Invarianza dei plurigeneri per foliazioni su superfici.
(con P. Cascini)

X superficie liscia proiettiva $/\mathbb{C}$

$\mathcal{F}$ foliazione su X è $\{(U_i, v_i)\}$ dove

$\{U_i\}$ ricoprimento aperto di X

v_i campo di vett su U_i con zeri isolati

su U_{ij} $\boxed{v_i = g_{ij} v_j}$ $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$

gli zeri di v_i sono le singolarità di $\mathcal{F}$

I $\{g_{ij}\}$ definiscono un fibrato in rette

$K_{\mathcal{F}}$ = canonico di $\mathcal{F}$

equivalentemente $\mathcal{F}$ è def da

$$0 \longrightarrow N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow I_Z K_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

→ $N^*_{\mathcal{F}}$ fibr. in rette (conormale di $\mathcal{F}$)

→ I_Z fascio di ideali, $\dim Z = 0$ $Z = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$

le curve integrali dei v_i si chiamano <u>foglie</u> di $\mathcal{F}$

C è <u>$\mathcal{F}$-invariante</u> se è unione di foglie.

Esempio Una fibrazione è una foliazione

$f : X \longrightarrow C$. Se f ha fibre ridotte

$$K_{\mathcal{F}} = K_{X/C}$$

Singolarità

p punto sing di $\mathcal{F}$, v campo di vett che def $\mathcal{F}$ in p

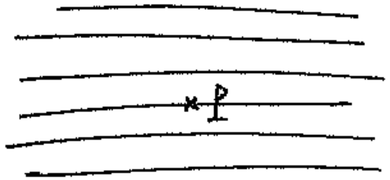
$(Dv)(p)$, λ_1, λ_2 autovalori di $(Dv)(p)$

Def p è una <u>singolarità ridotta</u> se almeno uno tra $\lambda_1 \lambda_2$ è $\neq 0$

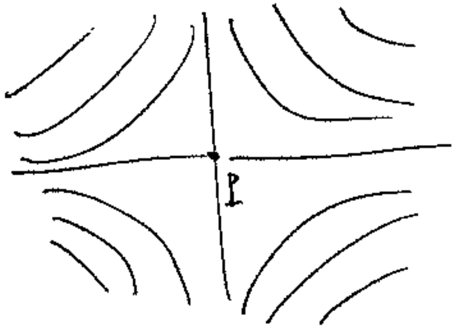
($\lambda_2 \neq 0$) e se $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$.

ESEMPI (locali)

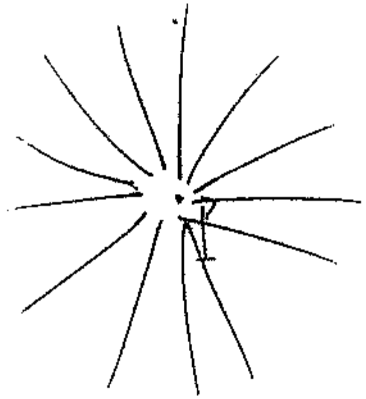
- p punto liscio per $\mathcal{F}$ $\quad$ $\mathcal{F}$ è data da $\dfrac{\partial}{\partial x}$



- p singolarità ridotta $x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$



• p sing non ridotta $\quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$



Fatti

→ $p \in X$ allora esiste almeno una curva $\mathcal{F}$-invariante per p (teorema della separatrice)

→ p sing ridotta allora le curve $\mathcal{F}$-invarianti per p sono a incroci normali (sono al più 2)

Scoppiamenti

$\mathcal{F}$ su X, $\varepsilon : \tilde{X} \longrightarrow X$ morf birazionale

$\mathcal{F} \rightsquigarrow$ foliaz su $\tilde{X} \setminus Exc(\varepsilon) \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{F}}$ su $\tilde{X}$ tale abbia zeri isolati.

Teorema (Seidenberg) X, $\mathcal{F}$ su X, allora $\exists\, \varepsilon : \hat{X} \longrightarrow X$ biraz tale $\tilde{\mathcal{F}}$ abbia singolarità ridotte.

