Equivalenze derivate di varietà irregolari e luoghi di non annullamento

Luigi Lombardi

Università di Bonn

5 Giugno 2014

- X e Y varietà complesse proiettive lisce.

- X e Y varietà complesse proiettive lisce.
- *Categorie derivate di* X e Y:

$$\mathbf{D}(X) := D^b(\mathrm{Coh}(X)), \qquad \mathbf{D}(Y) := D^b(\mathrm{Coh}(Y)).$$

categorie derivate limitate delle categorie $\mathrm{Coh}(X)$ e $\mathrm{Coh}(Y)$ dei fasci coerenti su X e Y.

- X e Y varietà complesse proiettive lisce.
- *Categorie derivate di* X e Y:

$$\mathbf{D}(X) := D^b(\mathrm{Coh}(X)), \qquad \mathbf{D}(Y) := D^b(\mathrm{Coh}(Y)).$$

  categorie derivate limitate delle categorie $\mathrm{Coh}(X)$ e $\mathrm{Coh}(Y)$ dei fasci coerenti su X e Y.
- **Definizione**: X e Y sono *D-equivalenti* se esiste un'equivalenza lineare ed esatta $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ tra le categorie derivate di X e Y.

- X e Y varietà complesse proiettive lisce.
- *Categorie derivate di* X e Y:

$$\mathbf{D}(X) := D^b(\mathrm{Coh}(X)), \qquad \mathbf{D}(Y) := D^b(\mathrm{Coh}(Y)).$$

  categorie derivate limitate delle categorie $\mathrm{Coh}(X)$ e $\mathrm{Coh}(Y)$ dei fasci coerenti su X e Y.
- **Definizione**: X e Y sono *D-equivalenti* se esiste un'equivalenza lineare ed esatta $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ tra le categorie derivate di X e Y.
- **Orlov**: Ogni equivalenza $F : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ è di tipo Fourier–Mukai, cioè esiste un oggetto $\mathcal{E}$ in $\mathbf{D}(X \times Y)$ tale che $F \simeq \Phi_{\mathcal{E}}$ dove

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) := \mathbf{R}p_{Y*}(p_X^*(\mathcal{F}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{E}), \quad \mathcal{F} \in \mathbf{D}(X)$$

  e $p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$ sono le proziezioni.

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Teorema (Bondal–Orlov, Kawamata)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Teorema (Bondal–Orlov, Kawamata)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- *Allora* $\dim X = \dim Y$, $\mathrm{kod}(X) = \mathrm{kod}(Y)$ *e* $R(X) := \bigoplus_m H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \simeq R(Y) := \bigoplus_m H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$.

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Teorema (Bondal–Orlov, Kawamata)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- *Allora* $\dim X = \dim Y$, $\mathrm{kod}(X) = \mathrm{kod}(Y)$ *e* $R(X) := \bigoplus_m H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \simeq R(Y) := \bigoplus_m H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$.
- *Se* ω_X *o* ω_X^{-1} *è ampio, allora* $X \simeq Y$.

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Teorema (Bondal–Orlov, Kawamata)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- *Allora* $\dim X = \dim Y$, $\mathrm{kod}(X) = \mathrm{kod}(Y)$ *e* $R(X) := \bigoplus_m H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \simeq R(Y) := \bigoplus_m H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$.
- *Se* ω_X *o* ω_X^{-1} *è ampio, allora* $X \simeq Y$.
- *Se* X *è di tipo generale o se* $\mathrm{kod}(\omega_X^{-1}) = \dim X$, *allora* X *e* Y *sono* K*-equivalenti.*

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Teorema (Bondal–Orlov, Kawamata)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- *Allora* $\dim X = \dim Y$, $\mathrm{kod}(X) = \mathrm{kod}(Y)$ *e* $R(X) := \bigoplus_m H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \simeq R(Y) := \bigoplus_m H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$.
- *Se* ω_X *o* ω_X^{-1} *è ampio, allora* $X \simeq Y$.
- *Se* X *è di tipo generale o se* $\mathrm{kod}(\omega_X^{-1}) = \dim X$*, allora* X *e* Y *sono* K*-equivalenti.*
  Ovvero esiste una varietà liscia Z *insieme a due morfismi birazionali* $p : Z \to X$ *e* $q : Z \to Y$ *tali che* $p^*\omega_X \simeq q^*\omega_Y$.

Risultati di Bondal, Kawamata ed Orlov dimostrano che $\mathbf{D}(X)$ porta con sè molte informazioni riguardo la varietà stessa.

Teorema (Bondal–Orlov, Kawamata)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- *Allora* $\dim X = \dim Y$, $\mathrm{kod}(X) = \mathrm{kod}(Y)$ *e* $R(X) := \bigoplus_m H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \simeq R(Y) := \bigoplus_m H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$.
- *Se* ω_X *o* ω_X^{-1} *è ampio, allora* $X \simeq Y$.
- *Se* X *è di tipo generale o se* $\mathrm{kod}(\omega_X^{-1}) = \dim X$, *allora* X *e* Y *sono* K*-equivalenti.*
  Ovvero esiste una varietà liscia Z *insieme a due morfismi birazionali* $p : Z \to X$ *e* $q : Z \to Y$ *tali che* $p^*\omega_X \simeq q^*\omega_Y$.

Corollario

Se C *e* D *sono curve proiettive lisce tali che* $\mathbf{D}(C) \simeq \mathbf{D}(D)$, *allora* $C \simeq D$.

Superfici D-equivalenti

Superfici D-equivalenti

Bridgeland–Maciocia e Kawamata classificano superfici D-equivalenti in parallelo alla classificazione classica delle superfici di Enriques–Kodaira.

Superfici D-equivalenti

Bridgeland–Maciocia e Kawamata classificano superfici D-equivalenti in parallelo alla classificazione classica delle superfici di Enriques–Kodaira.

Siano X e Y superfici proiettive lisce tali che $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

Superfici D-equivalenti

Bridgeland–Maciocia e Kawamata classificano superfici D-equivalenti in parallelo alla classificazione classica delle superfici di Enriques–Kodaira.

Siano X e Y superfici proiettive lisce tali che $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- X abeliana (*risp.* $K3$) $\Rightarrow$ Y abeliana (*risp.* $K3$).
- $f : X \to C$ ellittica $\Rightarrow$ Y è uno schema di Picard relativo associato alla fibrazione f. In particolare $Y \to C$ è ellittica.
- X di tipo generale $\Rightarrow X \simeq Y$
- X Enriques o biellittica $\Rightarrow X \simeq Y$
- $\mathrm{kod}(X) = -\infty$ e X non ellittica $\Rightarrow X \simeq Y$

Superfici D-equivalenti

Bridgeland–Maciocia e Kawamata classificano superfici D-equivalenti in parallelo alla classificazione classica delle superfici di Enriques–Kodaira.

