Operatori di chiusura su spazi di Zariski-Riemann di anelli di valutazione e applicazioni.

Carmelo Antonio Finocchiaro

Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi "Roma Tre"

Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati XII – Torino – 4–7 Giugno 2014

Terminologia e introduzione

Siano D un dominio e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

- Un dominio di valutazione V si dice *sopranello di valutazione di D* se $D \subseteq V \subseteq K$.
- Si dice che D è *di Prüfer* se $D_{\mathfrak{m}}$ è un dominio di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.
  1. Ogni dominio di valutazione è di Prüfer.
  2. Ogni dominio di Dedekind è di Prüfer.
  3. $\mathbf{Z} + T\mathbf{Q}[T]$ è di Prüfer.
- Una famiglia Σ di sopranelli di valutazione di D si dice *una rappresentazione di D* se $\bigcap \Sigma := \bigcap \{V : V \in \Sigma\} = D$.
- Una rappresentazione Σ di D si dice *irridondante* se, per ogni $W \in \Sigma$, si ha
$$\bigcap \{V \in \Sigma : V \neq W\} \supsetneq D$$

Lo studio sistematico delle rappresentazioni di un dominio è stato iniziato in [Gilmer–Heinzer, 1968].

Terminologia e introduzione

Siano D un dominio e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

- Un dominio di valutazione V si dice *sopranello di valutazione di D* se $D \subseteq V \subseteq K$.
- Si dice che D è *di Prüfer* se $D_{\mathfrak{m}}$ è un dominio di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.
  1. Ogni dominio di valutazione è di Prüfer.
  2. Ogni dominio di Dedekind è di Prüfer.
  3. $\mathbf{Z} + T\mathbf{Q}[T]$ è di Prüfer.
- Una famiglia Σ di sopranelli di valutazione di D si dice *una rappresentazione di D* se $\bigcap \Sigma := \bigcap \{V : V \in \Sigma\} = D$.
- Una rappresentazione Σ di D si dice *irridondante* se, per ogni $W \in \Sigma$, si ha

$$\bigcap \{V \in \Sigma : V \neq W\} \supsetneq D$$

Lo studio sistematico delle rappresentazioni di un dominio è stato iniziato in [Gilmer–Heinzer, 1968].

Terminologia e introduzione

Siano D un dominio e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

- Un dominio di valutazione V si dice *sopranello di valutazione di D* se $D \subseteq V \subseteq K$.
- Si dice che D è *di Prüfer* se $D_{\mathfrak{m}}$ è un dominio di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.
  1. Ogni dominio di valutazione è di Prüfer.
  2. Ogni dominio di Dedekind è di Prüfer.
  3. $\mathbf{Z} + T\mathbf{Q}[T]$ è di Prüfer.
- Una famiglia Σ di sopranelli di valutazione di D si dice *una rappresentazione di D* se $\bigcap \Sigma := \bigcap\{V : V \in \Sigma\} = D$.
- Una rappresentazione Σ di D si dice *irridondante* se, per ogni $W \in \Sigma$, si ha

$$\bigcap\{V \in \Sigma : V \neq W\} \supsetneq D$$

Lo studio sistematico delle rappresentazioni di un dominio è stato iniziato in [Gilmer–Heinzer, 1968].

Terminologia e introduzione

Siano D un dominio e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

- Un dominio di valutazione V si dice *sopranello di valutazione di D* se $D \subseteq V \subseteq K$.
- Si dice che D è *di Prüfer* se $D_{\mathfrak{m}}$ è un dominio di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.
  1. Ogni dominio di valutazione è di Prüfer.
  2. Ogni dominio di Dedekind è di Prüfer.
  3. $\mathbf{Z} + T\mathbf{Q}[T]$ è di Prüfer.
- Una famiglia Σ di sopranelli di valutazione di D si dice *una rappresentazione di D* se $\bigcap \Sigma := \bigcap\{V : V \in \Sigma\} = D$.
- Una rappresentazione Σ di D si dice *irridondante* se, per ogni $W \in \Sigma$, si ha

$$\bigcap\{V \in \Sigma : V \neq W\} \supsetneq D$$

Lo studio sistematico delle rappresentazioni di un dominio è stato iniziato in [Gilmer–Heinzer, 1968].

Terminologia e introduzione

Siano D un dominio e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

- Un dominio di valutazione V si dice *sopranello di valutazione di D* se $D \subseteq V \subseteq K$.
- Si dice che D è *di Prüfer* se $D_{\mathfrak{m}}$ è un dominio di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.
  1. Ogni dominio di valutazione è di Prüfer.
  2. Ogni dominio di Dedekind è di Prüfer.
  3. $\mathbf{Z} + T\mathbf{Q}[T]$ è di Prüfer.
- Una famiglia Σ di sopranelli di valutazione di D si dice *una rappresentazione di D* se $\bigcap \Sigma := \bigcap \{V : V \in \Sigma\} = D$.
- Una rappresentazione Σ di D si dice *irridondante* se, per ogni $W \in \Sigma$, si ha

$$\bigcap \{V \in \Sigma : V \neq W\} \supsetneq D$$

Lo studio sistematico delle rappresentazioni di un dominio è stato iniziato in [Gilmer–Heinzer, 1968].

Siano D un dominio, $K := \mathrm{Qz}(D)$, e Y, Z collezioni di sopranelli di valutazione di D.

Questione 1

Determinare condizioni topologiche su Y, Z affinché risulti

$$\bigcap Y = \bigcap Z$$

Questione 2

Determinare condizioni topologiche su Y, Z affinché risulti

$$\bigcap\{FV : V \in Y\} = \bigcap\{FW : W \in Z\}$$

per ogni D−sottomodulo $F \neq 0$ di K.

Spazi di Riemann-Zariski

Siano K un campo e $A \subseteq K$. Si pone

$$\mathrm{Zar}(K|A) := \{V : V \text{ è un dominio di valutazione}, \mathrm{Qz}(V) = K, V \subseteq A\}$$

la *topologia di Zariski su* $\mathrm{Zar}(K|A)$ è la topologia avente per base di aperti la collezione

$$\mathcal{B} := \{B_F := \mathrm{Zar}(K|A[F]) : F \subseteq K, F \text{ finito}\}$$

Se $K = \mathrm{Qz}(A)$, si porrà $\mathrm{Zar}(A) := \mathrm{Zar}(K|A)$. $\mathrm{Zar}(K|A)$, con la topologia di Zariski, si dice *spazio di Riemann–Zariski di K su A*.

- Zariski (1944) provò che $\mathrm{Zar}(K|A)$ è uno spazio compatto.
- $\mathrm{Zar}(K|A)$ ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite.
- (Dobbs-Fedder-Fontana, 1986) Se $\mathrm{Qz}(A) = K$, allora ogni chiuso irriducibile $C \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$ ha un unico *punto generico* (i.e., esiste un unico punto $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$ tale che $\overline{\{V\}} = C$).

