

Sulle Superfici Iperboliche Complesse di Volume Minimo

Luca F. Di Cerbo

Duke University

7 Giugno 2014

Preliminari: Le Varieta' Complesse Iperboliche

Preliminari: Le Varieta' Complesse Iperboliche

In questo seminario studieremo le superfici complesse iperboliche di volume minimo.

Preliminari: Le Varieta' Complesse Iperboliche

In questo seminario studieremo le superfici complesse iperboliche di volume minimo.

Definizione

Una varieta' complessa iperbolica e' una varieta' connessa di Kähler con curvatura olomorfa costante e negativa.

Preliminari: Le Varieta' Complesse Iperboliche

In questo seminario studieremo le superfici complesse iperboliche di volume minimo.

Definizione

Una varieta' complessa iperbolica e' una varieta' connessa di Kähler con curvatura olomorfa costante e negativa.

Sia X° una varieta' complessa iperbolica. Il rivestimento universale di X° e' il piano iperbolico complesso \mathcal{H}^n , in altre parole l'unica varieta' complessa iperbolica semplicemente connessa.

Preliminari: Le Varieta' Complesse Iperboliche

In questo seminario studieremo le superfici complesse iperboliche di volume minimo.

Definizione

Una varieta' complessa iperbolica e' una varieta' connessa di Kähler con curvatura olomorfa costante e negativa.

Sia X° una varieta' complessa iperbolica. Il rivestimento universale di X° e' il piano iperbolico complesso \mathcal{H}^n , in altre parole l'unica varieta' complessa iperbolica semplicemente connessa.

In particolare, queste varieta' sono ottenute come quozienti $X^\circ = \mathcal{H}^n/\Gamma$ dove Γ e' un reticolo in $\text{Aut}(\mathcal{H}^n) = PU(1, n)$.

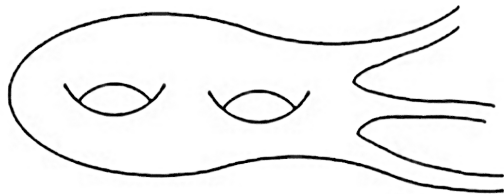
Se Γ e' un reticolo co-compatto senza torsione allora X^o e' una varieta' liscia con divisore canonico ampio.

Se Γ e' un reticolo co-compatto senza torsione allora X° e' una varieta' liscia con divisore canonico ampio.

Se X° e' liscia ma non-compatta e di volume finito si ha:

Se Γ e' un reticolo co-compatto senza torsione allora X° e' una varieta' liscia con divisore canonico ampio.

Se X° e' liscia ma non-compatta e di volume finito si ha:



In tal caso il reticolo Γ e' senza torsione e non-uniforme. Tali varieta' sono di interesse per i geometri algebrici perche' possono essere "compattificate".

In tal caso il reticolo Γ e' senza torsione e non-uniforme. Tali variet  sono di interesse per i geometri algebrici perche' possono essere "compattificate".

Baily-Borel [1966] e Siu-Yau [1982] costruiscono una compattificazione singolare X^* di X^o tale che il complemento di X^o in X^* consiste di un numero finito di punti singolari, detti "cusp points".

In tal caso il reticolo Γ è senza torsione e non-uniforme. Tali varietà sono di interesse per i geometri algebrici perché possono essere “compattificate”.

Baily-Borel [1966] e Siu-Yau [1982] costruiscono una compattificazione singolare X^* di X^o tale che il complemento di X^o in X^* consiste di un numero finito di punti singolari, detti “cusp points”.

Inoltre se le isometrie paraboliche del reticolo Γ non hanno parte “rotazionale”, allora si può dimostrare l'esistenza di una varietà proiettiva liscia X che risolve le singularità di X^* , tale che i divisori eccezionali sopra i punti cuspidali sono varietà abeliane.

In tal caso il reticolo Γ è senza torsione e non-uniforme. Tali varietà sono di interesse per i geometri algebrici perché possono essere “compattificate”.

Baily-Borel [1966] e Siu-Yau [1982] costruiscono una compattificazione singolare X^* di X° tale che il complemento di X° in X^* consiste di un numero finito di punti singolari, detti “cusp points”.

Inoltre se le isometrie paraboliche del reticolo Γ non hanno parte “rotazionale”, allora si può dimostrare l'esistenza di una varietà proiettiva liscia X che risolve le singularità di X^* , tale che i divisori eccezionali sopra i punti cuspidali sono varietà abeliane.

Chiameremo la coppia (X, D) , dove $D = \sum D_i$ è l'unione dei divisori eccezionali, la compattificazione toroidale di X° .

In tal caso il reticolo Γ è senza torsione e non-uniforme. Tali varietà sono di interesse per i geometri algebrici perché possono essere “compattificate”.

Baily-Borel [1966] e Siu-Yau [1982] costruiscono una compattificazione singolare X^* di X° tale che il complemento di X° in X^* consiste di un numero finito di punti singolari, detti “cusp points”.