Siano X e Y superfici proiettive lisce tali che $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- X abeliana (*risp.* $K3$) $\Rightarrow$ Y abeliana (*risp.* $K3$).
- $f : X \to C$ ellittica $\Rightarrow$ Y è uno schema di Picard relativo associato alla fibrazione f. In particolare $Y \to C$ è ellittica.
- X di tipo generale $\Rightarrow X \simeq Y$
- X Enriques o biellittica $\Rightarrow X \simeq Y$
- $\mathrm{kod}(X) = -\infty$ e X non ellittica $\Rightarrow X \simeq Y$

Per capire varietà D-equivalenti in dimensione superiore prendiamo spunto dal caso delle superfici. In particolare facciamo le seguenti osservazioni:

- Se X è una superficie allora l'insieme

$$FM(X) := \{Y \mid Y \text{ è } D\text{-equivalente ad } X\}_{\simeq}$$

dei *Fourier-Mukai partners* di X è finito.

- Se X è una superficie allora l'insieme

$$FM(X) := \{Y \mid Y \text{ è } D\text{-equivalente ad } X\}_{\simeq}$$

dei *Fourier-Mukai partners* di X è finito.

- Se X ammette una fibrazione

$$X \to C$$

su una curva liscia di genere almeno 2, allora ogni $Y \in FM(X)$ ammette una fibrazione sulla stessa curva.

- Se X è una superficie allora l'insieme

$$FM(X) := \{Y \mid Y \text{ è } D\text{-equivalente ad } X\}_{\simeq}$$

dei *Fourier-Mukai partners* di X è finito.

- Se X ammette una fibrazione

$$X \to C$$

su una curva liscia di genere almeno 2, allora ogni $Y \in FM(X)$ ammette una fibrazione sulla stessa curva.

La prima osservazione è stata recentemente provata essere falsa in dimensione 3:

Teorema (Lesieutre)

Esiste un insieme infinito di configurazioni W di 8 punti su $\mathbf{P}^3$ tali che se $P, Q \in W$ e $P \neq Q$, allora $\mathrm{Bl}_P\mathbf{P}^3 \not\simeq \mathrm{Bl}_Q\mathbf{P}^3$ e $\mathbf{D}(\mathrm{Bl}_P\mathbf{P}^3) \simeq \mathbf{D}(\mathrm{Bl}_Q\mathbf{P}^3)$.

La seconda osservazione invece si estende in dimensione arbitraria.

Teorema (L.–Popa, L.–Schnell)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$*. Se* X *ammette una fibrazione su una curva liscia di genere* ≥ 2*, allora* Y *ammette una fibrazione sulla stessa curva.*
In più, l'insieme delle curve lisce di genere ≥ 2 *su cui* X *ammette una fibrazione è invariante sotto equivalenze di categorie derivate.*

La seconda osservazione invece si estende in dimensione arbitraria.

Teorema (L.–Popa, L.–Schnell)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$. Se X ammette una fibrazione su una curva liscia di genere ≥ 2, allora Y ammette una fibrazione sulla stessa curva.
In più, l'insieme delle curve lisce di genere ≥ 2 su cui X ammette una fibrazione è invariante sotto equivalenze di categorie derivate.

Osservazione: X è irregolare.

- X è *irregolare* se

$$q(X) = \dim H^0(X, \Omega^1_X) = h^{1,0}(X) = \dim \mathrm{Pic}^0(X) > 0$$

$$\mathrm{Pic}^0(X) = \{L \in \mathrm{Pic}(X) \mid c_1(L) = 0\}_{\simeq}.$$

Equivalenze derivate di varietà irregolari

- X è *irregolare* se

$$q(X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1) = h^{1,0}(X) = \dim \mathrm{Pic}^0(X) > 0$$

$$\mathrm{Pic}^0(X) = \{L \in \mathrm{Pic}(X) \mid c_1(L) = 0\}_{\simeq}.$$

Definizione (Luoghi di non annullamento di Green–Lazarsfeld)

Definiamo

$$V^i(\omega_X) := \{\alpha \in \mathrm{Pic}^0(X) \mid h^i(X, \omega_X \otimes \alpha) \geq 1\} \subset \mathrm{Pic}^0(X) \quad i \geq 0.$$

Definiamo anche

$$V^i_m(\omega_X) := \{\alpha \in \mathrm{Pic}^0(X) \mid h^i(X, \omega_X \otimes \alpha) \geq m\} \subset \mathrm{Pic}^0(X) \quad m \geq 1,\ i \geq 0.$$

Teoria dell'annullamento generico (Green, Lazarsfeld, Ein, Hacon, Pareschi, Popa, Schnell, Simpson,...):

- Sia $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ la mappa di Albanese di X e $a(X)$ la dimensione della sua immagine. Allora

$$\mathrm{cod}_{\mathrm{Pic}^0(X)} V^i(\omega_X) \geq i - \dim X + a(X) \quad \text{per ogni } i \geq 0$$

Teoria dell'annullamento generico (Green, Lazarsfeld, Ein, Hacon, Pareschi, Popa, Schnell, Simpson,...):

- Sia $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ la mappa di Albanese di X e $a(X)$ la dimensione della sua immagine. Allora

$$\mathrm{cod}_{\mathrm{Pic}^0(X)} V^i(\omega_X) \geq i - \dim X + a(X) \quad \text{per ogni } i \geq 0$$

In particolare se $a(X) = \dim X$, allora

$$H^i(X, \omega_X \otimes \alpha) = 0 \quad \text{per } \alpha \in \mathrm{Pic}^0(X) \quad \text{generico e per ogni } i > 0.$$

$\Rightarrow \chi(\omega_X) \geq 0$.
(Per tali α, abbiamo $\chi(\omega_X) = \chi(\omega_X \otimes \alpha) = h^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \geq 0$).

Teoria dell'annullamento generico (Green, Lazarsfeld, Ein, Hacon, Pareschi, Popa, Schnell, Simpson,...):

- Sia $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ la mappa di Albanese di X e $a(X)$ la dimensione della sua immagine. Allora

$$\mathrm{cod}_{\mathrm{Pic}^0(X)} V^i(\omega_X) \geq i - \dim X + a(X) \quad \text{per ogni } i \geq 0$$

In particolare se $a(X) = \dim X$, allora

$$H^i(X, \omega_X \otimes \alpha) = 0 \quad \text{per } \alpha \in \mathrm{Pic}^0(X) \quad \text{generico e per ogni } i > 0.$$

$\Rightarrow \chi(\omega_X) \geq 0$.
(Per tali α, abbiamo $\chi(\omega_X) = \chi(\omega_X \otimes \alpha) = h^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \geq 0$).