Spazi di Riemann-Zariski

Siano K un campo e $A \subseteq K$. Si pone

$$\mathrm{Zar}(K|A) := \{V : V \text{ è un dominio di valutazione}, \mathrm{Qz}(V) = K, V \subseteq A\}$$

la *topologia di Zariski su* $\mathrm{Zar}(K|A)$ è la topologia avente per base di aperti la collezione

$$\mathcal{B} := \{B_F := \mathrm{Zar}(K|A[F]) : F \subseteq K, F \text{ finito}\}$$

Se $K = \mathrm{Qz}(A)$, si porrà $\mathrm{Zar}(A) := \mathrm{Zar}(K|A)$. $\mathrm{Zar}(K|A)$, con la topologia di Zariski, si dice *spazio di Riemann–Zariski di* K *su* A.

- Zariski (1944) provò che $\mathrm{Zar}(K|A)$ è uno spazio compatto.
- $\mathrm{Zar}(K|A)$ ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite.
- (Dobbs-Fedder-Fontana, 1986) Se $\mathrm{Qz}(A) = K$, allora ogni chiuso irriducibile $C \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$ ha un unico *punto generico* (i.e., esiste un unico punto $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$ tale che $\overline{\{V\}} = C$).

Spazi di Riemann-Zariski

Siano K un campo e $A \subseteq K$. Si pone

$$\mathrm{Zar}(K|A) := \{V : V \text{ è un dominio di valutazione}, \mathrm{Qz}(V) = K, V \subseteq A\}$$

la *topologia di Zariski su* $\mathrm{Zar}(K|A)$ è la topologia avente per base di aperti la collezione

$$\mathcal{B} := \{B_F := \mathrm{Zar}(K|A[F]) : F \subseteq K, F \text{ finito}\}$$

Se $K = \mathrm{Qz}(A)$, si porrà $\mathrm{Zar}(A) := \mathrm{Zar}(K|A)$. $\mathrm{Zar}(K|A)$, con la topologia di Zariski, si dice *spazio di Riemann–Zariski di K su A*.

- Zariski (1944) provò che $\mathrm{Zar}(K|A)$ è uno spazio compatto.
- $\mathrm{Zar}(K|A)$ ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite.
- (Dobbs-Fedder-Fontana, 1986) Se $\mathrm{Qz}(A) = K$, allora ogni chiuso irriducibile $C \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$ ha un unico *punto generico* (i.e., esiste un unico punto $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$ tale che $\overline{\{V\}} = C$).

Spazi di Riemann-Zariski

Siano K un campo e $A \subseteq K$. Si pone

$$\mathrm{Zar}(K|A) := \{V : V \text{ è un dominio di valutazione}, \mathrm{Qz}(V) = K, V \subseteq A\}$$

la *topologia di Zariski su* $\mathrm{Zar}(K|A)$ è la topologia avente per base di aperti la collezione

$$\mathcal{B} := \{B_F := \mathrm{Zar}(K|A[F]) : F \subseteq K, F \text{ finito}\}$$

Se $K = \mathrm{Qz}(A)$, si porrà $\mathrm{Zar}(A) := \mathrm{Zar}(K|A)$. $\mathrm{Zar}(K|A)$, con la topologia di Zariski, si dice *spazio di Riemann–Zariski di K su A*.

- Zariski (1944) provò che $\mathrm{Zar}(K|A)$ è uno spazio compatto.
- $\mathrm{Zar}(K|A)$ ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite.
- (Dobbs-Fedder-Fontana, 1986) Se $\mathrm{Qz}(A) = K$, allora ogni chiuso irriducibile $C \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$ ha un unico *punto generico* (i.e., esiste un unico punto $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$ tale che $\overline{\{V\}} = C$).

Teorema (Hochster, 1969)

Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. Esiste un anello A tale che X è omeomorfo a $\operatorname{Spec}(A)$.
2. X ha le seguenti proprietà:
   - X è compatto;
   - X ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite;
   - ogni chiuso irriducibile di X ha un unico punto generico.

Gli spazi soddisfacenti le condizioni equivalenti del precedente teorema si dicono *spazi spettrali*.

Dunque, se A è un dominio e $K = \operatorname{Qz}(A)$, allora $\operatorname{Zar}(K|A)$ è uno spazio spettrale.

Descrizione di $\mathrm{Zar}(K|A)$ come spazio spettrale e anelli di Kronecker

L. Kronecker (1882): estendere la Teoria della divisibilità ad "entità più generali". Sia D un dominio di Dedekind. Esibire un ampliamento

"buono" $\mathrm{Kr}(D)$ di D in modo che, ogni sottoinsieme finito di D abbia un MCD in $\mathrm{Kr}(D)$.

Costruzione di $\mathrm{Kr}(D)$

Sia T un'indeterminata su $K = \mathrm{Qz}(D)$. Per ogni polinomio $f := d_0 + d_1 T + \ldots d_n T^n \in D[T]$, sia $\mathfrak{c}(f) := (d_0, \ldots, d_n)D$. L'insieme

$$\mathrm{Kr}(D) := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in D[T], g \neq 0, \mathfrak{c}(f) \subseteq \mathfrak{c}(g) \right\} \subseteq K(T)$$

si dice *l'anello di funzioni di Kronecker di D*.

Descrizione di $\mathrm{Zar}(K|A)$ come spazio spettrale e anelli di Kronecker

L. Kronecker (1882): estendere la Teoria della divisibilità ad "entità più generali". Sia D un dominio di Dedekind. Esibire un ampliamento

"buono" $\mathrm{Kr}(D)$ di D in modo che, ogni sottoinsieme finito di D abbia un MCD in $\mathrm{Kr}(D)$.

Costruzione di $\mathrm{Kr}(D)$

Sia T un'indeterminata su $K = \mathrm{Qz}(D)$. Per ogni polinomio $f := d_0 + d_1 T + \ldots d_n T^n \in D[T]$, sia $\mathfrak{c}(f) := (d_0, \ldots, d_n)D$. L'insieme

$$\mathrm{Kr}(D) := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in D[T], g \neq 0, \mathfrak{c}(f) \subseteq \mathfrak{c}(g) \right\} \subseteq K(T)$$

si dice *l'anello di funzioni di Kronecker di D*.

Fatti

Sia D un dominio di Dedekind e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

1. $\mathrm{Kr}(D)$ è un dominio di Bezout tale che $D[T] \subseteq \mathrm{Kr}(D) \subseteq K(T)$ (in particolare $\mathrm{Qz}(\mathrm{Kr}(D)) = K(T)$).
2. Siano $d_0, d_1, \ldots, d_n \in D$ e $f := d_0 + d_1 T + \ldots + d_n T^n$. Allora
   - $(d_0, \ldots, d_n)\mathrm{Kr}(D) = f\mathrm{Kr}(D)$ (e dunque f è un MCD di $d_0, \ldots, d_n$ in $\mathrm{Kr}(D)$).
   - $f\mathrm{Kr}(D) \cap K = (d_0, \ldots, d_n)D = \mathfrak{c}(f)$ (in particolare, $\mathrm{Kr}(D) \cap K = D$).

