\oplus W_\alpha \mid W_\alpha \text{ semplice}\}$

- $\xi : \mathfrak{M}_{\chi_\theta} \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i\theta_i = 0$.

- *μ_θ-(semi)stabilità $\iff$ χ_θ-(semi)stabilità;*
- *S_θ-equivalenza $\iff$ S-equivalenza di orbite di punti χ_θ-semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \dots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

- $\mathrm{Rep}(Q, n)^{ss} = \mathrm{Rep}(Q, n)$
- $W \in \mathrm{Rep}(Q, n)$ stabile $\iff$ W è semplice.
- $\mathfrak{M}_0 = \{\oplus W_\alpha \mid W_\alpha \text{ semplice}\}$

- $$\begin{aligned} \xi : \mathfrak{M}_{\chi_\theta} &\longrightarrow \mathfrak{M}_0 \\ [V] &\longmapsto \mathrm{gr}_0(V) = \text{“semisemplificazione” di } V \end{aligned}$$.

Teorema (King)

Sia $\theta \in \mathbb{Z}^I$ con $\sum n_i\theta_i = 0$.

- *μ_θ-(semi)stabilità $\Longleftrightarrow$ χ_θ-(semi)stabilità;*
- *S_θ-equivalenza $\Longleftrightarrow$ S-equivalenza di orbite di punti χ_θ-semistabili.*

Esempio: Se $\theta = (0, \ldots, 0)$, $\rightsquigarrow$ $\mu_0(W) = 0$ per ogni W.

- $\mathrm{Rep}(Q, n)^{ss} = \mathrm{Rep}(Q, n)$
- $W \in \mathrm{Rep}(Q, n)$ stabile $\Longleftrightarrow$ W è semplice.
- $\mathfrak{M}_0 = \{\oplus W_\alpha \mid W_\alpha \text{ semplice}\}$

- $\xi : \mathfrak{M}_{\chi_\theta} \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

  $[V] \longmapsto \mathrm{gr}_0(V) =$ "semisemplificazione" di V .
- $\xi^{-1}(\oplus W_\alpha) = \{V \mid \theta\text{-semistabili con } \mathrm{gr}_0(V) = \oplus W_\alpha\}$.

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Nakajima:

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Nakajima:

- $\mathfrak{M}_\theta^{stabile}$ è liscio,

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Nakajima:

- $\mathfrak{M}_\theta^{stabile}$ è liscio, e simplettico;

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Nakajima:

- $\mathfrak{M}_\theta^{stabile}$ è liscio, e simplettico;
- Sia $n^\perp = \{\theta \mid \sum \theta_i n_i = 0\} \subset \mathbb{Z}^I$

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Nakajima:

- $\mathfrak{M}_\theta^{stabile}$ è liscio, e simplettico;
- Sia $n^\perp = \{\theta \mid \sum \theta_i n_i = 0\} \subset \mathbb{Z}^I$
  $\rightsquigarrow$ decomposizione in muri (dove $\exists$ strettamente θ-semistabili)

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

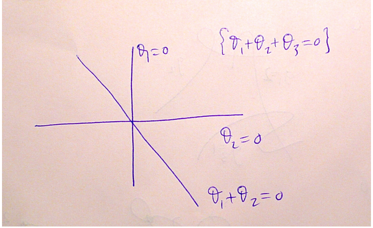
Nakajima:

- $\mathfrak{M}_\theta^{stabile}$ è liscio, e simplettico;
- Sia $n^\perp = \{\theta \mid \sum \theta_i n_i = 0\} \subset \mathbb{Z}^I$
  $\rightsquigarrow$ decomposizione in muri (dove $\exists$ strettamente θ-semistabili) e camere (dove θ-semistabile $\Leftrightarrow$ θ-stabile).

$\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$

Nakajima:

- $\mathfrak{M}_\theta^{stabile}$ è liscio, e simplettico;
- Sia $n^\perp = \{\theta \mid \sum \theta_i n_i = 0\} \subset \mathbb{Z}^I$
  $\rightsquigarrow$ decomposizione in muri (dove $\exists$ strettamente θ-semistabili) e camere (dove θ-semistabile $\Leftrightarrow$ θ-stabile).