Inoltre se le isometrie paraboliche del reticolo Γ non hanno parte “rotazionale”, allora si può dimostrare l'esistenza di una varietà proiettiva liscia X che risolve le singularità di X^* , tale che i divisori eccezionali sopra i punti cuspidali sono varietà abeliane.

Chiameremo la coppia (X, D) , dove $D = \sum D_i$ è l'unione dei divisori eccezionali, la compattificazione toroidale di X° .

In questo seminario studieremo il problema della classificazione delle compattificazioni toroidali in dimensione due con “volume minimo”.

Superfici Iperboliche Compatte di Volume Minimo

Un problema fondamentale nella teoria delle superfici compatte e' la classificazione di tutte le superfici di tipo generale con $3c_2 = c_1^2$ e caratteristica di Eulero minima. Si osservi come la caratteristica di Eulero di una superficie di tipo generale deve essere almeno tre.

Superfici Iperboliche Compatte di Volume Minimo

Un problema fondamentale nella teoria delle superfici compatte e' la classificazione di tutte le superfici di tipo generale con $3c_2 = c_1^2$ e caratteristica di Eulero minima. Si osservi come la caratteristica di Eulero di una superficie di tipo generale deve essere almeno tre.

La soluzione della congettura di Calabi (Aubin-Yau [1976]) ci assicura che una superficie di tipo generale che satura la disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka-Yau deve essere necessariamente una superficie iperbolica complessa!

Superfici Iperboliche Compatte di Volume Minimo

Un problema fondamentale nella teoria delle superfici compatte e' la classificazione di tutte le superfici di tipo generale con $3c_2 = c_1^2$ e caratteristica di Eulero minima. Si osservi come la caratteristica di Eulero di una superficie di tipo generale deve essere almeno tre.

La soluzione della congettura di Calabi (Aubin-Yau [1976]) ci assicura che una superficie di tipo generale che satura la disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka-Yau deve essere necessariamente una superficie iperbolica complessa!

In altre parole il problema della classificazione di tutte le superfici di tipo generale con $3c_2 = c_1^2$ e $c_2 = 3$ si riduce al classico problema in "Geometric Topology" della classificazione di tutte le varieta' complesse iperboliche di volume minimo. Perche'?

Grazie al teorema di Gauss-Bonnet si ha

$$c_2 = k \int Pf(\Omega) d\mu_g$$

dove k e' una costante positiva. Inoltre essendo la metrica iperbolica curvata negativamente si dimostra che $Pf(\Omega) > 0$ puntualmente. Infine, la metrica e' localmente simmetrica e quindi $Pf(\Omega)$ e' una costante.

Grazie al teorema di Gauss-Bonnet si ha

$$c_2 = k \int Pf(\Omega) d\mu_g$$

dove k e' una costante positiva. Inoltre essendo la metrica iperbolica curvata negativamente si dimostra che $Pf(\Omega) > 0$ puntualmente. Infine, la metrica e' localmente simmetrica e quindi $Pf(\Omega)$ e' una costante.

Teorema (Mumford (1979))

Esiste una superficie di tipo generale che satura la disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka-Yau con $c_2 = 3$.

Grazie al teorema di Gauss-Bonnet si ha

$$c_2 = k \int Pf(\Omega) d\mu_g$$

dove k e' una costante positiva. Inoltre essendo la metrica iperbolica curvata negativamente si dimostra che $Pf(\Omega) > 0$ puntualmente. Infine, la metrica e' localmente simmetrica e quindi $Pf(\Omega)$ e' una costante.

Teorema (Mumford (1979))

Esiste una superficie di tipo generale che satura la disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka-Yau con $c_2 = 3$.

Problema (Mumford (1979))

Classificare tutte le varieta' complesse iperboliche con $c_2 = 3$.

Teorema (Prasad-Yeung (2007))

Ci sono esattamente 50 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$.

Teorema (Prasad-Yeung (2007))

Ci sono esattamente 50 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$.

Il diamante di Hodge di tali superfi e' identico al diamante di Hodge del piano proiettivo. Tali superfici sono dette "fake projective planes"

Teorema (Prasad-Yeung (2007))

Ci sono esattamente 50 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$.

Il diamante di Hodge di tali superfi e' identico al diamante di Hodge del piano proiettivo. Tali superfici sono dette "fake projective planes"

Teorema (Yeung (2013))

Ci sono esattamente 51 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$.

Teorema (Prasad-Yeung (2007))

Ci sono esattamente 50 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$.

Il diamante di Hogde di tali superfi e' identico al diamante di Hodge del piano proiettivo. Tali superfici sono dette "fake projective planes"

Teorema (Yeung (2013))

Ci sono esattamente 51 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$.

In altre parole esiste una sola superficie iperbolica di volume minimo con primo numero di Betti non nullo. Tale superficie e' stata scoperta da Cartwright e Steger [2010].

Teorema (Prasad-Yeung (2007))

Ci sono esattamente 50 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$.