Fatti

Sia D un dominio di Dedekind e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

1. $\mathrm{Kr}(D)$ è un dominio di Bezout tale che $D[T] \subseteq \mathrm{Kr}(D) \subseteq K(T)$ (in particolare $\mathrm{Qz}(\mathrm{Kr}(D)) = K(T)$).
2. Siano $d_0, d_1, \ldots, d_n \in D$ e $f := d_0 + d_1 T + \ldots + d_n T^n$. Allora
   - $(d_0, \ldots, d_n)\mathrm{Kr}(D) = f\mathrm{Kr}(D)$ (e dunque f è un MCD di $d_0, \ldots, d_n$ in $\mathrm{Kr}(D)$).
   - $f\mathrm{Kr}(D) \cap K = (d_0, \ldots, d_n)D = \mathfrak{c}(f)$ (in particolare, $\mathrm{Kr}(D) \cap K = D$).

Krull (1936): estensione della Teoria di Kronecker a ogni dominio integralmente chiuso.
Sia D un dominio integralmente chiuso, $K := \mathrm{Qz}(D)$, $\mathcal{I}(D) := \{\text{ideali} \neq 0 \text{ di } D\}$. Sia

$$b : \mathcal{I}(D) \longrightarrow \mathcal{I}(D) : \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^b := \bigcap\{\mathfrak{a}V : V \in \mathrm{Zar}(A)\}$$

Allora b è un operatore di chiusura e

$$(aD)^b = aD, (a\mathfrak{a})^b = a\mathfrak{a}^b \quad \forall a \in D - \{0\}, \mathfrak{a} \in \mathcal{I}(D)$$

(i.e. b è una *operazione star* di D). Allora

$$\mathrm{Kr}(D, b) := \left\{\frac{f}{g} : f, g \in D[T], g \neq 0 \text{ e } \mathfrak{c}(f)^b \subseteq \mathfrak{c}(g)^b\right\}$$

è detto *l'anello di funzioni di Kronecker di D, rispetto a b*, e generalizza la teoria di Kronecker, perché in un dominio di Dedekind si ha $b = \mathrm{Id}_{\mathcal{I}(D)}$.

Krull (1936): estensione della Teoria di Kronecker a ogni dominio integralmente chiuso.
Sia D un dominio integralmente chiuso, $K := \mathrm{Qz}(D)$, $\mathcal{I}(D) := \{\text{ideali} \neq 0 \text{ di } D\}$. Sia

$$b : \mathcal{I}(D) \longrightarrow \mathcal{I}(D) : \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^b := \bigcap\{\mathfrak{a}V : V \in \mathrm{Zar}(A)\}$$

Allora b è un operatore di chiusura e

$$(aD)^b = aD, (a\mathfrak{a})^b = a\mathfrak{a}^b \quad \forall a \in D - \{0\}, \mathfrak{a} \in \mathcal{I}(D)$$

(i.e. b è una *operazione star* di D). Allora

$$\mathrm{Kr}(D, b) := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in D[T], g \neq 0 \text{ e } \mathfrak{c}(f)^b \subseteq \mathfrak{c}(g)^b \right\}$$

è detto *l'anello di funzioni di Kronecker di D, rispetto a b*, e generalizza la teoria di Kronecker, perché in un dominio di Dedekind si ha $b = \mathrm{Id}_{\mathcal{I}(D)}$.

Fatti

Sia D un dominio integralmente chiuso e $K := \mathrm{Qz}(D)$.

1. $\mathrm{Kr}(D, b)$ è un dominio di Bézout e $D[T] \subseteq \mathrm{Kr}(D, b) \subseteq K(T)$ (dunque $\mathrm{Qz}(\mathrm{Kr}(D, b)) = K(T)$).
2. Siano $d_0, \dots, d_n \in D$ e $f := d_0 + \dots + d_n T^n \in D[T]$. Allora:
   - $(d_0, \dots, d_n)\mathrm{Kr}(D, b) = f\mathrm{Kr}(D, b)$ (dunque, f è un MCD di $d_0, \dots, d_n$ in $\mathrm{Kr}(D, b)$).
   - $f\mathrm{Kr}(D, b) \cap K = ((d_0, \dots, d_n)D)^b = \mathfrak{c}(f)^b$ (in particolare, $\mathrm{Kr}(D, b) \cap K = D^b = D$).

Teorema (Dobbs-Fontana, 1986)

1. Se P è un dominio di Prüfer (i.e., $P_{\mathfrak{m}}$ è di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(P)$), allora la mappa naturale $\pi : \mathrm{Zar}(P) \longrightarrow \mathrm{Spec}(P)$ è un omeomorfismo.
2. Siano K un campo, A un dominio tale che $\mathrm{Qz}(A) = K$. Allora $\mathrm{Zar}(A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b))$.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b)) & \longrightarrow & \mathrm{Zar}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b)) & \longrightarrow & \mathrm{Zar}(A) \\
\mathfrak{q} & \mapsto & \mathrm{Kr}(\overline{A}, b)_{\mathfrak{q}} & \mapsto & \mathrm{Kr}(\overline{A}, b)_{\mathfrak{q}} \cap K
\end{array}
$$

Come si può rappresentare $\mathrm{Zar}(K|A)$ come spazio spettrale, quando $K \neq \mathrm{Qz}(A)$?

Teorema (Dobbs-Fontana, 1986)

1. Se P è un dominio di Prüfer (i.e., $P_\mathfrak{m}$ è di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(P)$), allora la mappa naturale $\pi : \mathrm{Zar}(P) \longrightarrow \mathrm{Spec}(P)$ è un omeomorfismo.
2. Siano K un campo, A un dominio tale che $\mathrm{Qz}(A) = K$. Allora $\mathrm{Zar}(A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b))$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b)) & \longrightarrow & \mathrm{Zar}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b)) & \longrightarrow & \mathrm{Zar}(A) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \mathrm{Kr}(\overline{A}, b)_\mathfrak{q} & \mapsto & \mathrm{Kr}(\overline{A}, b)_\mathfrak{q} \cap K \end{array}$$

Come si può rappresentare $\mathrm{Zar}(K|A)$ come spazio spettrale, quando $K \neq \mathrm{Qz}(A)$?

Teorema (Dobbs-Fontana, 1986)

1. Se P è un dominio di Prüfer (i.e., $P_{\mathfrak{m}}$ è di valutazione, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(P)$), allora la mappa naturale $\pi : \mathrm{Zar}(P) \longrightarrow \mathrm{Spec}(P)$ è un omeomorfismo.
2. Siano K un campo, A un dominio tale che $\mathrm{Qz}(A) = K$. Allora $\mathrm{Zar}(A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b))$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b)) & \longrightarrow & \mathrm{Zar}(\mathrm{Kr}(\overline{A}, b)) & \longrightarrow & \mathrm{Zar}(A) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \mathrm{Kr}(\overline{A}, b)_{\mathfrak{q}} & \mapsto & \mathrm{Kr}(\overline{A}, b)_{\mathfrak{q}} \cap K \end{array}$$

Come si può rappresentare $\mathrm{Zar}(K|A)$ come spazio spettrale, quando $K \neq \mathrm{Qz}(A)$?

