INVARIANZA DEI PLURIGENERI PER FOLIAZIONI SU SUPERFICI

ENRICA FLORIS
IMPERIAL COLLEGE LONDON

Sia X una superficie algebrica complessa liscia. Una foliazione in curve su X, che indicheremo con $(X, \mathcal{F})$ o $\mathcal{F}$, è il dato di un sottofibrato $T_{\mathcal{F}}$ di rango 1 del fibrato tangente di X tale che il quoziente sia localmente libero di rango uno al di fuori di un sottoinsieme finito $\mathcal{I} \subseteq X$

$$0 \to T_{\mathcal{F}} \to T_X \to I_Z N_{\mathcal{F}} \to 0.$$

I punti di $\mathcal{I} = \mathrm{Supp} Z$ sono i *punti singolari* di $\mathcal{F}$ e il fibrato $K_{\mathcal{F}} = T^*_{\mathcal{F}}$ è detto *fibrato canonico* della foliazione $\mathcal{F}$. Negli ultimi anni è stato molto utile allo studio delle foliazioni l'uso di metodi birazionali, che mettono in relazione le proprietà geometriche della foliazione con le proprietà del fibrato $K_{\mathcal{F}}$.
Due foliazioni $(X, \mathcal{F})$ e $(X', \mathcal{F}')$ sono *birazionalmente equivalenti* se esiste un'applicazione birazionale $\varphi \colon X \dashrightarrow X'$ tale che $T_{\mathcal{F}'} = \varphi^* T_{\mathcal{F}}$ sull'aperto dove φ è un isomorfismo e tale che φ (risp. φ^{-1}) contrae solo curve $\mathcal{F}$-invarianti (risp. $\mathcal{F}'$-invarianti) dove una curva C è detta *$\mathcal{F}$-invariante* se

$$T_C = T_{\mathcal{F}}|_C$$

come sottofibrati di $T_X|_C$.
Uno degli invarianti più importanti che descrivono le proprietà di un fibrato in rette L è la dimensione di Kodaira, che misura la crescita delle sezioni di L. Essa è definita come

$$\kappa(L) = \limsup_{m \to \infty} \frac{\log(h^0(X, mL))}{\log m}.$$

La dimensione di Kodaira di un fibrato L su una superficie può assumere i valori $\{-\infty, 0, 1, 2\}$. La dimensione di Kodaira di una foliazione $\kappa(\mathcal{F}) = \kappa(K_{\mathcal{F}})$ è un invariante birazionale: se $(X, \mathcal{F})$ e $(X', \mathcal{F}')$ sono birazionalmente equivalenti, allora $\kappa(\mathcal{F}) = \kappa(\mathcal{F}')$.

Nei loro fondamentali lavori, Brunella e McQuillan forniscono una classificazione delle foliazioni du superfici sul modello della classificazione di Enriques-Kodaira: le foliazioni con dimensione di Kodaira $\kappa(\mathcal{F}) \in \{-\infty, 0, 1\}$ sono classificate a meno di equivalenza birazionale. Il passo successivo alla classificazione delle varietà è l'analisi di come queste si comportano in famiglia. Brunella dimostra che, per una famiglia di foliazioni in curve su superfici $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \Delta}$, con qualche ipotesi tecnica sulle singolarità di $\mathcal{F}_t$, la dimensione di Kodaira $\kappa(\mathcal{F}_t)$ non dipende da t. Per analogia con il teorema di Invarianza dei plurigeneri di Siu, è naturale domandarsi se $\dim H^0(X_t, mK_{\mathcal{F}_t})$ dipenda da t. In questo seminario discuteremo in che misura un teorema di invarianza dei plurigeneri è vero e sotto quali ipotesi sulla famiglia di foliazioni $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \Delta}$.

Date: March 25, 2014.