- Ogni componente irriducibile di $V^i_m(\omega_X)$ è un traslato per un punto di torsione di un sotto toro di $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Teoria dell'annullamento generico (Green, Lazarsfeld, Ein, Hacon, Pareschi, Popa, Schnell, Simpson,...):

- Sia $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ la mappa di Albanese di X e $a(X)$ la dimensione della sua immagine. Allora

$$\mathrm{cod}_{\mathrm{Pic}^0(X)} V^i(\omega_X) \geq i - \dim X + a(X) \quad \text{per ogni } i \geq 0$$

In particolare se $a(X) = \dim X$, allora

$$H^i(X, \omega_X \otimes \alpha) = 0 \quad \text{per } \alpha \in \mathrm{Pic}^0(X) \quad \text{generico e per ogni } i > 0.$$

$\Rightarrow \chi(\omega_X) \geq 0$.
(Per tali α, abbiamo $\chi(\omega_X) = \chi(\omega_X \otimes \alpha) = h^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \geq 0$).

- Ogni componente irriducibile di $V^i_m(\omega_X)$ è un traslato per un punto di torsione di un sotto toro di $\mathrm{Pic}^0(X)$.
- I luoghi $V^i_m(\omega_X)$ forniscono informazioni riguardo: la geometria della mappa di Albanese, fibrazioni, mappe pluricanoniche, invarianti numerici (per esempio $\chi(\omega_X)$, $\mathrm{kod}(X)$, dimensione di Albanese...).

Teoria dell'annullamento generico (Green, Lazarsfeld, Ein, Hacon, Pareschi, Popa, Schnell, Simpson,...):

- Sia $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ la mappa di Albanese di X e $a(X)$ la dimensione della sua immagine. Allora

$$\mathrm{cod}_{\mathrm{Pic}^0(X)} V^i(\omega_X) \geq i - \dim X + a(X) \quad \text{per ogni } i \geq 0$$

In particolare se $a(X) = \dim X$, allora

$$H^i(X, \omega_X \otimes \alpha) = 0 \quad \text{per } \alpha \in \mathrm{Pic}^0(X) \quad \text{generico e per ogni } i > 0.$$

$\Rightarrow \chi(\omega_X) \geq 0$.
(Per tali α, abbiamo $\chi(\omega_X) = \chi(\omega_X \otimes \alpha) = h^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \geq 0$).

- Ogni componente irriducibile di $V^i_m(\omega_X)$ è un traslato per un punto di torsione di un sotto toro di $\mathrm{Pic}^0(X)$.
- I luoghi $V^i_m(\omega_X)$ forniscono informazioni riguardo: la geometria della mappa di Albanese, fibrazioni, mappe pluricanoniche, invarianti numerici (per esempio $\chi(\omega_X)$, $\mathrm{kod}(X)$, dimensione di Albanese...).

Problema

Capire il comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$ sotto equivalenze di categorie derivate.

Isomorfismo di Rouquier

Isomorfismo di Rouquier

Notazione: $\mathrm{Aut}^0(X) :=$ componente connessa del gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(X)$ contenente id_X.

Isomorfismo di Rouquier

Notazione: $\mathrm{Aut}^0(X) :=$ componente connessa del gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(X)$ contenente id_X.

Teorema (Rouquier)

Un'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ di categorie derivate induce un isomorfismo di gruppi algebrici

$$F_{\mathcal{E}} : \mathrm{Aut}^0(X) \times \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$$

tale che $\quad F_{\mathcal{E}}(\varphi, \alpha) = (\psi, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \times \psi)^* \mathcal{E} \simeq (\alpha^{-1} \boxtimes \beta) \otimes \mathcal{E}.$

Isomorfismo di Rouquier

Notazione: $\mathrm{Aut}^0(X) :=$ componente connessa del gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(X)$ contenente id_X.

Teorema (Rouquier)

Un'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ di categorie derivate induce un isomorfismo di gruppi algebrici

$$F_{\mathcal{E}} : \mathrm{Aut}^0(X) \times \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$$

tale che $\quad F_{\mathcal{E}}(\varphi, \alpha) = (\psi, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \times \psi)^* \mathcal{E} \simeq (\alpha^{-1} \boxtimes \beta) \otimes \mathcal{E}.$

Idea: L'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}}$ induce un isomorfismo

$$\mathrm{Auteq}(\mathbf{D}(X)) \simeq \mathrm{Auteq}(\mathbf{D}(Y))$$

$$\xi \quad \mapsto \quad \Phi_{\mathcal{E}} \circ \xi \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}.$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Auteq}^0(\mathbf{D}(X)) \simeq \mathrm{Auteq}^0(\mathbf{D}(Y))$$

e d'altra parte

$$\mathrm{Aut}^0(X)\times\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Auteq}^0(\mathbf{D}(X)), \quad \mathrm{Aut}^0(Y)\times\mathrm{Pic}^0(Y) \simeq \mathrm{Auteq}^0(\mathbf{D}(Y)).$$

$$(\varphi,\alpha) \quad \mapsto \quad \Phi_{(\mathrm{id}_{\mathbf{X}},\varphi)_*\alpha}, \qquad (\psi,\beta) \quad \mapsto \quad \Phi_{(\mathrm{id}_{\mathbf{Y}},\psi)_*\beta}.$$

Comportamento della varietà di Picard

Comportamento della varietà di Picard

Teorema (Popa–Schnell)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

Comportamento della varietà di Picard

Teorema (Popa–Schnell)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- $\mathrm{Pic}^0(X)$ *e* $\mathrm{Pic}^0(Y)$ *sono varietà abeliane isogene.*
- $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(Y)$ *a meno che* X *e* Y *sono fibrazioni étale localmente banali su varietà abeliane isogene di dimensione positiva (in particolare* $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_Y) = 0$*).*

Comportamento della varietà di Picard

Teorema (Popa–Schnell)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

- $\mathrm{Pic}^0(X)$ *e* $\mathrm{Pic}^0(Y)$ *sono varietà abeliane isogene.*
- $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(Y)$ *a meno che* X *e* Y *sono fibrazioni étale localmente banali su varietà abeliane isogene di dimensione positiva (in particolare* $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_Y) = 0$*).*
- $q(X) = q(Y)$.

Se $\mathrm{Aut}^0(X)$ è affine allora l'isomorfismo $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(Y)$ è indotto dall'isomorfismo di Rouquier.

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, *allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, *allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$.

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, *allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$. Denotiamo con Δ_X, Δ_Y le immersioni diagonali e con (id_Y, ψ) la mappa $y \mapsto (y, \psi(y))$.