Siano K un campo, A un *qualsiasi* sottoanello di K, e sia $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$, $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ una valutazione di V. Allora la funzione $v_b : K[T] \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ tale che

$$v_b(k_0 + k_1 T + \dots k_n T^n) := \begin{cases} \min\limits_{0 \leq i \leq n} \{v(k_i)\} & \text{se } k_0 + k_1 T + \dots k_n T^n \neq 0 \\ \infty & \text{se } k_0 + k_1 T + \dots k_n T^n = 0 \end{cases}$$

si estende in modo naturale ad una valutazione v_b di $K(T)$, detta *estensione banale (o gaussiana) di v a $K(T)$*. Sia $V(T)$ l'anello di valutazione di v_b.

Fatti

Siano K un campo, A un sottoanello di K.

1. Se $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$, allora $V(T) = \mathrm{Kr}(V, b)$. Inoltre, se $\mathfrak{m}_V$ è il massimale di V, allora $V(T) = V[T]_{\mathfrak{m}_V[T]}$.
2. Sia adesso $\emptyset \neq Y \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$, e si ponga

$$H(Y) := \bigcap \{V(T) : V \in Y\}$$

- $H(Y)$ è un dominio di Bezout, $\mathrm{Qz}(H(Y)) = K(T)$ (anche quando $\mathrm{Qz}(\bigcap Y) \subsetneq K$!!!).
- **La mappa naturale** $\varphi_Y : \mathrm{Zar}(H(Y)) \longrightarrow \mathrm{Zar}(K|A)$, $W \mapsto W \cap K$ **è un'immersione topologica.**
- Se $Y := \mathrm{Zar}(K|A)$, allora φ_Y è un omeomorfismo.

Teorema (FFL)

$\mathrm{Zar}(K|A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(H(\mathrm{Zar}(K|A)))$.

Fatti

Siano K un campo, A un sottoanello di K.

1. Se $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$, allora $V(T) = \mathrm{Kr}(V, b)$. Inoltre, se $\mathfrak{m}_V$ è il massimale di V, allora $V(T) = V[T]_{\mathfrak{m}_V[T]}$.
2. Sia adesso $\emptyset \neq Y \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$, e si ponga

$$H(Y) := \bigcap\{V(T) : V \in Y\}$$

- $H(Y)$ è un dominio di Bezout, $\mathrm{Qz}(H(Y)) = K(T)$ (anche quando $\mathrm{Qz}(\bigcap Y) \subsetneq K$!!!).
- **La mappa naturale $\varphi_Y : \mathrm{Zar}(H(Y)) \longrightarrow \mathrm{Zar}(K|A)$, $W \mapsto W \cap K$ è un'immersione topologica.**
- Se $Y := \mathrm{Zar}(K|A)$, allora φ_Y è un omeomorfismo.

Teorema (FFL)

$\mathrm{Zar}(K|A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(H(\mathrm{Zar}(K|A)))$.

Fatti

Siano K un campo, A un sottoanello di K.

1. Se $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$, allora $V(T) = \mathrm{Kr}(V, b)$. Inoltre, se $\mathfrak{m}_V$ è il massimale di V, allora $V(T) = V[T]_{\mathfrak{m}_V[T]}$.
2. Sia adesso $\emptyset \neq Y \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$, e si ponga

$$H(Y) := \bigcap\{V(T) : V \in Y\}$$

- $H(Y)$ è un dominio di Bezout, $\mathrm{Qz}(H(Y)) = K(T)$ (anche quando $\mathrm{Qz}(\bigcap Y) \subsetneq K$!!!).
- **La mappa naturale $\varphi_Y : \mathrm{Zar}(H(Y)) \longrightarrow \mathrm{Zar}(K|A)$, $W \mapsto W \cap K$ è un'immersione topologica.**
- Se $Y := \mathrm{Zar}(K|A)$, allora φ_Y è un omeomorfismo.

Teorema (FFL)

$\mathrm{Zar}(K|A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(H(\mathrm{Zar}(K|A)))$.

Fatti

Siano K un campo, A un sottoanello di K.

1. Se $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$, allora $V(T) = \mathrm{Kr}(V, b)$. Inoltre, se $\mathfrak{m}_V$ è il massimale di V, allora $V(T) = V[T]_{\mathfrak{m}_V[T]}$.
2. Sia adesso $\emptyset \neq Y \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)$, e si ponga

$$H(Y) := \bigcap \{V(T) : V \in Y\}$$

- $H(Y)$ è un dominio di Bezout, $\mathrm{Qz}(H(Y)) = K(T)$ (anche quando $\mathrm{Qz}(\bigcap Y) \subsetneq K$!!!).
- **La mappa naturale** $\varphi_Y : \mathrm{Zar}(H(Y)) \longrightarrow \mathrm{Zar}(K|A)$, $W \mapsto W \cap K$ **è un'immersione topologica.**
- Se $Y := \mathrm{Zar}(K|A)$, allora φ_Y è un omeomorfismo.

Teorema (FFL)

$\mathrm{Zar}(K|A)$ è canonicamente omeomorfo a $\mathrm{Spec}(H(\mathrm{Zar}(K|A)))$.

Topologia e rappresentazioni.

Siano D un dominio, $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$.

Questione 1

Si trovino condizioni topologiche su Y, Z affinché risulti

$$\bigcap Y = \bigcap Z$$

Tentativo

Se $\overline{Y} = \overline{Z}$, è vero che $\bigcap Y = \bigcap Z$?

NO!!!

Infatti, sia, per esempio $D := \mathbf{Z}$. $Y := \{\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(p)} : p \text{ primo } p \neq 2\}$, $Z := \mathrm{Zar}(\mathbf{Z})$. Allora $\overline{Y} = \overline{Z} = Z$, $\bigcap Z = \mathbf{Z}$ MA $\frac{1}{2} \in \bigcap Y - \mathbf{Z}$.

La topologia costruibile

Definizione (Grothendieck–Dieudonné)

Sia X uno spazio spettrale. *La topologia costruibile su* X è la topologia meno fine fra quelle per le quali gli aperti compatti di X sono clopen.
$X^{\mathrm{c}} := X$, con la topologia costruibile.

Fatti

Sia $(X, \mathcal{S})$ uno spazio spettrale.

1. $\mathcal{S}$ è meno fine della topologia costruibile.
2. X^{c} è uno spazio spettrale di Hausdorff e totalmente sconnesso.
3. Se $(X, \mathcal{S})$ è noetheriano, allora i clopen di X^{c} sono precisamente gli insiemi *costruibili*, secondo Chevalley (i.e., unioni finite di insiemi localmente chiusi).

La topologia costruibile

Definizione (Grothendieck–Dieudonné)

Sia X uno spazio spettrale. *La topologia costruibile su* X è la topologia meno fine fra quelle per le quali gli aperti compatti di X sono clopen. $X^{\mathrm{c}} := X$, con la topologia costruibile.