Il diamante di Hogde di tali superfi e' identico al diamante di Hodge del piano proiettivo. Tali superfici sono dette "fake projective planes"

Teorema (Yeung (2013))

Ci sono esattamente 51 superfici di tipo generale tali che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$.

In altre parole esiste una sola superficie iperbolica di volume minimo con primo numero di Betti non nullo. Tale superficie e' stata scoperta da Cartwright e Steger [2010].

Per una completa trattazione critica e storica del problema della classificazione dei "fake projective planes" si veda il Séminaire Bourbaki, [2007-2008], no. 984 di Rémy.

Qual'è l'analogo non-compatto di tale problema?

Da un punto di vista di Topologia Geometrica il problema è facilmente formulato. Abbiamo già visto che le superfici iperboliche di volume finito non-compatte sono superfici cuspidali. Dal teorema di Gauss-Bonnet generalizzato (Gromov-Harder) sappiamo che la caratteristica di Eulero di tali oggetti è proporzionale al volume Riemanniano (fissata una normalizzazione sulla curvatura!). Vogliamo quindi classificare tutte le superfici iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero minima.

Qual'è l'analogo non-compatto di tale problema?

Da un punto di vista di Topologia Geometrica il problema è facilmente formulato. Abbiamo già visto che le superfici iperboliche di volume finito non-compatte sono superfici cuspidali. Dal teorema di Gauss-Bonnet generalizzato (Gromov-Harder) sappiamo che la caratteristica di Eulero di tali oggetti è proporzionale al volume Riemanniano (fissata una normalizzazione sulla curvatura!). Vogliamo quindi classificare tutte le superfici iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero minima.

Teorema (Hirzebruch (1984))

Esiste una superficie iperbolica con cuspidi e caratteristica di Eulero 1.

Qual'è l'analogo non-compatto di tale problema?

Da un punto di vista di Topologia Geometrica il problema è facilmente formulato. Abbiamo già visto che le superfici iperboliche di volume finito non-compatte sono superfici cuspidali. Dal teorema di Gauss-Bonnet generalizzato (Gromov-Harder) sappiamo che la caratteristica di Eulero di tali oggetti è proporzionale al volume Riemanniano (fissata una normalizzazione sulla curvatura!). Vogliamo quindi classificare tutte le superfici iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero minima.

Teorema (Hirzebruch (1984))

Esiste una superficie iperbolica con cuspidi e caratteristica di Eulero 1.

Problema

Classificare tutte le varietà complesse iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero 1.

La letteratura su questo problema e' molto vasta ma purtroppo il problema e' ancora aperto.

La letteratura su questo problema e' molto vasta ma purtroppo il problema e' ancora aperto.

Come abbiamo precedentemente visto l'analogo compatto di tale problema e' stato risolto da Yeung utilizzando la teoria delle superfici algebriche.

La letteratura su questo problema e' molto vasta ma purtroppo il problema e' ancora aperto.

Come abbiamo precedentemente visto l'analogo compatto di tale problema e' stato risolto da Yeung utilizzando la teoria delle superfici algebriche.

Dato che le superfici iperboliche complesse con cuspidi possono essere compattificate, e' naturale provare a fare qualcosa di simile in questo contesto.

La letteratura su questo problema e' molto vasta ma purtroppo il problema e' ancora aperto.

Come abbiamo precedentemente visto l'analogo compatto di tale problema e' stato risolto da Yeung utilizzando la teoria delle superfici algebriche.

Dato che le superfici iperboliche complesse con cuspidi possono essere compattificate, e' naturale provare a fare qualcosa di simile in questo contesto.

Problema

Classificare tutte le varieta' complesse iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero minima che ammettono compattificazioni toroidali lisce.

La letteratura su questo problema e' molto vasta ma purtroppo il problema e' ancora aperto.

Come abbiamo precedentemente visto l'analogo compatto di tale problema e' stato risolto da Yeung utilizzando la teoria delle superfici algebriche.

Dato che le superfici iperboliche complesse con cuspidi possono essere compattificate, e' naturale provare a fare qualcosa di simile in questo contesto.

Problema

Classificare tutte le varieta' complesse iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero minima che ammettono compattificazioni toroidali lisce.

Il precedente problema puo' essere riformulato nel modo seguente.

La letteratura su questo problema e' molto vasta ma purtroppo il problema e' ancora aperto.

Come abbiamo precedentemente visto l'analogo compatto di tale problema e' stato risolto da Yeung utilizzando la teoria delle superfici algebriche.

Dato che le superfici iperboliche complesse con cuspidi possono essere compattificate, e' naturale provare a fare qualcosa di simile in questo contesto.

Problema

Classificare tutte le varieta' complesse iperboliche con cuspidi e caratteristica di Eulero minima che ammettono compattificazioni toroidali lisce.

Il precedente problema puo' essere riformulato nel modo seguente.