Prop $\mathcal{F}$ su X con sing ridotte, $\varepsilon : \hat{X} \longrightarrow X$ allora

$$h^0(X, nK_{\mathcal{F}}) = h^0(\tilde{X}, nK_{\tilde{\mathcal{F}}})$$

Def $\mathcal{F}$ fol su X $\kappa(\mathcal{F}) = \kappa(K_{\tilde{\mathcal{F}}}) = \limsup_n \dfrac{\log h^0(\tilde{X}, nK_{\tilde{\mathcal{F}}})}{\log(n)}$

dove $\tilde{\mathcal{F}}$ su $\tilde{X}$ è come nel teor (Seidenberg)

⚠ se $\mathcal{F}$ non ridotta in generale $\kappa(\mathcal{F}) \neq \kappa(K_{\mathcal{F}})$.

Classificazione delle fol su superfici

[Brunella, McQuillan]

▷ $\kappa(\mathcal{F}) = 0$ allora modulo un rivest $\mathcal{F}$ è data da un campo di vettori globale

▷ $\kappa(\mathcal{F}) = 1$ allora ci sono 4 famiglie di fol

▷ $\kappa(\mathcal{F}) = 2$ tipo generale

metodi

→ MMP per foliazioni

→ studio delle dec di Zariski di $K_{\mathcal{F}} = P + N$
studio delle geom di N.

Deformazioni di foliazioni

[Brunella]

Def $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \Delta}$ famiglia di foliazioni con sing ridotte

1 – $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ morf liscio $\pi^{-1}(t) = X_t$ superficie

2 – $\mathcal{F}$ su $\mathcal{X}$ foliazione tangente alle fibre di π
($\mathcal{F}$ def $\mathcal{F}_t$ su X_t $\forall t$)

3 – $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap X_t = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_t)$ insieme finito

4 – $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_t)$ ridotte $\forall t$.

$\boxed{3} \Longrightarrow \exists\ K_{\mathcal{F}}\big|_{X_t} = K_{\mathcal{F}_t}$

Teorema (Brunella) $k(\mathcal{F}_t)$ non dipende da t.

Problema In che misura $h^0(X_t, mK_{\mathcal{F}_t})$ dipende da t ?

Risultati (Cascini, —)

▷ $k(\mathcal{F}) = 0$ se $X_t \not\simeq_{bir} \mathbb{P}^2$ allora $h^0(X_t, mK_{\mathcal{F}_t})$ non dip da t.

▷ $k(\mathcal{F}) = 1$ $h^0(X_t, mK_{\mathcal{F}_t})$ non dip da t per $m \gg 0$ e abbastanza divisibile.