Fatti

Sia $(X, \mathcal{S})$ uno spazio spettrale.

1. $\mathcal{S}$ è meno fine della topologia costruibile.
2. X^{c} è uno spazio spettrale di Hausdorff e totalmente sconnesso.
3. Se $(X, \mathcal{S})$ è noetheriano, allora i clopen di X^{c} sono precisamente gli insiemi *costruibili*, secondo Chevalley (i.e., unioni finite di insiemi localmente chiusi).

La topologia costruibile

Definizione (Grothendieck–Dieudonné)

Sia X uno spazio spettrale. *La topologia costruibile su* X è la topologia meno fine fra quelle per le quali gli aperti compatti di X sono clopen.
$X^{\mathrm{c}} := X$, con la topologia costruibile.

Fatti

Sia $(X, \mathcal{S})$ uno spazio spettrale.

1. $\mathcal{S}$ è meno fine della topologia costruibile.
2. X^{c} è uno spazio spettrale di Hausdorff e totalmente sconnesso.
3. Se $(X, \mathcal{S})$ è noetheriano, allora i clopen di X^{c} sono precisamente gli insiemi *costruibili*, secondo Chevalley (i.e., unioni finite di insiemi localmente chiusi).

La topologia costruibile

Definizione (Grothendieck–Dieudonné)

Sia X uno spazio spettrale. *La topologia costruibile su* X è la topologia meno fine fra quelle per le quali gli aperti compatti di X sono clopen.
$X^{\mathrm{c}} := X$, con la topologia costruibile.

Fatti

Sia $(X, \mathcal{S})$ uno spazio spettrale.

1. $\mathcal{S}$ è meno fine della topologia costruibile.
2. X^{c} è uno spazio spettrale di Hausdorff e totalmente sconnesso.
3. Se $(X, \mathcal{S})$ è noetheriano, allora i clopen di X^{c} sono precisamente gli insiemi *costruibili*, secondo Chevalley (i.e., unioni finite di insiemi localmente chiusi).

Teorema (FFL)

Siano K un campo, A un sottoanello di K, $U \subseteq \mathrm{Zar}(K|A)^{\mathrm{c}}$. Siano $Y, Z \subseteq U$. Allora:

$$\overline{Y}^{\mathrm{c}} \cap U = \overline{Z}^{\mathrm{c}} \cap U \Longrightarrow \bigcap Y = \bigcap Z.$$

In particolare

$$\bigcap\{V : V \in Y\} = \bigcap\{V : V \in \overline{Y}^{\mathrm{c}}\}$$

Vale il viceversa? **NO!!!** Per esempio, sia $V \subsetneq K$, $V \in \mathrm{Zar}(K|A)$. Allora $V \cap K = V$, ma $\{V, K\} = \overline{\{V, K\}}^{\mathrm{c}} \neq \overline{\{V\}}^{\mathrm{c}} = \{V\}$.

Siano D un dominio, $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$.

Questione 2

Determinare condizioni topologiche su Y, Z affinché risulti

$$\bigcap\{FV : V \in Y\} = \bigcap\{FW : W \in Z\}$$

per ogni $D-$sottomodulo $F \neq 0$ di K.

Definizione (Huckaba, 1989, Okabe-Matsuda, 1994)

Siano D un dominio, $K := \mathrm{Qz}(D)$, $\overline{F}(D) := \{D - \text{sottomoduli di } K\} \setminus \{0\}$. Una funzione $\star : \overline{F}(D) \longrightarrow \overline{F}(D)$, $F \mapsto F^\star$, è una *operazione semistar su* D se $\star$ è un operatore di chiusura e $(kE)^\star = kE^\star$, per ogni $k \in K^*$, $E \in \overline{F}(D)$.

- L'identità $\mathrm{Id} : \overline{F}(D) \longrightarrow \overline{F}(D)$ è una operazione semistar.
- La chiusura divisoriale $v : \overline{F}(D) \longrightarrow \overline{F}(D)$, $F \mapsto F^v := (D : (D : F))$ è una operazione semistar.
- Se $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$, la mappa $\wedge_Y : F \mapsto \bigcap\{FV : V \in Y\}$ è una operazione semistar, detta *valutativa*. In particolare $b = \wedge_{\mathrm{Zar}(D)}$.

Questione 2

Determinare condizioni topologiche su Y, Z affinché risulti

$$\bigcap\{FV : V \in Y\} = \bigcap\{FW : W \in Z\}$$

per ogni $D-$sottomodulo $F \neq 0$ di K.

Possiamo riformulare la Questione 2 usando il linguaggio delle operazioni semistar.

Questione 2'

Determinare condizioni topologiche su Y, Z in modo che $\wedge_Y = \wedge_Z$.

MA $\overline{Y}^{\mathrm{c}} = \overline{Z}^{\mathrm{c}} \not\Longrightarrow \wedge_Y = \wedge_Z$.

Esempio

Esiste un dominio di Prüfer D, $\dim(D) = 1$, tale che (0) è isolato in $\mathrm{Spec}(D)^{\mathrm{c}}$, $\mathrm{Max}(D) = \{\mathfrak{m}_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\mathfrak{m}_\infty\}$, dove $\mathfrak{m}_\infty$ è l'unico primo non f. g., e $\mathfrak{m}_\infty \in \overline{\{\mathfrak{m}_n : n \in \mathbf{N}\}}^{\mathrm{c}}$.

D Prüfer $\Longrightarrow \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{c}} \longrightarrow \mathrm{Spec}(D)^{\mathrm{c}}$ è un omeomorfismo. Allora K è punto isolato in $\mathrm{Zar}(D)$ e, posto

$$Y := \{A_{\mathfrak{m}_n} : n \in \mathbf{N}\} \qquad Z := \{A_{\mathfrak{m}_\infty}\} \cup Y$$

allora $\overline{Y}^{\mathrm{c}} = Z = \overline{Z}^{\mathrm{c}}$. Dunque $\wedge_Z = b = \mathrm{Id}$. Tuttavia $(\mathfrak{m}_\infty)^{\wedge_Y} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{m}_\infty D_{\mathfrak{m}_n} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_{\mathfrak{m}_n} = D$. Dunque $\wedge_Y \neq \wedge_Z$.

MA $\overline{Y}^{\mathrm{c}} = \overline{Z}^{\mathrm{c}} \not\Longrightarrow \wedge_Y = \wedge_Z$.