Problema (1)

Classificare tutte le superfici di tipo generale logaritmico (X, D) tali che $3\bar{c}_2 = \bar{c}_1^2$ e $\bar{c}_2 = 1$.

Qualche commento sul Problema (1)

- \bar{c}_1^2 e \bar{c}_2 sono i numeri di Chern logaritmici della coppia (X, D)

Qualche commento sul Problema (1)

- \bar{c}_1^2 e \bar{c}_2 sono i numeri di Chern logaritmici della coppia (X, D)
- Questi numeri si calcolano a partire dal fascio dei differenziali logaritmici $\Omega_X^p(\log(D)) = \wedge^p \Omega_X^1(\log(D))$ con l'ausilio della successione esatta corta $0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^p(\log(D)) \rightarrow \Omega_D^{p-1} \rightarrow 0$.

Qualche commento sul Problema (1)

- \bar{c}_1^2 e \bar{c}_2 sono i numeri di Chern logaritmici della coppia (X, D)
- Questi numeri si calcolano a partire dal fascio dei differenziali logaritmici $\Omega_X^p(\log(D)) = \wedge^p \Omega_X^1(\log(D))$ con l'ausilio della successione esatta corta $0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^p(\log(D)) \rightarrow \Omega_D^{p-1} \rightarrow 0$.
- Si dimostra che $\bar{c}_1^2 = (K_X + D)^2$ e $\bar{c}_2 = \chi(X \setminus D)$ dove χ e' la caratteristica di Eulero topologica.

Qualche commento sul Problema (1)

- \bar{c}_1^2 e \bar{c}_2 sono i numeri di Chern logaritmici della coppia (X, D)
- Questi numeri si calcolano a partire dal fascio dei differenziali logaritmici $\Omega_X^p(\log(D)) = \wedge^p \Omega_X^1(\log(D))$ con l'ausilio della successione esatta corta $0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^p(\log(D)) \rightarrow \Omega_D^{p-1} \rightarrow 0$.
- Si dimostra che $\bar{c}_1^2 = (K_X + D)^2$ e $\bar{c}_2 = \chi(X \setminus D)$ dove χ e' la caratteristica di Eulero topologica.
- In virtu' della soluzione della congettura di Calabi logaritmica (Tian-Yau [1987]), una coppia (X, D) che satura la disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka-Yau logaritmica ($\bar{c}_1^2 \leq 3\bar{c}_2$) e' necessariamente una compattificazione toroidale liscia di una superficie iperbolica con cuspidi.

Qualche commento sul Problema (1)

- \bar{c}_1^2 e \bar{c}_2 sono i numeri di Chern logaritmici della coppia (X, D)
- Questi numeri si calcolano a partire dal fascio dei differenziali logaritmici $\Omega_X^p(\log(D)) = \wedge^p \Omega_X^1(\log(D))$ con l'ausilio della successione esatta corta $0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^p(\log(D)) \rightarrow \Omega_D^{p-1} \rightarrow 0$.
- Si dimostra che $\bar{c}_1^2 = (K_X + D)^2$ e $\bar{c}_2 = \chi(X \setminus D)$ dove χ e' la caratteristica di Eulero topologica.
- In virtu' della soluzione della congettura di Calabi logaritmica (Tian-Yau [1987]), una coppia (X, D) che satura la disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka-Yau logaritmica ($\bar{c}_1^2 \leq 3\bar{c}_2$) e' necessariamente una compattificazione toroidale liscia di una superficie iperbolica con cuspidi.

Soluzione del Problema (1) e Applicazioni

Il teorema che segue e' il risultato principale del seminario, si veda D.C. [2013].

Soluzione del Problema (1) e Applicazioni

Il teorema che segue e' il risultato principale del seminario, si veda D.C. [2013].

Teorema (A)

Esiste un'unica compattificazione toroidale tale che $3\bar{c}_2 = \bar{c}_1^2$, $\bar{c}_2 = 1$.

Il Teorema A ha un interessante corollario.

Soluzione del Problema (1) e Applicazioni

Il teorema che segue e' il risultato principale del seminario, si veda D.C. [2013].

Teorema (A)

Esiste un'unica compattificazione toroidale tale che $3\bar{c}_2 = \bar{c}_1^2$, $\bar{c}_2 = 1$.

Il Teorema A ha un interessante corollario.

Teorema (B)

Il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica con compattificazione toroidale tale che $3\bar{c}_2 = \bar{c}_1^2$, $\bar{c}_2 = 1$ e' aritmetico.

Soluzione del Problema (1) e Applicazioni

Il teorema che segue e' il risultato principale del seminario, si veda D.C. [2013].

Teorema (A)

Esiste un'unica compattificazione toroidale tale che $3\bar{c}_2 = \bar{c}_1^2$, $\bar{c}_2 = 1$.

Il Teorema A ha un interessante corollario.

Teorema (B)

Il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica con compattificazione toroidale tale che $3\bar{c}_2 = \bar{c}_1^2$, $\bar{c}_2 = 1$ e' aritmetico.