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$*, allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$.
Denotiamo con Δ_X, Δ_Y le immersioni diagonali e con (id_Y, ψ) la mappa $y \mapsto (y, \psi(y))$.
Allora

$$0 \neq H^0(X, \omega_X \otimes \alpha)$$

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, *allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$.
Denotiamo con Δ_X, Δ_Y le immersioni diagonali e con (id_Y, ψ) la mappa $y \mapsto (y, \psi(y))$.
Allora

$$\begin{aligned} 0 &\neq H^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{X\times X}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)) \end{aligned}$$

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, *allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$.
Denotiamo con Δ_X, Δ_Y le immersioni diagonali e con (id_Y, ψ) la mappa $y \mapsto (y, \psi(y))$.
Allora

$$\begin{aligned} 0 &\neq H^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{X\times X}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{Y\times Y}\big(\Phi_{\mathcal{E}}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X), \Phi_{\mathcal{E}}\big(\Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)\big)\big) \end{aligned}$$

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, allora $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$.
Denotiamo con Δ_X, Δ_Y le immersioni diagonali e con (id_Y, ψ) la mappa $y \mapsto (y, \psi(y))$.
Allora

$$\begin{aligned}
0 &\neq H^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{X\times X}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{Y\times Y}\big(\Phi_{\mathcal{E}}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X), \Phi_{\mathcal{E}}\big(\Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)\big)\big) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{Y\times Y}\big((\mathrm{id}_Y, \psi)^*\Delta_{Y*}\mathcal{O}_Y, \omega_Y \otimes \beta\big).
\end{aligned}$$

Comportamento dei luoghi $V^i_m(\omega_X)$

Illustriamo prima il caso $i = 0$ e $m = 1$.

Proposizione

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$, *allora* $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^0(\omega_X)) = (\mathrm{id}_Y, V^0(\omega_Y))$.

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in V^0(\omega_X)$ e sia $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(Y) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$.
Denotiamo con Δ_X, Δ_Y le immersioni diagonali e con (id_Y, ψ) la mappa $y \mapsto (y, \psi(y))$.
Allora

$$
\begin{aligned}
0 &\neq H^0(X, \omega_X \otimes \alpha) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{X\times X}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{Y\times Y}\big(\Phi_{\mathcal{E}}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X), \Phi_{\mathcal{E}}\big(\Delta_{X*}(\omega_X \otimes \alpha)\big)\big) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{Y\times Y}\big((\mathrm{id}_Y, \psi)^*\Delta_{Y*}\mathcal{O}_Y, \omega_Y \otimes \beta\big).
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \psi = id_Y$ e $\beta \in V^0(\omega_Y)$.

Notazione: $V^i_m(\omega_X)_0 =$ unione delle componenti irriducibili di $V^i_m(\omega_X)$ passanti per l'origine $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Notazione: $V^i_m(\omega_X)_0 =$ unione delle componenti irriducibili di $V^i_m(\omega_X)$ passanti per l'origine $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Congettura 1

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ è un'equivalenza di categorie derivate, allora

$$F_{\mathcal{E}}\Big(\mathrm{id}_X, V^i_m(\omega_X)_0\Big) = \Big(\mathrm{id}_Y, V^i_m(\omega_Y)_0\Big) \quad \textit{per ogni} \quad m \geq 1 \textit{ e } i \geq 0.$$

Notazione: $V^i_m(\omega_X)_0$ = unione delle componenti irriducibili di $V^i_m(\omega_X)$ passanti per l'origine $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Congettura 1

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *è un'equivalenza di categorie derivate, allora*

$$F_{\mathcal{E}}\Big(\mathrm{id}_X, V^i_m(\omega_X)_0\Big) = \Big(\mathrm{id}_Y, V^i_m(\omega_Y)_0\Big) \quad \textit{per ogni} \quad m \geq 1 \textit{ e } i \geq 0.$$

Esiste una relazione tra l'invarianza dei luoghi di non annullamento e l'invarianza dei numeri di Hodge di tipo $h^i(X, \omega_X)$.

Notazione: $V^i_m(\omega_X)_0 =$ unione delle componenti irriducibili di $V^i_m(\omega_X)$ passanti per l'origine $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Congettura 1

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *è un'equivalenza di categorie derivate, allora*

$$F_{\mathcal{E}}\Big(\mathrm{id}_X, V^i_m(\omega_X)_0\Big) = \Big(\mathrm{id}_Y, V^i_m(\omega_Y)_0\Big) \quad \text{per ogni} \quad m \geq 1 \text{ e } i \geq 0.$$

Esiste una relazione tra l'invarianza dei luoghi di non annullamento e l'invarianza dei numeri di Hodge di tipo $h^i(X, \omega_X)$.

Problema 2

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *è un'equivalenza di categorie derivate, allora* $h^i(X, \omega_X) = h^i(Y, \omega_Y)$ *per ogni* $i \geq 0$.

Notazione: $V^i_m(\omega_X)_0 =$ unione delle componenti irriducibili di $V^i_m(\omega_X)$ passanti per l'origine $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Congettura 1

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ è un'equivalenza di categorie derivate, allora

$$F_{\mathcal{E}}\Big(\mathrm{id}_X, V^i_m(\omega_X)_0\Big) = \Big(\mathrm{id}_Y, V^i_m(\omega_Y)_0\Big) \quad \textit{per ogni} \quad m \geq 1 \textit{ e } i \geq 0.$$

Esiste una relazione tra l'invarianza dei luoghi di non annullamento e l'invarianza dei numeri di Hodge di tipo $h^i(X, \omega_X)$.

Problema 2

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ è un'equivalenza di categorie derivate, allora $h^i(X, \omega_X) = h^i(Y, \omega_Y)$ per ogni $i \geq 0$.

Teorema 1 (L.–Popa)

Congettura 1 $\Leftrightarrow$ *Problema* 2.

Notazione: $V^i_m(\omega_X)_0$ = unione delle componenti irriducibili di $V^i_m(\omega_X)$ passanti per l'origine $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Congettura 1

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ è un'equivalenza di categorie derivate, allora

$$F_{\mathcal{E}}\Big(\mathrm{id}_X, V^i_m(\omega_X)_0\Big) = \Big(\mathrm{id}_Y, V^i_m(\omega_Y)_0\Big) \quad \text{per ogni} \quad m \geq 1 \text{ e } i \geq 0.$$

Esiste una relazione tra l'invarianza dei luoghi di non annullamento e l'invarianza dei numeri di Hodge di tipo $h^i(X, \omega_X)$.

Problema 2

Se $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ è un'equivalenza di categorie derivate, allora $h^i(X, \omega_X) = h^i(Y, \omega_Y)$ per ogni $i \geq 0$.

Teorema 1 (L.–Popa)

Congettura 1 $\Leftrightarrow$ Problema 2.
Più precisamente, Congettura 1 per qualche indice $i \geq 0$ $\Leftrightarrow$ Problema 2 per lo stesso indice i.

I numeri di Hodge $h^0(X, \omega_X)$, $h^1(X, \omega_X)$, $h^{n-1}(X, \omega_X)$ e $h^n(X, \omega_X)$ sono invarianti sotto equivalenze di categorie derivate.