Se θ giace in una camera, allora $\xi_\theta : \mathfrak{M}_\theta \longrightarrow \mathfrak{M}_0$ è una risoluzione simplettica.

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile,

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile, con F_i fascio H_0-stabile $\forall i$.

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile, con F_i fascio H_0-stabile $\forall i$.
  - Allora $[F] \in \mathrm{Sing}\, M_{v,H_0}$

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile, con F_i fascio H_0-stabile $\forall i$.
  - Allora $[F] \in \mathrm{Sing}\, M_{v,H_0}$
  - Se $H \in \mathcal{C}$,

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile, con F_i fascio H_0-stabile $\forall i$.
  - Allora $[F] \in \mathrm{Sing}\, M_{v,H_0}$
  - Se $H \in \mathcal{C}$, con $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$,

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile, con F_i fascio H_0-stabile $\forall i$.
    - Allora $[F] \in \mathrm{Sing}\, M_{v,H_0}$
    - Se $H \in \mathcal{C}$, con $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, $\rightsquigarrow$ risoluzione simplettica delle singolarità
      $$h : M_H \longrightarrow M_{H_0}$$

Collegamento con i moduli dei fasci

Ricordiamo che

- $H_0 \in \mathrm{Amp}(S)$
- $F = \oplus F_i^{n_i}$, fascio H_0-polistabile, con F_i fascio H_0-stabile $\forall i$.
  - Allora $[F] \in \mathrm{Sing}\, M_{v,H_0}$
  - Se $H \in \mathcal{C}$, con $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, $\rightsquigarrow$ risoluzione simplettica delle singolarità

$$\begin{aligned} h : M_H &\longrightarrow M_{H_0} \\ F &\longmapsto [F]_{H_0} \end{aligned}$$

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale*

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale ("i.e., che* $k = k_2$*").*

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 ed $F = \oplus F_i^{n_i}$ come sopra.
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di F sia formale ("i.e., che $k = k_2$").*
Allora esiste un quiver Q tale che, ponendo $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale ("i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F),$

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale ("i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F),$

ii) $k_2 = \mu;$

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale ("i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F)$, $\quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F)$,

ii) $k_2 = \mu$;

iii) *Per ogni* $H \in \mathcal{C}$, *con* $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, *esiste un* $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, *tale che le due risoluzioni*

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale (" i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F),$

ii) $k_2 = \mu;$

iii) *Per ogni* $H \in \mathcal{C}$, *con* $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, *esiste un* $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, *tale che le due risoluzioni*

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale (" i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F)$,

ii) $k_2 = \mu$;

iii) *Per ogni* $H \in \mathcal{C}$, *con* $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, *esiste un* $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, *tale che le due risoluzioni*

$$\begin{tikzcd} M_H \arrow[d, "h"'] \\ M_{H_0} \end{tikzcd}$$

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale ("i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F)$,

ii) $k_2 = \mu$;

iii) *Per ogni* $H \in \mathcal{C}$, *con* $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, *esiste un* $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, *tale che le due risoluzioni*

$$\begin{array}{ccc} M_H & & \mathfrak{M}_\theta \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \qquad\qquad & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ M_{H_0} & & \mathfrak{M}_0 \end{array}$$

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 ed $F = \oplus F_i^{n_i}$ come sopra.
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di F sia formale (" i.e., che $k = k_2$").*
Allora esiste un quiver Q tale che, ponendo $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F),$

ii) $k_2 = \mu;$

iii) *Per ogni $H \in \mathcal{C}$, con $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, esiste un $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, tale che le due risoluzioni*

$$\begin{array}{ccc} M_H & \qquad & \mathfrak{M}_\theta \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ M_{H_0} & & \mathfrak{M}_0 \end{array}$$

sono localmente equivalenti.