La dimostrazione del Teorema B in D.C. [2013] e' indiretta. Infatti si basa sul fatto che la compattificazione toroidale identificata nel Teorema A era gia' nota corrispondere ad un reticolo aritmetico, Holzapfel [1986], Stover [2011].

Il Teorema B e' pero' di interesse teorico in virtu' del seguente risultato e della seguente congettura:

Il Teorema B e' pero' di interesse teorico in virtu' del seguente risultato e della seguente congettura:

Teorema (Klingler (2003), Yeung (2004))

Il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica compatta tale che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$ e' aritmetico.

Il Teorema B e' pero' di interesse teorico in virtu' del seguente risultato e della seguente congettura:

Teorema (Klingler (2003), Yeung (2004))

Il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica compatta tale che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$ e' aritmetico.

Il Teorema di Klingler-Yeung e' una parte fondamentale della classificazione dei "fake projective planes" e piu' in generale delle superfici di tipo generale con $3c_2 = c_1^2$ e $c_2 = 3$.

Il Teorema B e' pero' di interesse teorico in virtu' del seguente risultato e della seguente congettura:

Teorema (Klingler (2003), Yeung (2004))

Il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica compatta tale che $3c_2 = c_1^2$, $c_2 = 3$ e $b_1 = 0$ e' aritmetico.

Il Teorema di Klingler-Yeung e' una parte fondamentale della classificazione dei "fake projective planes" e piu' in generale delle superfici di tipo generale con $3c_2 = c_1^2$ e $c_2 = 3$.

Congettura (Folklore)

Il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica di volume finito e caratteristica di Eulero minima e' necessariamente aritmetico.

Idea della Dimostrazione del Teorema A

La dimostrazione del Teorema A si basa in modo essenziale sulla teoria delle superfici algebriche ed in particolare sulla classificazione di Kodaira-Enriques e su alcune proprietà delle superfici Abeliane. La dimostrazione è caso per caso.

Idea della Dimostrazione del Teorema A

La dimostrazione del Teorema A si basa in modo essenziale sulla teoria delle superfici algebriche ed in particolare sulla classificazione di Kodaira-Enriques e su alcune proprietà delle superfici Abeliane. La dimostrazione è caso per caso.

Proposizione

Sia (X, D) una compattificazione toroidale tale che $\bar{c}_2 = 1$. Allora la dimensione di Kodaira di X è zero.

Idea della Dimostrazione del Teorema A

La dimostrazione del Teorema A si basa in modo essenziale sulla teoria delle superfici algebriche ed in particolare sulla classificazione di Kodaira-Enriques e su alcune proprietà delle superfici Abeliane. La dimostrazione è caso per caso.

Proposizione

Sia (X, D) una compattificazione toroidale tale che $\bar{c}_2 = 1$. Allora la dimensione di Kodaira di X è zero.

Si osservi che $\bar{c}_2 = \chi(X) - \chi(D) = \chi(X) = c_2(X)$ in virtù del fatto che il divisore di bordo D deve essere l'unione di un numero finito di curve ellittiche lisce. Ne segue che $c_2(X) = 1$.

Idea della Dimostrazione del Teorema A

La dimostrazione del Teorema A si basa in modo essenziale sulla teoria delle superfici algebriche ed in particolare sulla classificazione di Kodaira-Enriques e su alcune proprietà delle superfici Abeliane. La dimostrazione è caso per caso.

Proposizione

Sia (X, D) una compattificazione toroidale tale che $\bar{c}_2 = 1$. Allora la dimensione di Kodaira di X è zero.

Si osservi che $\bar{c}_2 = \chi(X) - \chi(D) = \chi(X) = c_2(X)$ in virtù del fatto che il divisore di bordo D deve essere l'unione di un numero finito di curve ellittiche lisce. Ne segue che $c_2(X) = 1$.

Otteniamo dunque che:

- X non puo' essere di tipo generale, infatti la caratteristica di Eulero olomorfa di X deve essere divisibile per dodici (formula di Noether)

- X non può essere di tipo generale, infatti la caratteristica di Eulero olomorfa di X deve essere divisibile per dodici (formula di Noether)
- Se la dimensione di Kodaira è uno, allora X deve essere lo scoppio in un solo punto di una superficie ellittica con $c_2 = 0$

- X non può essere di tipo generale, infatti la caratteristica di Eulero olomorfa di X deve essere divisibile per dodici (formula di Noether)
- Se la dimensione di Kodaira è uno, allora X deve essere lo scoppio ad un solo punto di una superficie ellittica con $c_2 = 0$
- Se la dimensione di Kodaira è negativa, allora X deve essere lo scoppio ad un punto di una superficie rigata su una curva ellittica.