I numeri di Hodge $h^0(X, \omega_X)$, $h^1(X, \omega_X)$, $h^{n-1}(X, \omega_X)$ e $h^n(X, \omega_X)$ sono invarianti sotto equivalenze di categorie derivate.

Corollario

Se $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ e $n = \dim X = \dim Y$, allora per ogni intero $m \geq 1$ esistono isomorfismi:

- $V^0_m(\omega_X)_0 \simeq V^0_m(\omega_Y)_0$,
- $V^1_m(\omega_X)_0 \simeq V^1_m(\omega_Y)_0$,
- $V^{n-1}_m(\omega_X)_0 \simeq V^{n-1}_m(\omega_Y)_0$,
- $V^n_m(\omega_X)_0 \simeq V^n_m(\omega_Y)_0$.
- *Congettura 1 è vera in dimensione $n = 1, 2, 3$.*

Dimostrazione Teorema 1

L'implicazione Congettura 1 $\Rightarrow$ Problema 2 è immediata: basta prendere $\alpha = \mathcal{O}_X$ e $\beta = \mathcal{O}_Y$ e notare che $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{id}_Y, \mathcal{O}_Y)$.

Dimostrazione Teorema 1

L'implicazione Congettura 1 $\Rightarrow$ Problema 2 è immediata: basta prendere $\alpha = \mathcal{O}_X$ e $\beta = \mathcal{O}_Y$ e notare che $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{id}_Y, \mathcal{O}_Y)$.

Problema 2 $\Rightarrow$ Congettura 1:

Bisogna dimostrare che se $\alpha \in V^i(\omega_X)$ e $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(X) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$, allora $\psi = \mathrm{id}_Y$ e $\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ (per semplicità assumiamo $m = 1$).

Dimostrazione Teorema 1

L'implicazione Congettura 1 $\Rightarrow$ Problema 2 è immediata: basta prendere $\alpha = \mathcal{O}_X$ e $\beta = \mathcal{O}_Y$ e notare che $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{id}_Y, \mathcal{O}_Y)$.

Problema 2 $\Rightarrow$ Congettura 1:

Bisogna dimostrare che se $\alpha \in V^i(\omega_X)$ e $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(X) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$, allora $\psi = \mathrm{id}_Y$ e $\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ (per semplicità assumiamo $m = 1$).

Il fatto che $\psi = \mathrm{id}_Y$ segue similmente al caso $i = 0$, bisogna però usare risultati di Brion su azioni di gruppi non affini su varietà lisce.

Dimostrazione Teorema 1

L'implicazione Congettura 1 $\Rightarrow$ Problema 2 è immediata: basta prendere $\alpha = \mathcal{O}_X$ e $\beta = \mathcal{O}_Y$ e notare che $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{id}_Y, \mathcal{O}_Y)$.

Problema 2 $\Rightarrow$ Congettura 1:

Bisogna dimostrare che se $\alpha \in V^i(\omega_X)$ e
$F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\psi, \beta) \in \mathrm{Aut}^0(X) \times \mathrm{Pic}^0(Y)$, allora $\psi = \mathrm{id}_Y$ e
$\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ (per semplicità assumiamo $m = 1$).

Il fatto che $\psi = \mathrm{id}_Y$ segue similmente al caso $i = 0$, bisogna però usare risultati di Brion su azioni di gruppi non affini su varietà lisce.

Per dimostrare che $\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ produciamo nuove equivalenze di categorie derivate.
In particolare si dimostra che se $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, \alpha) = (\mathrm{id}_Y, \beta)$ e α e β hanno ordine finito, allora l'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ si solleva ad un'equivalenza $\mathbf{D}(X_\alpha) \simeq \mathbf{D}(Y_\beta)$ dove X_α e Y_β sono i rivestimenti ciclici associati ad α e β.

Per ipotesi, e per definizione di X_α e Y_β, abbiamo

$$0 \neq \sum_{j=0}^{p-1} h^i(X, \omega_X \otimes \alpha^j) = h^i(X_\alpha, \omega_{X_\alpha}) = h^i(Y_\beta, \omega_{Y_\beta}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^i(Y, \omega_Y \otimes \beta^j).$$

Per ipotesi, e per definizione di X_α e Y_β, abbiamo

$$0 \neq \sum_{j=0}^{p-1} h^i(X, \omega_X \otimes \alpha^j) = h^i(X_\alpha, \omega_{X_\alpha}) = h^i(Y_\beta, \omega_{Y_\beta}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^i(Y, \omega_Y \otimes \beta^j).$$

$\Rightarrow \beta^k \in V^i(\omega_Y)$ per qualche $k \geq 1$.

Per ipotesi, e per definizione di X_α e Y_β, abbiamo

$$0 \neq \sum_{j=0}^{p-1} h^i(X, \omega_X \otimes \alpha^j) = h^i(X_\alpha, \omega_{X_\alpha}) = h^i(Y_\beta, \omega_{Y_\beta}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^i(Y, \omega_Y \otimes \beta^j).$$

$\Rightarrow \beta^k \in V^i(\omega_Y)$ per qualche $k \geq 1$.

Per dimostrare che $\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ usiamo la struttura speciale di $V^i(\omega_Y)$:

$$V^i(\omega_Y) = \bigcup_I \tau_I + B_I$$

dove τ_I è un punto di *torsione* e B_I è un sotto-toro di $\mathrm{Pic}^0(Y)$ (Green–Lazarsfeld–Simpson).

Per ipotesi, e per definizione di X_α e Y_β, abbiamo

$$0 \neq \sum_{j=0}^{p-1} h^i(X, \omega_X \otimes \alpha^j) = h^i(X_\alpha, \omega_{X_\alpha}) = h^i(Y_\beta, \omega_{Y_\beta}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^i(Y, \omega_Y \otimes \beta^j).$$

$\Rightarrow \beta^k \in V^i(\omega_Y)$ per qualche $k \geq 1$.

Per dimostrare che $\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ usiamo la struttura speciale di $V^i(\omega_Y)$:

$$V^i(\omega_Y) = \bigcup_I \tau_I + B_I$$

dove τ_I è un punto di *torsione* e B_I è un sotto-toro di $\mathrm{Pic}^0(Y)$ (Green–Lazarsfeld–Simpson).

Infine notiamo che gli elementi il cui ordine è in

$$P := \{p \,\text{primo} \mid p \nmid \mathrm{ord}(\tau_I) \;\text{ per ogni } I\}$$

formano un insieme denso, quindi con un argomento di densità è sufficiente dimostrare l'enunciato solamente per tali elementi.