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 ed $F = \oplus F_i^{n_i}$ come sopra.
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di F sia formale (" i.e., che $k = k_2$").*
Allora esiste un quiver Q tale che, ponendo $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F)$,

ii) $k_2 = \mu$;

iii) *Per ogni $H \in \mathcal{C}$, con $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, esiste un $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, tale che le due risoluzioni*

$$\begin{tikzcd}
M_H \arrow[d, "h"'] & & & \mathfrak{M}_\theta \arrow[d, "\xi"] \\
M_{H_0} & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, equal] & V \arrow[r, hook] & \mathfrak{M}_0
\end{tikzcd}$$

sono localmente equivalenti.

Teorema 1 (Arbarello -S.)

Dati H_0 *ed* $F = \oplus F_i^{n_i}$ *come sopra.*
Assumiamo che lo spazio $\mathrm{Def}(F)$ *delle deformazioni di* F *sia formale ("i.e., che* $k = k_2$*").*
Allora esiste un quiver Q *tale che, ponendo* $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^I$

i) $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) \cong \mathrm{Ext}^1(F, F), \quad G(n) \cong \mathrm{Aut}(F),$

ii) $k_2 = \mu;$

iii) *Per ogni* $H \in \mathcal{C}$, *con* $H_0 \in \overline{\mathcal{C}}$, *esiste un* $\theta \in n^\perp \subset \mathbb{Z}^I$, *tale che le due risoluzioni*

$$\begin{tikzcd}
M_H \arrow[d, "h"'] & h^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \arrow[r, equal] & \xi^{-1}(V) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{M}_\theta \arrow[d, "\xi"] \\
M_{H_0} & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, equal] & V \arrow[r, hook] & \mathfrak{M}_0
\end{tikzcd}$$

sono localmente equivalenti.

Def(F) è formale

$\mathrm{Def}(F)$ è formale $\iff R^\bullet Hom(F,F) \xrightarrow{qis} \mathrm{Ext}^\bullet(F,F)$

$$\mathrm{Def}(F) \text{ è formale} \iff R^\bullet Hom(F,F) \xrightarrow{qis} \mathrm{Ext}^\bullet(F,F)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Def}(F) \overset{loc}{\cong} k_2^{-1}(0) \subset \mathrm{Ext}^1(F,F).$$

$\mathrm{Def}(F)$ è formale $\iff R^\bullet Hom(F,F) \xrightarrow{qis} \mathrm{Ext}^\bullet(F,F)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Def}(F) \overset{loc}{\cong} k_2^{-1}(0) \subset \mathrm{Ext}^1(F,F).$

F-polistabile, $G := \mathrm{Aut}(F)$
Applicazione di Kuranishi: $k : \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F)_0$
$k = k_2 + k_3 + ? \cdots$
G-invariante
$\mathrm{Def}(F) = k^{-1}(0)$
$\hat{M}_{[F]} \cong k^{-1}(0) /\!\!/ G$

$\mathrm{Def}(F)$ è formale $\iff R^\bullet Hom(F,F) \xrightarrow{qis} \mathrm{Ext}^\bullet(F,F)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Def}(F) \overset{loc}{\cong} k_2^{-1}(0) \subset \mathrm{Ext}^1(F,F)$.

F-polistabile, $G := \mathrm{Aut}(F)$
Applicazione di Kuranishi: $k : \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(F,F)_0$
$k = k_2 + k_3 + ?\cdots$
G-invariante
$\mathrm{Def}(F) = k^{-1}(0)$
$\hat{M}_{[F]} \cong k^{-1}(0) /\!\!/ G$

Quindi se $\mathrm{Def}(F)$ è formale, è un intersezione completa di quadriche.
(nel nostro caso, è anche ridotta e irriducibile)

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S.

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$
- [Zhang] Vera per $F = \oplus E_i$, con $\mathrm{rg}\, E_i \geq 2$

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$
- [Zhang] Vera per $F = \oplus E_i$, con $\mathrm{rg}\, E_i \geq 2$

Teorema 2 (Arbarello -S.)