Esempio

Esiste un dominio di Prüfer D, $\dim(D) = 1$, tale che (0) è isolato in $\mathrm{Spec}(D)^{\mathrm{c}}$, $\mathrm{Max}(D) = \{\mathfrak{m}_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\mathfrak{m}_\infty\}$, dove $\mathfrak{m}_\infty$ è l'unico primo non f. g., e $\mathfrak{m}_\infty \in \overline{\{\mathfrak{m}_n : n \in \mathbf{N}\}}^{\mathrm{c}}$.
D Prüfer $\Longrightarrow \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{c}} \longrightarrow \mathrm{Spec}(D)^{\mathrm{c}}$ è un omeomorfismo. Allora K è punto isolato in $\mathrm{Zar}(D)$ e, posto

$$Y := \{A_{\mathfrak{m}_n} : n \in \mathbf{N}\} \qquad Z := \{A_{\mathfrak{m}_\infty}\} \cup Y$$

allora $\overline{Y}^{\mathrm{c}} = Z = \overline{Z}^{\mathrm{c}}$. Dunque $\wedge_Z = b = \mathrm{Id}$. Tuttavia $(\mathfrak{m}_\infty)^{\wedge_Y} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{m}_\infty D_{\mathfrak{m}_n} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} D_{\mathfrak{m}_n} = D$. Dunque $\wedge_Y \neq \wedge_Z$.

Definizione

Sia $\star$ un'operazione semistar su D. Allora la mappa $\star_f$ definita da

$$F^{\star_f} := \bigcup \{G^\star : G \subseteq F, F \in \overline{F}(D), G \text{ finitamente generato}\}$$

è una operazione semistar su D, detta *chiusura di tipo finito di* $\star$.
L'operazione $\star$ si dice *di tipo finito* se $\star = \star_f$.

- Id, b sono di tipo finito. Per ogni $\star$, $\star_f$ è di tipo finito.
- $v : F \mapsto (D : (D : F))$ può non essere di tipo finito.

Se $\star, \sharp$ sono operazioni semistar su D, allora $\star_f = \sharp_f \iff F^\star = F^\sharp$, per ogni $F \in \overline{F}(D)$ finitamente generato.

Teorema (FFL)

Siano D un dominio, $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora

$$\overline{Y}^{\mathrm{c}} = \overline{Z}^{\mathrm{c}} \Longrightarrow (\wedge_Y)_f = (\wedge_Z)_f$$

Il viceversa è falso: basta prendere $Y := \{V \subsetneq W\}, Z := \{V\}$.

Definizione

Sia $\star$ un'operazione semistar su D. Allora la mappa $\star_f$ definita da

$$F^{\star_f} := \bigcup \{G^\star : G \subseteq F, F \in \overline{F}(D), G \text{ finitamente generato}\}$$

è una operazione semistar su D, detta *chiusura di tipo finito di* $\star$. L'operazione $\star$ si dice *di tipo finito* se $\star = \star_f$.

- Id, b sono di tipo finito. Per ogni $\star$, $\star_f$ è di tipo finito.
- $v : F \mapsto (D : (D : F))$ può non essere di tipo finito.

Se $\star, \sharp$ sono operazioni semistar su D, allora $\star_f = \sharp_f \iff F^\star = F^\sharp$, per ogni $F \in \overline{F}(D)$ finitamente generato.

Teorema (FFL)

Siano D un dominio, $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora

$$\overline{Y}^{c} = \overline{Z}^{c} \Longrightarrow (\wedge_Y)_f = (\wedge_Z)_f$$

Il viceversa è falso: basta prendere $Y := \{V \subsetneq W\}, Z := \{V\}$.

Definizione

Sia $\star$ un'operazione semistar su D. Allora la mappa $\star_f$ definita da

$$F^{\star_f} := \bigcup \{G^\star : G \subseteq F, F \in \overline{F}(D), G \text{ finitamente generato}\}$$

è una operazione semistar su D, detta *chiusura di tipo finito di* $\star$. L'operazione $\star$ si dice *di tipo finito* se $\star = \star_f$.

- Id, b sono di tipo finito. Per ogni $\star$, $\star_f$ è di tipo finito.
- $v : F \mapsto (D : (D : F))$ può non essere di tipo finito.

Se $\star, \sharp$ sono operazioni semistar su D, allora $\star_f = \sharp_f \iff F^\star = F^\sharp$, per ogni $F \in \overline{F}(D)$ finitamente generato.

Teorema (FFL)

Siano D un dominio, $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora

$$\overline{Y}^{\mathrm{c}} = \overline{Z}^{\mathrm{c}} \Longrightarrow (\wedge_Y)_f = (\wedge_Z)_f$$

Il viceversa è falso: basta prendere $Y := \{V \subsetneq W\}, Z := \{V\}$.

La topologia inversa

Definizione (Hochster, 1969)

Sia $(X, \mathcal{S})$ uno spazio spettrale. La *topologia inversa su* X è la topologia una cui base di chiusi è data dagli aperti compatti di $(X, \mathcal{S})$.

Fatti

Sia X uno spazio spettrale. Se $Y \subseteq X$, si ponga

$$Y^{\mathrm{gen}} := \{x \in X : y \in \overline{\{x\}}, \text{ per qualche } y \in Y\}$$

1. Siano $x, y \in X$. Allora $x \in \overline{\{y\}} \iff y \in \overline{\{x\}}^{\mathrm{i}}$.
2. X^{i} è ancora uno spazio spettrale.
3. Si ha $\overline{Y}^{\mathrm{i}} = (\overline{Y}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{gen}}$

La topologia inversa

Definizione (Hochster, 1969)

Sia $(X, \mathcal{S})$ uno spazio spettrale. La *topologia inversa su* X è la topologia una cui base di chiusi è data dagli aperti compatti di $(X, \mathcal{S})$.

Fatti

Sia X uno spazio spettrale. Se $Y \subseteq X$, si ponga

$$Y^{\mathrm{gen}} := \{x \in X : y \in \overline{\{x\}}, \text{ per qualche } y \in Y\}$$

1. Siano $x, y \in X$. Allora $x \in \overline{\{y\}} \iff y \in \overline{\{x\}}^{\mathrm{i}}$.
2. X^{i} è ancora uno spazio spettrale.
3. Si ha $\overline{Y}^{\mathrm{i}} = (\overline{Y}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{gen}}$

Se $X := \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{i}}$ e $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$, allora

$$\overline{Y}^{\mathrm{i}} = (\overline{Y}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{gen}} = \{V \in X : V \supseteq W, \text{ per qualche } W \in \overline{Y}^{\mathrm{c}}\}$$

Teorema (FFL)

Sia $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. $(\wedge_Y)_f = (\wedge_Z)_f$
2. $\overline{Y}^{\mathrm{i}} = \overline{Z}^{\mathrm{i}}$.

Teorema (FFL)

Sia $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. $\wedge_Y$ è di tipo finito.
2. Y è compatto, rispetto alla topologia di Zariski.
3. Esiste un compatto $Y_1 \subseteq \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{c}}$ tale che $\wedge_Y = \wedge_{Y_1}$.
4. Esiste un compatto $Y_2 \subseteq \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{i}}$ tale che $\wedge_Y = \wedge_{Y_2}$.

Questione: cosa può dirsi di $\wedge_Y$, se Y consiste di anelli non necessariamente di valutazione?