Per ipotesi, e per definizione di X_α e Y_β, abbiamo

$$0 \neq \sum_{j=0}^{p-1} h^i(X, \omega_X \otimes \alpha^j) = h^i(X_\alpha, \omega_{X_\alpha}) = h^i(Y_\beta, \omega_{Y_\beta}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^i(Y, \omega_Y \otimes \beta^j).$$

$\Rightarrow \beta^k \in V^i(\omega_Y)$ per qualche $k \geq 1$.

Per dimostrare che $\beta \in V^i(\omega_Y)_0$ usiamo la struttura speciale di $V^i(\omega_Y)$:

$$V^i(\omega_Y) = \bigcup_l \tau_l + B_l$$

dove τ_l è un punto di *torsione* e B_l è un sotto-toro di $\mathrm{Pic}^0(Y)$ (Green–Lazarsfeld–Simpson).

Infine notiamo che gli elementi il cui ordine è in

$$P := \{p \,\text{primo} \mid p \nmid \mathrm{ord}(\tau_l) \;\text{ per ogni } l\}$$

formano un insieme denso, quindi con un argomento di densità è sufficiente dimostrare l'enunciato solamente per tali elementi.

$$\beta^k \in \tau_l + B_l \subset V^i(\omega_Y) \Rightarrow \beta^k \in V^i(\omega_Y)_0 \Rightarrow \beta \in V^i(\omega_Y)_0.$$

Applicazioni I: Invarianza di quantità numeriche

Applicazioni I: Invarianza di quantità numeriche

Notazione: $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ mappa di Albanese.
Definizione: $a(X) := \dim \mathrm{alb}_X(X)$ dimensione di Albanese.

Applicazioni I: Invarianza di quantità numeriche

Notazione: $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ mappa di Albanese.
Definizione: $a(X) := \dim \mathrm{alb}_X(X)$ dimensione di Albanese.

Corollario

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *e sia* $n = \dim X = \dim Y$.

1. *Se* $n \leq 3$, *allora* $a(X) = a(Y)$.
2. *Se* $n > 3$ *e* $\mathrm{kod}(X) \geq 0$, *allora* $a(X) = a(Y)$.
3. *Se* $a(X) \geq n - 1$ *e* $\mathrm{kod}(X) \geq 0$, *allora* $\chi(\omega_X) = \chi(\omega_Y)$.
4. *Se* $n = 4$, $a(X) \geq 3$, *e* $\mathrm{kod}(X) \geq 0$, *allora*

$$h^{0,2}(X) = h^{0,2}(Y) \quad e \quad h^{1,3}(X) = h^{1,3}(Y).$$

Applicazioni I: Invarianza di quantità numeriche

Notazione: $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ mappa di Albanese.
Definizione: $a(X) := \dim \mathrm{alb}_X(X)$ dimensione di Albanese.

Corollario

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *e sia* $n = \dim X = \dim Y$.

1. *Se* $n \leq 3$, *allora* $a(X) = a(Y)$.
2. *Se* $n > 3$ *e* $\mathrm{kod}(X) \geq 0$, *allora* $a(X) = a(Y)$.
3. *Se* $a(X) \geq n - 1$ *e* $\mathrm{kod}(X) \geq 0$, *allora* $\chi(\omega_X) = \chi(\omega_Y)$.
4. *Se* $n = 4$, $a(X) \geq 3$, *e* $\mathrm{kod}(X) \geq 0$, *allora*

$$h^{0,2}(X) = h^{0,2}(Y) \quad e \quad h^{1,3}(X) = h^{1,3}(Y).$$

Oltre ai numeri di Hodge elencati precedentemente, in dimensione 4 solamente il numero $h^{1,2}$ è conosciuto essere invariante.

Applicazioni II: Fibrazioni su curve

Applicazioni II: Fibrazioni su curve

Fibrazione = Morfismo suriettivo con fibre connesse

Applicazioni II: Fibrazioni su curve

Fibrazione = Morfismo suriettivo con fibre connesse
L'invarianza di $V^{n-1}(\omega_X)_0$ fornisce informazioni riguardo al comportamento di fibrazioni su curve di genere ≥ 2.

Applicazioni II: Fibrazioni su curve

Fibrazione = Morfismo suriettivo con fibre connesse
L'invarianza di $V^{n-1}(\omega_X)_0$ fornisce informazioni riguardo al comportamento di fibrazioni su curve di genere ≥ 2.

Teorema (L.–Popa, L.–Schnell)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$. *Se* $f : X \to C$ *è una fibrazione su una curva liscia di genere* ≥ 2, *allora* Y *ammette una fibrazione* $h : Y \to C$ *sulla stessa curva. Inoltre, se* $\{C_1, \ldots, C_s\}$ *(risp.* $\{D_1, \ldots, D_r\}$*) denota l'insieme delle curve lisce di genere* ≥ 2 *sulle quali* X *(risp.* Y*) ammette una fibrazione allora* $s = r$ *e* $\{C_1, \ldots, C_s\} = \{D_1, \ldots, D_r\}$.

Dimostrazione

Per ogni intero $g \geq 2$ abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{fibrazioni } f : X \to C \text{ su curve lisce } C \text{ di genere } g\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{\text{componenti irriducibili } g\text{-dimensionali } Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0\}$$

Dimostrazione

Per ogni intero $g \geq 2$ abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{fibrazioni } f : X \to C \text{ su curve lisce } C \text{ di genere } g\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{\text{componenti irriducibili } g\text{-dimensionali } Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0\}$$

$$f : X \to C \quad \mapsto \quad f^*\mathrm{Pic}^0(C) \simeq f^*V^0(\omega_C) \subset V^{n-1}(\omega_X)_0$$

Dimostrazione

Per ogni intero $g \geq 2$ abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{fibrazioni } f : X \to C \text{ su curve lisce } C \text{ di genere } g\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{\text{componenti irriducibili } g\text{-dimensionali } Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0\}$$

$$f : X \to C \quad \mapsto \quad f^*\mathrm{Pic}^0(C) \simeq f^*V^0(\omega_C) \subset V^{n-1}(\omega_X)_0$$

$$Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0 \subset \mathrm{Pic}^0(X) \quad \mapsto \quad \mathrm{Stein}\ (X \stackrel{\mathrm{alb}_X}{\to} \mathrm{Alb}(X) \to \widehat{Z}).$$

Dimostrazione

Per ogni intero $g \geq 2$ abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{fibrazioni } f : X \to C \text{ su curve lisce } C \text{ di genere } g\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{\text{componenti irriducibili } g\text{-dimensionali } Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0\}$$

$$f : X \to C \quad \mapsto \quad f^*\mathrm{Pic}^0(C) \simeq f^* V^0(\omega_C) \subset V^{n-1}(\omega_X)_0$$

$$Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0 \subset \mathrm{Pic}^0(X) \quad \mapsto \quad \mathrm{Stein}\ (X \stackrel{\mathrm{alb}_X}{\to} \mathrm{Alb}(X) \to \widehat{Z}).$$

La teoria dell'annullamento generico assicura che l'immagine della fattorizzazione di Stein è una curva liscia.