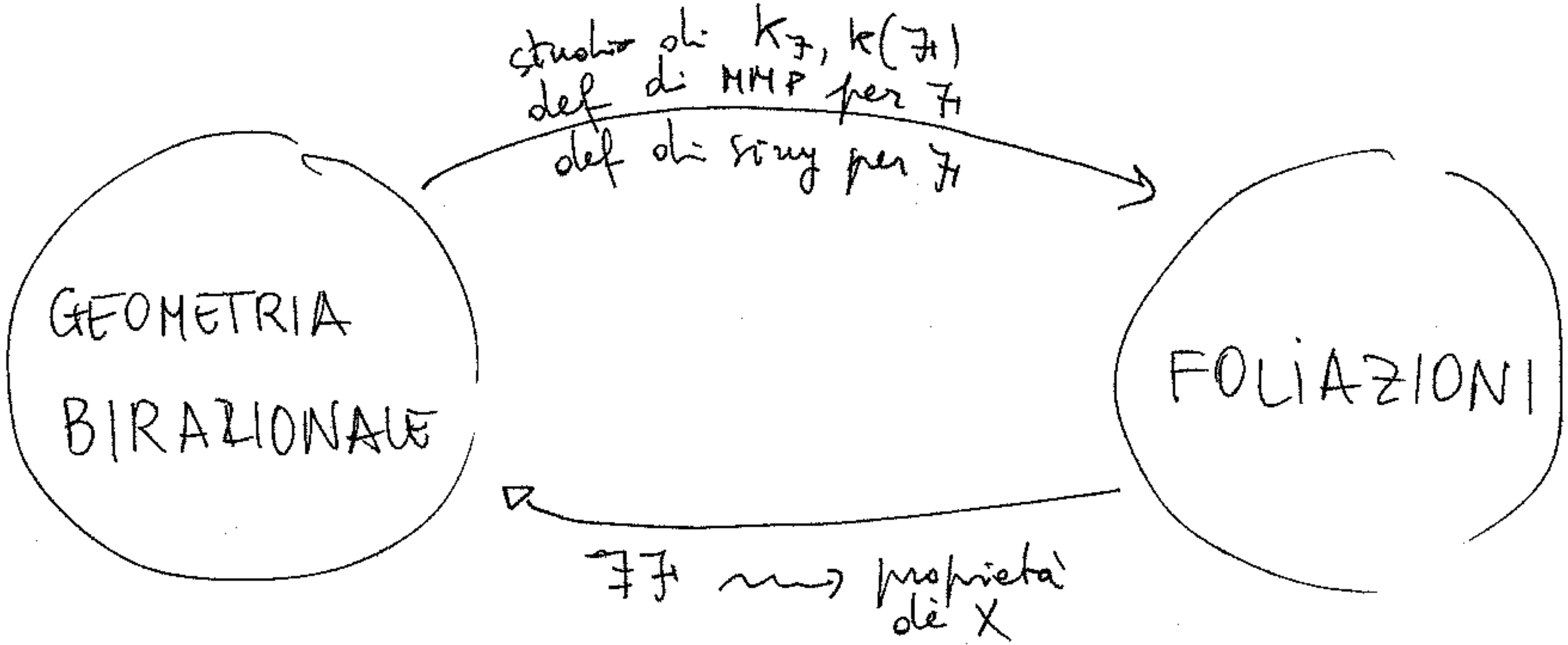
ESEMPIO 1 esiste $(X_t, \mathcal{F}_t)$ tale $h^0(X_k, K_{\mathcal{F}_t})$ dipende da t.

▷ $k(\mathcal{F}) = 2.a$ se ~~X_t~~ $\mathcal{F}_t$ è indotta da una fibrazione allora $h^0(X_t, mK_{\mathcal{F}_t})$ non dip da t per $m \gg 0$

ESEMPIO 2.a $(X_t, \mathcal{F}_t)$ tale $h^0(X_t, K_{\mathcal{F}_t})$ dipende da t

$\mathcal{F}_t$ indotta da una fibr $\forall t$

▷ $k(\mathcal{F}) = 2.b$ se $k(X_t) = 1$ allora $h^0(X_t, mK_t)$ per $m \gg 0$ non dipende da t.



Brunella McQuillan
Pereira Mendes Loray
Touzet

▷ [Pereira] limitatezza (boundedness) $\longleftrightarrow$ plurigeneri di $\mathcal{F}$

▷ Teorema (Siu, Păun) se $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ morf liscio
allora $h^0(X_t, mK_{X_t})$ non dipende da t.

dimostrazione / tecniche

Invarianza (Brunelle) $\Longrightarrow$ considerare $\kappa(\mathcal{F}) = 0, 1, 2$.

Lemma (Brunelle) $\exists P, N$ $\mathbb{Q}$-divisori su $\mathcal{X}$ tali

$$K_{\mathcal{F}} = P + N \quad e \quad \forall t \quad K_{\mathcal{F}_t} = P_t + N_t \text{ è una}$$

decomposizione di Zariski.