- X non può essere di tipo generale, infatti la caratteristica di Eulero olomorfa di X deve essere divisibile per dodici (formula di Noether)
- Se la dimensione di Kodaira è uno, allora X deve essere lo scoppio ad un solo punto di una superficie ellittica con $c_2 = 0$
- Se la dimensione di Kodaira è negativa, allora X deve essere lo scoppio ad un punto di una superficie rigata su una curva ellittica.

Utilizzando la teoria “base” delle superfici ellittiche e semplici argomenti geometrici tutti i casi precedenti possono essere eliminati.

Possiamo quindi assumere che la dimensione di Kodaira di X sia nulla.

Ricordiamo la classificazione delle superfici minime con dimensione di Kodaira nulla:

- Superfici K3, $c_2 = 24$

- Superfici K3, $c_2 = 24$
- Superfici di Enriques, $c_2 = 12$

- Superfici K3, $c_2 = 24$
- Superfici di Enriques, $c_2 = 12$
- Superfici Abeliane, $c_2 = 0$

- Superfici K3, $c_2 = 24$
- Superfici di Enriques, $c_2 = 12$
- Superfici Abeliane, $c_2 = 0$
- Superfici bi-ellittiche, $c_2 = 0$

- Superfici K3, $c_2 = 24$
- Superfici di Enriques, $c_2 = 12$
- Superfici Abelianne, $c_2 = 0$
- Superfici bi-ellittiche, $c_2 = 0$

Dobbiamo dunque assumere che X sia lo scoppio ad un solo punto di una superficie di Abel o di Enriques.

- Superfici K3, $c_2 = 24$
- Superfici di Enriques, $c_2 = 12$
- Superfici Abelianne, $c_2 = 0$
- Superfici bi-ellittiche, $c_2 = 0$

Dobbiamo dunque assumere che X sia lo scoppio ad un solo punto di una superficie di Abel o di Enriques.

Si ha dunque

$$\bar{c}_1^2 = (K_X + \sum_i D_i)^2 = -1 - \sum_i D_i^2 = 3$$

il che implica che il divisore di bordo puo' avere al piu' quattro componenti irriducibili.

Si denoti con (Y, C) la configurazione ottenuta da (X, D) contraendo l'unico divisore eccezionale. Si denotino con C_i le componenti irriducibili di C corrispondenti alle D_i in D

Si denoti con (Y, C) la configurazione ottenuta da (X, D) contraendo l'unico divisore eccezionale. Si denotino con C_i le componenti irriducibili di C corrispondenti alle D_i in D

In virtu' del fatto che

$$p_a(C_i) = 1 + \frac{C_i^2}{2}$$

si ha che C_i e' una curva ellittica liscia con auto-intersezione nulla oppure $C_i^2 = 2n$ con $n \geq 1$. Inoltre se $C_i^2 > 0$ allora la curva deve essere singolare.

Si denoti con (Y, C) la configurazione ottenuta da (X, D) contraendo l'unico divisore eccezionale. Si denotino con C_i le componenti irriducibili di C corrispondenti alle D_i in D

In virtu' del fatto che

$$p_a(C_i) = 1 + \frac{C_i^2}{2}$$

si ha che C_i e' una curva ellittica liscia con auto-intersezione nulla oppure $C_i^2 = 2n$ con $n \geq 1$. Inoltre se $C_i^2 > 0$ allora la curva deve essere singolare.

Adesso le D_i sono ellittiche si ha dunque

$$0 = K_X \cdot D_i + D_i^2 = 2n - r(r - 1)$$

e quindi si hanno tre possibilita'

- $n = 1, C_i^2 = 2, r = 2, D_i^2 = -2$
- $n = 3, C_i^2 = 6, r = 3, D_i^2 = -3$
- $n = 1, C_i^2 = 12, r = 4, D_i^2 = -4$

Assumiamo adesso Y essere Abelian. Si assuma quindi $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$ e sia

$$\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$$

la mappa del rivestimento universale.

Assumiamo adesso Y essere Abeliana. Si assuma quindi $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$ e sia

$$\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$$

la mappa del rivestimento universale.

Claim

$L = \mathcal{O}_Y(C)$ e' ampio.

Assumiamo adesso Y essere Abelian. Si assuma quindi $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$ e sia

$$\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$$

la mappa del rivestimento universale.

Claim

$L = \mathcal{O}_Y(C)$ e' ampio.

Posso dunque trovare una forma Hermitiana H strettamente positiva e un carattere $\alpha : \Gamma \rightarrow U(1)$ tali che

$$\pi^* C = (\theta), \quad \theta(z + \gamma) = \alpha(\gamma) \exp(\pi H(\gamma, z) + \frac{\pi}{2} H(\gamma, \gamma)) \theta(z) = e_\gamma(z) \theta(z)$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$ e dove $e_\gamma(z)$ e' il fattore di olomorfia del fibrato in rette L associato a C .