Sia $F = \oplus F_i^{n_i}$

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$
- [Zhang] Vera per $F = \oplus E_i$, con $\operatorname{rg} E_i \geq 2$

Teorema 2 (Arbarello -S.)

Sia $F = \oplus F_i^{n_i}$, con $\mathrm{Supp}(F_i) = \sum a_j E_j$ *con $E_i \cdot E_j \leq 2$.*

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ è formale.

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$
- [Zhang] Vera per $F = \oplus E_i$, con $\mathrm{rg}\, E_i \geq 2$

Teorema 2 (Arbarello -S.)

Sia $F = \oplus F_i^{n_i}$, con $\mathrm{Supp}(F_i) = \sum a_j E_j$ con $E_i \cdot E_j \leq 2$. Allora $\mathrm{Def}(F)$ è formale.

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$
- [Zhang] Vera per $F = \oplus E_i$, con $\mathrm{rg}\, E_i \geq 2$

Teorema 2 (Arbarello -S.)

Sia $F = \oplus F_i^{n_i}$, *con* $\mathrm{Supp}(F_i) = \sum a_j E_j$ *con* $E_i \cdot E_j \leq 2$.
Allora $\mathrm{Def}(F)$ *è formale.*

Teorema 3 (Arbarello -S.)

Sia $M_i = \ker[H^0(F_i) \otimes \mathcal{O}_S \to F_i]$ *il duale del fibrato di* *Lazarsfel-Mukai.*

Congettura (Kaledin-Lehn)

Sia F fascio polistabile su S. Allora $\mathrm{Def}(F)$ è formale.

- [Kaledin-Lehn] Vera per $F = \oplus \mathcal{I}_z$
- [Zhang] Vera per $F = \oplus E_i$, con $\mathrm{rg}\, E_i \geq 2$

Teorema 2 (Arbarello -S.)

Sia $F = \oplus F_i^{n_i}$, con $\mathrm{Supp}(F_i) = \sum a_j E_j$ con $E_i \cdot E_j \leq 2$. Allora $\mathrm{Def}(F)$ è formale.

Teorema 3 (Arbarello -S.)

Sia $M_i = \ker[H^0(F_i) \otimes \mathcal{O}_S \to F_i]$ il duale del fibrato di Lazarsfel-Mukai.
Se $H^1(S, F_i) = 0$, allora, M_i è H_0-stabile.

Perchè interessarsi a questo?

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0};

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0}; classificazione delle singolarità simplettiche (Beauville);

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0}; classificazione delle singolarità simplettiche (Beauville);
- Studiare i fenomeni di "attraversamemto di muri":

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0}; classificazione delle singolarità simplettiche (Beauville);
- Studiare i fenomeni di "attraversamemto di muri":

$$
\begin{tikzcd}
M_H \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, "h"'] & & M_{H'} \arrow[dl, "h'"] \\
& M_{H_0} &
\end{tikzcd}
$$

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0}; classificazione delle singolarità simplettiche (Beauville);
- Studiare i fenomeni di "attraversamemto di muri":

$$
\begin{tikzcd}
M_H \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, "h"'] & & M_{H'} \arrow[dl, "h'"] \\
& M_{H_0} &
\end{tikzcd}
$$

- [Bayer-Macrì] $\Rightarrow$ i morfismi tipo h governano la geometria birazionale degli M_H;

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0}; classificazione delle singolarità simplettiche (Beauville);
- Studiare i fenomeni di "attraversamemto di muri":

$$\begin{tikzcd} M_H \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, "h"'] & & M_{H'} \arrow[dl, "h'"] \\ & M_{H_0} & \end{tikzcd}$$

- [Bayer-Macrì] $\Rightarrow$ i morfismi tipo h governano la geometria birazionale degli M_H;
- Studiare la decomposizione di $Rh_*\mathbb{C}$;

Perchè interessarsi a questo?