$\boxed{\kappa(\mathcal{F}) = 0}$ Lemma $\Longrightarrow$ invarianza per m abbastanza divisibile

Lemma Se $X_t \not\sim_{bir} \mathbb{P}^2$ allora

$$\text{mcm}\{\text{denom di } N_t\} \text{ non dipende da } t.$$

$\boxed{\kappa(\mathcal{F}) = 1}$

Lemma $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \Delta$, $\mathcal{D}$ div su $\mathcal{X}$ tale

- $\kappa(\mathcal{D}_t) = 1 \quad \forall t$
- $\mathcal{D} = P + N$ tale $\mathcal{D}_t = P_t + N_t$ decomp di Zariski

Allora $\exists$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \Delta \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

ν liscia, $\nu^{-1}(t)$ curva $\forall t$

$\exists\, \delta$ cartier su $\mathcal{C}$

$n \in \mathbb{N}$ tale che

$$nP = \varphi^* \delta$$

Il risultato segue da $\rightarrow$ genere di $\nu^{-1}(t)$ è costante

$\rightarrow$ RR per curve.

$\boxed{\kappa(\mathcal{F}) = 2}$

$K_{\mathcal{F}} = P + N$ Consideriamo $\pi : \mathcal{X} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{Y} \longrightarrow \Delta$

indotto da P

e $\forall t$ $\mathcal{Z}_t = \{ C_i \subseteq X_t \mid C_i \cdot P_t = 0 \text{ e } C_i \notin \operatorname{Supp} N_t \}$.

Def Una *foglia Gorenstein ellittica* è $\{C_i\}$ ciclo di curve razionali tale
- $C_i^2 \leq -2$ $\forall i$
- $\exists i_0$ $C_{i_0}^2 \leq -3$.

Def $\mathcal{F}$ foliazione *relativamente minimale* è tale $\nexists C_i$ $C_i^2 = -1$ $\mathcal{F}$ invariante.

Prop (Brunella, McQuillan) Se $\mathcal{F}$ è rel minimale su X e a singolarità ridotte, $\kappa(\mathcal{F}) = 2$, allora

1) Supp N e Z sono $\mathcal{F}$-invarianti

2) $\operatorname{Supp} N \cap Z = \emptyset$

3) $\operatorname{Supp} N \cup Z = \coprod \{\text{catene di curve razionali}\} \coprod \coprod \{\text{f.G.e.}\}$

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{Y}$$

OSS: 1 se non ci sono f.G.e allora le sing di $\mathcal{Y}_t$ sono razionali

OSS 2 $\Phi_* P$ è ampio $\Rightarrow$ $m \gg 0$ $m\Phi_* P_t$ molto ampio

$\Rightarrow h^0(Y_t, m\Phi_* P_t)$ non dipende da t.

$\nexists$ fGe $\Longrightarrow$ invarianza per $m \gg 0$.

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}_t \text{ indotta da una fibr} \\ k(X_t) = 1 \quad \forall t \end{array}\right\} \Longrightarrow$ non ci sono f.G.e.

$\boxed{\text{E ADESSO?}}$

$\longrightarrow$ studiare f.G.e e $K_{\mathcal{F}}\big|_{f.G.e}$

$\longrightarrow$ $X_t \sim_{bir} \mathbb{P}^2$

$\longrightarrow$ $N^*_{\mathcal{F}}$ è pseudoeffettivo.

$\boxed{\kappa(\mathcal{F}) = 1}$, ESEMPIO

C curva $g(C) \geq 2$ $\quad L_t = \omega_C + p_t - q_t$

tale $p_0 = q_0$ $\quad h^0(C, L_t) = \begin{cases} = g & \text{se } t = 0 \\ < g & \text{se } t \neq 0. \end{cases}$

L_t definisce $f_t : X_t \longrightarrow C$ fibrazione ellittica.

$f_t^{-1}(z)$ è ridotta $\forall z \in C$.

$$K_{\mathcal{F}_t} = K_{X_t/C} = f_t^* M_C^{(t)} = f_t^* L_t.$$

$h^0(X_t, K_{\mathcal{F}_t})$ dipende da t.