Se $X := \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{i}}$ e $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$, allora

$$\overline{Y}^{\mathrm{i}} = (\overline{Y}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{gen}} = \{V \in X : V \supseteq W, \text{ per qualche } W \in \overline{Y}^{\mathrm{c}}\}$$

Teorema (FFL)

Sia $Y, Z \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. $(\wedge_Y)_f = (\wedge_Z)_f$
2. $\overline{Y}^{\mathrm{i}} = \overline{Z}^{\mathrm{i}}$.

Teorema (FFL)

Sia $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. $\wedge_Y$ è di tipo finito.
2. Y è compatto, rispetto alla topologia di Zariski.
3. Esiste un compatto $Y_1 \subseteq \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{c}}$ tale che $\wedge_Y = \wedge_{Y_1}$.
4. Esiste un compatto $Y_2 \subseteq \mathrm{Zar}(D)^{\mathrm{i}}$ tale che $\wedge_Y = \wedge_{Y_2}$.

Questione: cosa può dirsi di $\wedge_Y$, se Y consiste di anelli non necessariamente di valutazione?

Una caratterizzazione per gli spazi spettrali

Teorema (F.)

Sia X uno spazio topologico T_0. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. X è uno spazio spettrale.
2. Esiste una base $\mathcal{B}$ di X tale che, per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X si abbia
$$\{x \in X : [\forall B \in \mathcal{B}, x \in B \iff B \in \mathcal{U}]\} \neq \emptyset.$$
3. Esiste una sottobase $\mathcal{S}$ di X tale che, per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X si abbia
$$\{x \in X : [\forall S \in \mathcal{S}, x \in S \iff S \in \mathcal{U}]\} \neq \emptyset.$$

Corollario (F.)

Siano $A \subseteq B$ anelli. Si consideri su $R(B|A) := \{C : C \text{ è un anello e } A \subseteq C \subseteq B\}$ si consideri la topologia avente per sottobase

$$\mathcal{S} := \{R(B|A[x]) : x \in B\}$$

1. $R(B|A)$ è uno spazio spettrale.
2. Se D è un dominio e $K = \mathrm{Qz}(D)$, poniamo $\mathrm{Over}(D) := R(K|D)$. Allora i sottoinsiemi $L(D) := \{C \in \mathrm{Over}(D) : C \text{ è locale}\}$, $I(D) := \{C \in \mathrm{Over}(D) : C \text{ è integralmente chiuso}\}$ sono chiusi in $\mathrm{Over}(D)^{\mathrm{c}}$ (e, a fortiori, sono essi stessi spazi spettrali).

Usando la struttura topologica di $\mathrm{Over}(A)$, si può dire qualcosa sulle operazioni semistar $\wedge_Y$, quando $Y \subseteq \mathrm{Over}(A)$?

Lo studio delle operazioni semistar del tipo $\wedge_Y$ si può ricondurre allo studio di una costruzione più generale.
Siano D un dominio, $\mathrm{SStar}(D) := \{\text{operazioni semistar su } D\}$, e $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathrm{SStar}(D)$. Consideriamo la mappa $\bigwedge(\mathcal{T}) : \overline{F}(D) \longrightarrow \overline{F}(D)$ definita da

$$F^{\bigwedge(\mathcal{T})} := \bigcap_{\star \in \mathcal{T}} F^{\star} \qquad \forall F \in \overline{F}(D)$$

- $\bigwedge(\mathcal{T}) \in \mathrm{SStar}(D)$.
- Considerato l'ordine $\leq$ su $\mathrm{SStar}(D)$ tale che $\star \leq \sharp :\iff F^{\star} \subseteq F^{\sharp}$, per ogni $F \in \overline{F}(D)$, allora $\bigwedge(\mathcal{T}) = \inf(\mathcal{T})$.
- Se $Y \subseteq \mathrm{Over}(D)$, allora $\wedge_Y = \bigwedge(\{\wedge_{\{B\}} : B \in Y\})$.

Questione

Trovare condizioni sufficienti perché $\bigwedge(\mathcal{T})$ sia di tipo finito.

OBIETTIVO: costruire una topologia su $\mathrm{SStar}(D)$ e una immersione topologica $\mathrm{Over}(D) \longrightarrow \mathrm{SStar}(D)$.

Definizione

Sia $\mathrm{SStar}(D) := \{\text{operazioni semistar su } D\}$,
$\mathrm{SStar}_f(D) := \{\text{operazioni semistar di tipo finito su } D\}$. Chiameremo *topologia di Zariski su* $\mathrm{SStar}(D)$ la topologia per la quale una sottobase di aperti è la famiglia

$$\{V_F := \{\star \in \mathrm{SStar}(D) : 1 \in F^\star\} : F \in \overline{F}(D)\}$$

Fatti

1. Per ogni $\star \in \mathrm{SStar}(D)$ si ha $\overline{\{\star\}} = \{\sharp \in \mathrm{SStar}(D) : \sharp \leq \star\}$
2. L'identità è l'unico punto chiuso di $\mathrm{SStar}(D)$, mentre $\wedge_K$, $F \mapsto K$ è l'unico punto generico di $\mathrm{SStar}(D)$.
3. $\mathrm{SStar}(D)$ è uno spazio T_0.
4. $\mathrm{SStar}_f(D)$ è un retratto topologico di $\mathrm{SStar}(D)$, via la mappa $\rho : \mathrm{SStar}(D) \longrightarrow \mathrm{SStar}_f(D)$, $\star \mapsto \star_f$.

OBIETTIVO: costruire una topologia su $\mathrm{SStar}(D)$ e una immersione topologica $\mathrm{Over}(D) \longrightarrow \mathrm{SStar}(D)$.

Definizione

Sia $\mathrm{SStar}(D) := \{\text{operazioni semistar su } D\}$,
$\mathrm{SStar}_f(D) := \{\text{operazioni semistar di tipo finito su } D\}$. Chiameremo *topologia di Zariski su* $\mathrm{SStar}(D)$ la topologia per la quale una sottobase di aperti è la famiglia

$$\{V_F := \{\star \in \mathrm{SStar}(D) : 1 \in F^\star\} : F \in \overline{F}(D)\}$$

Fatti

1. Per ogni $\star \in \mathrm{SStar}(D)$ si ha $\overline{\{\star\}} = \{\sharp \in \mathrm{SStar}(D) : \sharp \leq \star\}$
2. L'identità è l'unico punto chiuso di $\mathrm{SStar}(D)$, mentre $\wedge_K$, $F \mapsto K$ è l'unico punto generico di $\mathrm{SStar}(D)$.
3. $\mathrm{SStar}(D)$ è uno spazio T_0.
4. $\mathrm{SStar}_f(D)$ è un retratto topologico di $\mathrm{SStar}(D)$, via la mappa $\rho : \mathrm{SStar}(D) \longrightarrow \mathrm{SStar}_f(D)$, $\star \mapsto \star_f$.