Sia $C^* = C \setminus \{p\}$ la parte liscia di C . Allora per ogni $q \in C^*$ lo spazio tangente $T_q C$ e' ben definito e dato dall'equazione

$$\sum_{i=1}^2 \partial_{z_i} \theta(q)(z_i - q_i) = 0.$$

Sia $C^* = C \setminus \{p\}$ la parte liscia di C . Allora per ogni $q \in C^*$ lo spazio tangente $T_q C$ e' ben definito e dato dall'equazione

$$\sum_{i=1}^2 \partial_{z_i} \theta(q) (z_i - q_i) = 0.$$

Posso quindi considerare la mappa di Gauss $G : C^* \rightarrow \mathbb{P}_1$ definita come segue

$$G(q) := [\partial_{z_1} \theta(q) : \partial_{z_2} \theta(q)]$$

.

Sia $C^* = C \setminus \{p\}$ la parte liscia di C . Allora per ogni $q \in C^*$ lo spazio tangente $T_q C$ e' ben definito e dato dall'equazione

$$\sum_{i=1}^2 \partial_{z_i} \theta(q)(z_i - q_i) = 0.$$

Posso quindi considerare la mappa di Gauss $G : C^* \rightarrow \mathbb{P}_1$ definita come segue

$$G(q) := [\partial_{z_1} \theta(q) : \partial_{z_2} \theta(q)]$$

.

Claim

Essendo H strettamente positive (i.e., L e' ampio) e C ridotto si ha che la mappa di Gauss non puo' essere costante.

Sia quindi $[x_1 : x_2]$ un punto generico nell'immagine della mappa di Gauss e si consideri la derivazione $\partial_w = \partial_{z_1} - \frac{x_1}{x_2} \partial_{z_2}$. Ne segue che

$$(\partial_w \theta) \cdot C = C^2 > r(r-1).$$

In fatti

$$(\partial_w \theta)|_C = e_\gamma \partial_w \theta$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$ e quindi $\partial_w \theta$ quando ristretta su C puo' essere considerata come una sezione del fibrato in rette L .

Sia quindi $[x_1 : x_2]$ un punto generico nell'immagine della mappa di Gauss e si consideri la derivazione $\partial_w = \partial_{z_1} - \frac{x_1}{x_2} \partial_{z_2}$. Ne segue che

$$(\partial_w \theta) \cdot C = C^2 > r(r-1).$$

In fatti

$$(\partial_w \theta)|_C = e_\gamma \partial_w \theta$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$ e quindi $\partial_w \theta$ quando ristretta su C puo' essere considerata come una sezione del fibrato in rette L .

Otteniamo quindi che tutte le curve C_i devono essere delle curve ellittiche lisce con $C_i^2 = 0$. Un argomento analogo vale per le superfici bi-ellittiche.

Sia quindi $[x_1 : x_2]$ un punto generico nell'immagine della mappa di Gauss e si consideri la derivazione $\partial_w = \partial_{z_1} - \frac{x_1}{x_2} \partial_{z_2}$. Ne segue che

$$(\partial_w \theta) \cdot C = C^2 > r(r-1).$$

In fatti

$$(\partial_w \theta)|_C = e_\gamma \partial_w \theta$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$ e quindi $\partial_w \theta$ quando ristretta su C puo' essere considerata come una sezione del fibrato in rette L .

Otteniamo quindi che tutte le curve C_i devono essere delle curve ellittiche lisce con $C_i^2 = 0$. Un argomento analogo vale per le superfici bi-ellittiche.

Dobbiamo quindi classificare le configurazioni di quattro curve ellittiche distinte che si intersecano in un solo punto in un ambiente che e' una superficie Abeliana o una superficie bi-ellittica.

Claim

Tali configurazioni non esistono su una superficie bi-ellittica.

Claim

Tali configurazioni non esistono su una superficie bi-ellittica.

Si ricordi che il numero di Hodge $h^{1,1}$ e' uguale a 2 per ogni superficie bi-ellittica. Si conclude l'argomento con una contraddizione sul numero di Picard di X che deve essere almeno 5.

Claim

Tali configurazioni non esistono su una superficie bi-ellittica.

Si ricordi che il numero di Hodge $h^{1,1}$ e' uguale a 2 per ogni superficie bi-ellittica. Si conclude l'argomento con una contraddizione sul numero di Picard di X che deve essere almeno 5.

In conclusione, abbiamo ridotto il problema al caso in cui l'ambiente X e' una superficie Abeliana.

Riama quindi da costruire un esempio e mostrare la sua unicit .

Sia E una curva ellittica associata al reticolo $\Lambda_{(1,\tau)} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ dove $\tau = \exp(\frac{\pi i}{3})$. In altre parole stiamo considerando la curva ellittica “piu’ simmetrica”.

Sia E una curva ellittica associata al reticolo $\Lambda_{(1,\tau)} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ dove $\tau = \exp(\frac{\pi i}{3})$. In altre parole stiamo considerando la curva ellittica “piu’ simmetrica”.

Si consideri la superficie Abeliana $Y = E \times E$ e si denotino con (w, z) le coordinate prodotto.