Dimostrazione

Per ogni intero $g \geq 2$ abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{fibrazioni } f : X \to C \text{ su curve lisce } C \text{ di genere } g\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{\text{componenti irriducibili } g\text{-dimensionali } Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0\}$$

$$f : X \to C \quad \mapsto \quad f^*\mathrm{Pic}^0(C) \simeq f^*V^0(\omega_C) \subset V^{n-1}(\omega_X)_0$$

$$Z \subset V^{n-1}(\omega_X)_0 \subset \mathrm{Pic}^0(X) \quad \mapsto \quad \mathrm{Stein}\ (X \stackrel{\mathrm{alb}_X}{\to} \mathrm{Alb}(X) \to \widehat{Z}).$$

La teoria dell'annullamento generico assicura che l'immagine della fattorizzazione di Stein è una curva liscia.

Dal momento che $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, V^{n-1}(\omega_X)_0) = (\mathrm{id}_Y, V^{n-1}(\omega_Y)_0)$, abbiamo che se $f : X \to C$ con $g(C) \geq 2$, allora Y ammette una fibrazione $h : Y \to D$ su una curva D con $g(D) = g(C)$ e tale che

$$F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, f^*\mathrm{Pic}^0(C)) = (\mathrm{id}_Y, h^*\mathrm{Pic}^0(D)).$$

Per dimostrare che $C \simeq D$ guardiamo al nucleo $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(X \times Y)$ dell'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.

Per dimostrare che $C \simeq D$ guardiamo al nucleo $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(X \times Y)$ dell'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.
Mostreremo che un'opportuna modificazione di questo nucleo indurrà l'isomorfismo tra le due curve.

Per dimostrare che $C \simeq D$ guardiamo al nucleo $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(X \times Y)$ dell'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.
Mostreremo che un'opportuna modificazione di questo nucleo indurrà l'isomorfismo tra le due curve.

Scegliamo un fibrato lineare L su $X \times Y$ e definiamo

$$\mathcal{E}' := \mathbf{R}(f \times h)_*(\mathcal{E} \otimes L) \in \mathbf{D}(C \times D)$$

dove $f \times h : X \times Y \to C \times D$.

Per dimostrare che $C \simeq D$ guardiamo al nucleo $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(X \times Y)$ dell'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.
Mostreremo che un'opportuna modificazione di questo nucleo indurrà l'isomorfismo tra le due curve.

Scegliamo un fibrato lineare L su $X \times Y$ e definiamo

$$\mathcal{E}' := \mathbf{R}(f \times h)_*(\mathcal{E} \otimes L) \in \mathbf{D}(C \times D)$$

dove $f \times h : X \times Y \to C \times D$. Se L è sufficientemete ampio allora

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}' = (f \times h)(\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}).$$

Per dimostrare che $C \simeq D$ guardiamo al nucleo $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(X \times Y)$ dell'equivalenza $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$.
Mostreremo che un'opportuna modificazione di questo nucleo indurrà l'isomorfismo tra le due curve.

Scegliamo un fibrato lineare L su $X \times Y$ e definiamo

$$\mathcal{E}' := \mathbf{R}(f \times h)_*(\mathcal{E} \otimes L) \in \mathbf{D}(C \times D)$$

dove $f \times h : X \times Y \to C \times D$. Se L è sufficientemete ampio allora

$$\operatorname{Supp} \mathcal{E}' = (f \times h)(\operatorname{Supp} \mathcal{E}).$$

Segue da ciò, e dal fatto che $F_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_X, f^*\mathrm{Pic}^0(C)) = (\mathrm{id}_Y, h^*\mathrm{Pic}^0(D))$, che

$$\dim \operatorname{Supp} \mathcal{E}' = 1.$$

Guardiamo ora al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Supp}\mathcal{E} \arrow[r, two heads, "f\times h"] \arrow[d, two heads] & \operatorname{Supp}\mathcal{E}' \arrow[d] \\ X \arrow[r, two heads, "f"] & C \end{tikzcd}$$

dal quale sappiamo che $\operatorname{Supp}\mathcal{E} \to X$ è suriettivo con fibre connesse (Kawamata).

Guardiamo ora al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Supp}\mathcal{E} \arrow[r, two heads, "f\times h"] \arrow[d] & \operatorname{Supp}\mathcal{E}' \arrow[d] \\ X \arrow[r, two heads, "f"] & C \end{tikzcd}$$

dal quale sappiamo che $\operatorname{Supp}\mathcal{E} \to X$ è suriettivo con fibre connesse (Kawamata).
$\Rightarrow \operatorname{Supp}\mathcal{E}' \to C$ è suriettivo con fibre connesse
$\Rightarrow \operatorname{Supp}\mathcal{E}' \simeq C$.
Similmente $\operatorname{Supp}\mathcal{E}' \simeq D$
$\Rightarrow C \simeq D$. $\square$

Guardiamo ora al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Supp}\,\mathcal{E} \arrow[r, two heads, "f\times h"] \arrow[d] & \mathrm{Supp}\,\mathcal{E}' \arrow[d] \\ X \arrow[r, two heads, "f"] & C \end{tikzcd}$$

dal quale sappiamo che $\mathrm{Supp}\,\mathcal{E} \to X$ è suriettivo con fibre connesse (Kawamata).
$\Rightarrow \mathrm{Supp}\,\mathcal{E}' \to C$ è suriettivo con fibre connesse
$\Rightarrow \mathrm{Supp}\,\mathcal{E}' \simeq C$.
Similmente $\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}' \simeq D$
$\Rightarrow C \simeq D$. $\square$

Problema (Work in progress)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$. *Sia* $f : X \to C$ *una fibrazione su una curva liscia di genere almeno* 2 *in modo tale che* Y *ammette una fibrazione* $h : Y \to C$ *sulla stessa curva. E' vero che l'equivalenza* $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *induce equivalenze* $\mathbf{D}(X_c) \simeq \mathbf{D}(Y_c)$ *sulle fibre generiche delle due fibrazioni?*

Possiamo capire la geometria globale di due varietà D-equivalenti se queste ammettono fibrazioni speciali.

Teorema (L.–Popa)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *e che* $f : X \to C$ *è una fibrazione su una curva liscia di genere* ≥ 2.

- *Se* $f : X \to C$ *è una fibrazione di Fano, allora* X *e* Y *sono* K*-equivalenti.*

Possiamo capire la geometria globale di due varietà D-equivalenti se queste ammettono fibrazioni speciali.

Teorema (L.–Popa)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ *e che* $f : X \to C$ *è una fibrazione su una curva liscia di genere* ≥ 2.