Osservazione

Sia D un dominio. Allora una sottobase per la topologia di $\mathrm{Over}(A)$ è data dagli insiemi del tipo

$$\Omega_F := \{B \in \mathrm{Over}(D) : 1 \in FB\} \text{ con } F \in \overline{F}(D)$$

Come prima, sia $\wedge_{\{B\}}$ l'operazione semistar definita da $F^{\wedge_{\{B\}}} := FB$, per ogni $F \in \overline{F}(D)$. Allora

$$B \in \Omega_F \iff 1 \in FB = F^{\wedge_{\{B\}}} \iff \wedge_{\{B\}} \in V_F$$

Si consideri la mappa $\iota : \mathrm{Over}(D) \longrightarrow \mathrm{SStar}_f(D)$, $B \mapsto \wedge_{\{B\}}$. Allora ι è una immersione topologica.

Sia D un dominio.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{SStar}(D) & & \\
 & & \mathrm{SStar}_f(D) \arrow[u, hook] & & \\
 & & \mathrm{Over}(D) \arrow[u, hook] & & \\
I(D) \arrow[urr, hook] & & & & L(D) \arrow[ull, hook] \\
 & & LI(D) := L(D) \cap I(D) \arrow[uu, hook] \arrow[ull, hook] \arrow[urr, hook] & & \\
 & & \mathrm{Zar}(D) \arrow[u, hook] \arrow[rr] & & \mathrm{Spec}(D) \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}
$$

Sottospazi compatti di $\mathrm{SStar}(D)$

Sia D un dominio, $F_i \in \overline{F}(D)$ $(i \in I)$, $V_{F_i} := \{\star \in \mathrm{SStar}(D) : 1 \in F^\star\}$.

- Allora l'insieme $V := \bigcap_{i \in I} V_{F_i}$ è un reticolo completo (come sottoinsieme di $(\mathrm{SStar}(D), \leq)$).
- V è compatto.
- $\mathrm{SStar}(D)$ e $\mathrm{SStar}_f(D)$ hanno una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite.

Sia D un dominio, $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{SStar}(D)$. Quando $\bigwedge(\mathcal{T})$ è di tipo finito?

Proposizione (Anderson)

Sia D un dominio $Y := \{B_i : i \in I\} \subseteq \mathrm{Over}(D)$ *localmente finita* (i.e., per ogni $x \in D - \{0\}$, x non è invertibile in B_i, solo per un numero finito di indici $i \in I$) e si assuma $\bigcap_{i \in I} B_i = D$. Allora $\wedge_Y = \bigwedge(\{\wedge_{\{B_i\}} : i \in I\})$ è di tipo finito.

Teorema (FS)

Sia $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{SStar}_f(D)$ compatto. Allora $\bigwedge(\mathcal{T})$ è di tipo finito.

In particolare $Y \subseteq \mathrm{Over}(A)$ compatto $\Longrightarrow \wedge_Y$ è di tipo finito.

Sia D un dominio, $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{SStar}(D)$. Quando $\bigwedge(\mathcal{T})$ è di tipo finito?

Proposizione (Anderson)

Sia D un dominio $Y := \{B_i : i \in I\} \subseteq \mathrm{Over}(D)$ *localmente finita* (i.e., per ogni $x \in D - \{0\}$, x non è invertibile in B_i, solo per un numero finito di indici $i \in I$) e si assuma $\bigcap_{i \in I} B_i = D$. Allora $\wedge_Y = \bigwedge(\{\wedge_{\{B_i\}} : i \in I\})$ è di tipo finito.

Teorema (FS)

Sia $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{SStar}_f(D)$ compatto. Allora $\bigwedge(\mathcal{T})$ è di tipo finito.

In particolare $Y \subseteq \mathrm{Over}(A)$ compatto $\Longrightarrow \wedge_Y$ è di tipo finito.

Quando vale l'asserzione Y compatto $\Longleftrightarrow \wedge_Y$ è di tipo finito?

"$\Longrightarrow$" vale sempre.

"$\Longleftarrow$" vale se $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$.

Proposizione (FS)

Sia D un dominio, $L(D) := \{B \in \mathrm{Over}(D) : B \text{ è locale}\}$. Consideriamo la mappa $\lambda : L(D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D)$, $B \mapsto \mathfrak{m}_B \cap D$. Allora:

- λ è una retrazione topologica.
- Sia $Y \subseteq L(D)$ tale che $\wedge_Y$ sia di tipo finito. Allora $\lambda(Y)$ è compatto.
- Se $X \subseteq \mathrm{Spec}(D)$ e $Y := \{D_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in X\}$, allora $\wedge_Y$ è di tipo finito se, e soltanto se, X è compatto.

Quando vale l'asserzione Y compatto $\Longleftrightarrow \wedge_Y$ è di tipo finito?

"$\Longrightarrow$" vale sempre.
"$\Longleftarrow$" vale se $Y \subseteq \mathrm{Zar}(D)$.

Proposizione (FS)

Sia D un dominio, $L(D) := \{B \in \mathrm{Over}(D) : B \text{ è locale}\}$. Consideriamo la mappa $\lambda : L(D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D)$, $B \mapsto \mathfrak{m}_B \cap D$. Allora:

- λ è una retrazione topologica.
- Sia $Y \subseteq L(D)$ tale che $\wedge_Y$ sia di tipo finito. Allora $\lambda(Y)$ è compatto.
- Se $X \subseteq \mathrm{Spec}(D)$ e $Y := \{D_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in X\}$, allora $\wedge_Y$ è di tipo finito se, e soltanto se, X è compatto.

Qualche problema aperto...

Come abbiamo visto, $\mathrm{SStar}_{\mathfrak{f}}(D)$ è compatto, ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite.

Teorema (FS)

$\mathrm{SStar}_{\mathfrak{f}}(D)$ è uno spazio spettrale.

Problema: determinare un anello (anzi, un dominio locale!) A tale che $\mathrm{Spec}(A)$ sia omeomorfo a $\mathrm{SStar}_{\mathfrak{f}}(D)$.

Qualche problema aperto...

Siano K un campo e D un sottoanello di K. Sia $Z := \mathrm{Zar}(K|D)$. Per ogni aperto U di Z si ponga $\mathcal{O}(U) := \bigcap\{V : V \in U\}$. Così, rimane definita una struttura di fascio di anelli $\mathcal{O}$ su Z. Inoltre, Z, con tale fascio, diventa uno spazio localmente anellato le cui spighe sono i punti di Z. Similmente, si può definire un fascio $\mathcal{O}_S$ su ogni sottoinsieme $S \subseteq Z$.

Teorema (Olberding)

$(S, \mathcal{O}_S)$ è uno schema affine se e solo se S è chiuso in Z^{i} e $\mathcal{O}_S(S)$ è un dominio di Prüfer con $\mathrm{Qz}(\mathcal{O}_S(S)) = \mathrm{Qz}(D)$.

Sia adesso $T := L(D)$. Si definisca un fascio di anelli $\mathcal{Q}$ su T ponendo, per ogni aperto U di T, $\mathcal{Q}(U) := \bigcap\{B : B \in U\}$.
Problema: si caratterizzi quando $(T, \mathcal{Q})$ è uno schema affine.