Sia E una curva ellittica associata al reticolo $\Lambda_{(1,\tau)} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ dove $\tau = \exp(\frac{\pi i}{3})$. In altre parole stiamo considerando la curva ellittica "piu' simmetrica".

Si consideri la superficie Abeliana $Y = E \times E$ e si denotino con (w, z) le coordinate prodotto.

Consideriamo quindi le quattro curve ellittiche in Y definite dalle equazioni

$$w = 0, \quad z = 0, \quad w = z, \quad w = \tau z.$$

Queste curve ellittiche si intersecano solamente nel punto $(0, 0)$.

Si denoti con C il divisore in Y le cui componenti irriducibili sono le curve ellittiche definite sopra. Allora la coppia (X, D) , dove X e' lo scoppimento di Y nel punto $(0, 0)$ e D la trasformazione propria del divisore C in X , e' la compattificazione toroidale che stavamo cercando.

Sia E una curva ellittica associata al reticolo $\Lambda_{(1,\tau)} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ dove $\tau = \exp(\frac{\pi i}{3})$. In altre parole stiamo considerando la curva ellittica "piu' simmetrica".

Si consideri la superficie Abeliana $Y = E \times E$ e si denotino con (w, z) le coordinate prodotto.

Consideriamo quindi le quattro curve ellittiche in Y definite dalle equazioni

$$w = 0, \quad z = 0, \quad w = z, \quad w = \tau z.$$

Queste curve ellittiche si intersecano solamente nel punto $(0, 0)$.

Si denoti con C il divisore in Y le cui componenti irriducibili sono le curve ellittiche definite sopra. Allora la coppia (X, D) , dove X e' lo scoppimento di Y nel punto $(0, 0)$ e D la trasformazione propria del divisore C in X , e' la compattificazione toroidale che stavamo cercando.

La coppia (X, D) e' l'esempio costruito da Hirzebruch nel 1984.

Rimane da mostrare che la configurazione precedente e' l'unica ammissibile. Si osservi come l'esistenza di una configurazione di quattro curve ellittiche che si intersecano in un solo punto impone che la superficie Abelliana sia un prodotto di due curve ellittiche identiche. A questo punto la dimostrazione si riduce ad una analisi caso per caso del tutto elementare. Nel seguito presenteremo solo un esempio.

Rimane da mostrare che la configurazione precedente e' l'unica ammissibile. Si osservi come l'esistenza di una configurazione di quattro curve ellittiche che si intersecano in un solo punto impone che la superficie Abelliana sia un prodotto di due curve ellittiche identiche. A questo punto la dimostrazione si riduce ad una analisi caso per caso del tutto elementare. Nel seguito presenteremo solo un esempio.

Sia Y come nell'esempio di Hirzebruch. Le curve ellittiche in Y definite dalle equazioni

$$w = 0, \quad z = 0, \quad w = z, \quad w = \tau^2 z.$$

non sono una configurazione ammissibile.

Rimane da mostrare che la configurazione precedente è l'unica ammissibile. Si osservi come l'esistenza di una configurazione di quattro curve ellittiche che si intersecano in un solo punto impone che la superficie Abeliana sia un prodotto di due curve ellittiche identiche. A questo punto la dimostrazione si riduce ad una analisi caso per caso del tutto elementare. Nel seguito presenteremo solo un esempio.

Sia Y come nell'esempio di Hirzebruch. Le curve ellittiche in Y definite dalle equazioni

$$w = 0, \quad z = 0, \quad w = z, \quad w = \tau^2 z.$$

non sono una configurazione ammissibile.

Infatti le curve $\{w = z\}$ e $\{w = \tau^2 z\}$ si intersecano nei punti

$$\left\{ (0, 0), \left(\frac{1 - \tau^2}{3}, \frac{1 - \tau^2}{3} \right), \left(\frac{\tau^2 - 1}{3}, \frac{\tau^2 - 1}{3} \right) \right\}$$

Problema (1)

Classificare tutti gli orbifold che sono compattificazioni toroidali di superfici iperboliche complesse con cuspidi e caratteristica di Eulero 1

Si osservi come tutti i reticoli aritmetici con caratteristica di Eulero 1 sono stati classificati da Stover [2011]. Quindi, una soluzione del precedente problema potrebbe anche essere usata per dimostrare la congettura sull'aritmeticit  del gruppo fondamentale delle superfici iperboliche con volume minimo.

Problema (1)

Classificare tutti gli orbifold che sono compattificazioni toroidali di superfici iperboliche complesse con cuspidi e caratteristica di Eulero 1

Si osservi come tutti i reticoli aritmetici con caratteristica di Eulero 1 sono stati classificati da Stover [2011]. Quindi, una soluzione del precedente problema potrebbe anche essere usata per dimostrare la congettura sull'aritmeticit  del gruppo fondamentale delle superfici iperboliche con volume minimo.

Problema (2)

Costruire esplicitamente una compattificazione toroidale (X, D) tridimensionale.

Grazie Angelo, Cinzia e Letterio per la splendida conferenza!!