- *Se* $f : X \to C$ *è una fibrazione di Fano, allora* X *e* Y *sono* K*-equivalenti.*
- *Se* ω_X^{-1} *è* f*-ampio (per esempio* f *è uno spazio di Mori), allora* $X \simeq Y$.

Possiamo capire la geometria globale di due varietà D-equivalenti se queste ammettono fibrazioni speciali.

Teorema (L.–Popa)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ e che $f : X \to C$ è una fibrazione su una curva liscia di genere ≥ 2.

- *Se $f : X \to C$ è una fibrazione di Fano, allora X e Y sono K-equivalenti.*
- *Se ω_X^{-1} è f-ampio (per esempio f è uno spazio di Mori), allora $X \simeq Y$.*

Dimostrazione. Sia F la fibra generica di $f : X \to C$. Sia $Z \subset \mathrm{Supp}\, \mathcal{E} \subset X \times Y$ una componente del supporto che surietta su X.

Possiamo capire la geometria globale di due varietà D-equivalenti se queste ammettono fibrazioni speciali.

Teorema (L.–Popa)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ e che $f : X \to C$ è una fibrazione su una curva liscia di genere ≥ 2.

- *Se $f : X \to C$ è una fibrazione di Fano, allora X e Y sono K-equivalenti.*
- *Se ω_X^{-1} è f-ampio (per esempio f è uno spazio di Mori), allora $X \simeq Y$.*

Dimostrazione. Sia F la fibra generica di $f : X \to C$. Sia $Z \subset \operatorname{Supp} \mathcal{E} \subset X \times Y$ una componente del supporto che surietta su X. Consideriamo il prodotto fibrato

$$\begin{tikzcd} Y & Z_F \arrow[l, "q_F"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_F"] & Z \arrow[d] \\ & F \arrow[r, hook] & X. \end{tikzcd}$$

Possiamo capire la geometria globale di due varietà D-equivalenti se queste ammettono fibrazioni speciali.

Teorema (L.–Popa)

Supponi $\mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)$ e che $f : X \to C$ è una fibrazione su una curva liscia di genere ≥ 2.

- *Se $f : X \to C$ è una fibrazione di Fano, allora X e Y sono K-equivalenti.*
- *Se ω_X^{-1} è f-ampio (per esempio f è uno spazio di Mori), allora $X \simeq Y$.*

Dimostrazione. Sia F la fibra generica di $f : X \to C$. Sia $Z \subset \operatorname{Supp} \mathcal{E} \subset X \times Y$ una componente del supporto che surietta su X. Consideriamo il prodotto fibrato

$$\begin{tikzcd} Y & Z_F \arrow[l, "q_F"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_F"] & Z \arrow[d] \\ & F \arrow[r, hook] & X. \end{tikzcd}$$

Risultati di Kawamata ci dicono che a meno di qualche potenza positiva, i pull-backs $p_F^*\omega_F^{-1}$ e $q_F^*\omega_Y^{-1}$ coincidono su Z_F. Quindi se F è Fano allora il morfismo q_F è finito.

Inoltre, se accade che $\dim Z = \dim X$, allora Z realizza una K-equivalenza tra X e Y (Kawamata). Supponi che $\dim Z > \dim X$.

Inoltre, se accade che $\dim Z = \dim X$, allora Z realizza una K-equivalenza tra X e Y (Kawamata). Supponi che $\dim Z > \dim X$.
$\Rightarrow \dim Z_F \geq \dim X = \dim Y$

Inoltre, se accade che $\dim Z = \dim X$, allora Z realizza una K-equivalenza tra X e Y (Kawamata). Supponi che $\dim Z > \dim X$.
$\Rightarrow \dim Z_F \geq \dim X = \dim Y \Rightarrow q_F$ è suriettiva.
$\Rightarrow \omega_Y^{-1}$ è nef
$\Rightarrow \omega_X^{-1}$ è nef.

Infine applichiamo un teorema di Qi Zhang sulla geometria di varietà con anticanonico nef:

$$\omega_X^{-1} \text{ nef } \Rightarrow \mathrm{alb}_X \text{ è suriettiva.}$$

Inoltre, se accade che $\dim Z = \dim X$, allora Z realizza una K-equivalenza tra X e Y (Kawamata). Supponi che $\dim Z > \dim X$.
$\Rightarrow \dim Z_F \geq \dim X = \dim Y \Rightarrow q_F$ è suriettiva.
$\Rightarrow \omega_Y^{-1}$ è nef
$\Rightarrow \omega_X^{-1}$ è nef.

Infine applichiamo un teorema di Qi Zhang sulla geometria di varietà con anticanonico nef:

$$\omega_X^{-1} \text{ nef } \Rightarrow \mathrm{alb}_X \text{ è suriettiva.}$$

Ma nel nostro caso:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "\mathrm{alb}_X"] \arrow[d, two heads, "f"] & \mathrm{Alb}(X) \arrow[d, two heads] \\ C \arrow[r, "\mathrm{alb}_C"] & J(C). \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow g(C) \leq 1$ (assurdo!).

Supponi ora che ω_X^{-1} è f-ampio e considera il diagramma commutativo indotto dalle mappe di Albanese:

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "\varphi"] \arrow[dl, "h"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

Supponi ora che ω_X^{-1} è f-ampio e considera il diagramma commutativo indotto dalle mappe di Albanese:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "\varphi"] \arrow[dl, "h"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Se per assurdo φ non è un morfismo, allora esiste una curva $B \subset Z$ tale che $q(B) = pt.$, $p(B) \neq pt$ e $p(B) \subset$ fibra di f.
Allora
$$0 = q^*\omega_Y^{-1} \,.\, B = p^*\omega_X^{-1} \,.\, B = \omega_X^{-1} \,.\, p(B) > 0.$$

Supponi ora che ω_X^{-1} è f-ampio e considera il diagramma commutativo indotto dalle mappe di Albanese:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "\varphi"] \arrow[dl, "h"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Se per assurdo φ non è un morfismo, allora esiste una curva $B \subset Z$ tale che $q(B) = pt.$, $p(B) \neq pt$ e $p(B) \subset$ fibra di f.
Allora

$$0 = q^*\omega_Y^{-1} \,.\, B = p^*\omega_X^{-1} \,.\, B = \omega_X^{-1} \,.\, p(B) > 0.$$

Assurdo!

Supponi ora che ω_X^{-1} è f-ampio e considera il diagramma commutativo indotto dalle mappe di Albanese:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "\varphi"] \arrow[dl, "h"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Se per assurdo φ non è un morfismo, allora esiste una curva $B \subset Z$ tale che $q(B) = pt.$, $p(B) \neq pt$ e $p(B) \subset$ fibra di f.
Allora

$$0 = q^*\omega_Y^{-1} . B = p^*\omega_X^{-1} . B = \omega_X^{-1} . p(B) > 0.$$

Assurdo!

Grazie!!