- Singolarità degli spazi di moduli M_{H_0}; classificazione delle singolarità simplettiche (Beauville);
- Studiare i fenomeni di "attraversamemto di muri":

$$
\begin{tikzcd}
M_H \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, "h"'] & & M_{H'} \arrow[dl, "h'"] \\
& M_{H_0} &
\end{tikzcd}
$$

- [Bayer-Macrì] $\Rightarrow$ i morfismi tipo h governano la geometria birazionale degli M_H;
- Studiare la decomposizione di $Rh_*\mathbb{C}$;
- ...

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F,

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$",

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$"

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \bigoplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$" $\rightsquigarrow$

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$" $\rightsquigarrow$

$$(M_{H_0}, [F]) \overset{loc}{\cong} (\mathfrak{M}_0, 0)$$

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$" $\rightsquigarrow$

$$(M_{H_0}, [F]) \overset{loc}{\cong} (\mathfrak{M}_0, 0)$$

(versione G-equivariante del teorema di approssimazione di Artin [Bierstone-Millman])

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$" $\rightsquigarrow$

$$(M_{H_0}, [F]) \overset{loc}{\cong} (\mathfrak{M}_0, 0)$$

(versione G-equivariante del teorema di approssimazione di Artin [Bierstone-Millman])

Passo III Dato H, usare la famiglia universale sulla slice étale B nel Quot_H

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$" $\rightsquigarrow$

$$(M_{H_0}, [F]) \overset{loc}{\cong} (\mathfrak{M}_0, 0)$$

(versione G-equivariante del teorema di approssimazione di Artin [Bierstone-Millman])

Passo III Dato H, usare la famiglia universale sulla slice étale B nel Quot_H per trovare il carattere χ.

Cenni di dimostrazione del Teorema 1

Passo I Dato $F = \oplus F_i^{n_i}$, trovare Q con $\mathrm{Rep}(\overline{Q}, n) = \mathrm{Ext}^1(F, F)$;

Passo II Teoria della deformazione locale di F, usando l'ipotesi "$k = k_2$", quindi "$k = \mu$" $\rightsquigarrow$

$$(M_{H_0}, [F]) \overset{loc}{\cong} (\mathfrak{M}_0, 0)$$

(versione G-equivariante del teorema di approssimazione di Artin [Bierstone-Millman])

Passo III Dato H, usare la famiglia universale sulla slice étale B nel Quot_H per trovare il carattere χ.

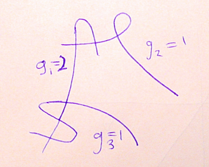
- $B \overset{loc}{\cong} \mu^{-1}(0)$ G-equiv.
- si trova una particolare linearizzazione di un fibrato lineare su B;
- decomposizioni in stabili $\overset{vs}{\longleftrightarrow}$ decomposizioni in semplici;

$$
\begin{tikzcd}
B & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] & V \arrow[r, hook] & \mu^{-1}(0) \\
B^H \arrow[u, hook] \arrow[d] & U^H \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] \arrow[d] & V^H \arrow[u, hook] \arrow[d] & \mu^{-1}(0)^{ss}_{\chi} \arrow[u, hook] \arrow[d] \\
B^H /\!\!/_L G \arrow[d] & U^H /\!\!/_L G \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{V}^H /\!\!/_{\chi} G \arrow[d] & \mu^{-1}(0)^{ss}_{\chi} /\!\!/_{\chi} G \arrow[d] \\
B /\!\!/ G & U /\!\!/ G \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] & V /\!\!/ G \arrow[r, hook] & \mu^{-1}(0) /\!\!/ G
\end{tikzcd}
$$

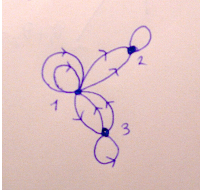
Chi è Q?

Chi è Q?

- $D_i := \text{Supp}(F_i)$
- $D = \sum n_i D_i$



Allora Q è il grafo duale di $D' = \sum D_i$, con $g_i = p_a(D_i)$ cappi a ogni vertice.



Fine! Grazie!