

Sul bordo del cono dei divisori effettivi

Gabriele Di Cerbo

Columbia University

4 Giugno

Introduzione

Sia X una varietà liscia definita su \mathbb{C} . Il programma del modello minimale, o programma di Mori, ha lo scopo di trovare un rappresentante “semplice” nella classe di equivalenza birazionale di X .

Introduzione

Sia X una varietà liscia definita su \mathbb{C} . Il programma del modello minimale, o programma di Mori, ha lo scopo di trovare un rappresentante “semplice” nella classe di equivalenza birazionale di X .

Per misurare la semplicità della varietà si studiano le curve in essa contenute ed in particolare, i numeri di intersezione con il divisore canonico.

Introduzione

Sia X una varietà liscia definita su \mathbb{C} . Il programma del modello minimale, o programma di Mori, ha lo scopo di trovare un rappresentante “semplice” nella classe di equivalenza birazionale di X .

Per misurare la semplicità della varietà si studiano le curve in essa contenute ed in particolare, i numeri di intersezione con il divisore canonico.

Nel caso in cui $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva $C \subseteq X$ (cioè K_X è nef), la varietà è considerata minimale.

Sia X una varietà liscia definita su \mathbb{C} . Il programma del modello minimale, o programma di Mori, ha lo scopo di trovare un rappresentante “semplice” nella classe di equivalenza birazionale di X .

Per misurare la semplicità della varietà si studiano le curve in essa contenute ed in particolare, i numeri di intersezione con il divisore canonico.

Nel caso in cui $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva $C \subseteq X$ (cioè K_X è nef), la varietà è considerata minimale.

Il programma del modello minimale può essere considerato come un algoritmo che, partendo da X qualsiasi, produce una varietà X' birazionale a X con canonico nef, nel caso in cui $\kappa(X) \geq 0$, oppure X' è geometricamente più semplice di X (fibrato di Mori).

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Fissiamo alcune notazioni per il resto del seminario:

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Fissiamo alcune notazioni per il resto del seminario:

- indicheremo con $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale delle combinazioni lineari di curve irriducibili in X modulo equivalenza numerica;

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Fissiamo alcune notazioni per il resto del seminario:

- indicheremo con $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale delle combinazioni lineari di curve irriducibili in X modulo equivalenza numerica;
- il cono delle curve effettive $\overline{NE}(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è la chiusura del cono generato dalle classi effettive;

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Fissiamo alcune notazioni per il resto del seminario:

- indicheremo con $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale delle combinazioni lineari di curve irriducibili in X modulo equivalenza numerica;
- il cono delle curve effettive $\overline{NE}(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è la chiusura del cono generato dalle classi effettive;
- analogamente $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ è lo spazio vettoriale reale dei divisori modulo equivalenza numerica;

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Fissiamo alcune notazioni per il resto del seminario:

- indicheremo con $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale delle combinazioni lineari di curve irriducibili in X modulo equivalenza numerica;
- il cono delle curve effettive $\overline{NE}(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è la chiusura del cono generato dalle classi effettive;
- analogamente $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ è lo spazio vettoriale reale dei divisori modulo equivalenza numerica;
- $Nef(X) \subseteq N^1(X)_{\mathbb{R}}$ è il cono generato dai divisori nef. L'interno di $Nef(X)$ è $Amp(X)$ il cono generato dai divisori ampi.

Per lo studio del programma del modello minimale è conveniente considerare tutte le curve contenute in X come un unico oggetto.

Fissiamo alcune notazioni per il resto del seminario:

- indicheremo con $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale delle combinazioni lineari di curve irriducibili in X modulo equivalenza numerica;
- il cono delle curve effettive $\overline{NE}(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è la chiusura del cono generato dalle classi effettive;
- analogamente $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ è lo spazio vettoriale reale dei divisori modulo equivalenza numerica;
- $Nef(X) \subseteq N^1(X)_{\mathbb{R}}$ è il cono generato dai divisori nef. L'interno di $Nef(X)$ è $Amp(X)$ il cono generato dai divisori ampi.

Per definizione di divisore nef si ha che $Nef(X)$ è il duale di $\overline{NE}(X)$. Nonostante sia un risultato semplice, sarà fondamentale per il resto del seminario.

Per dualità, ogni divisore D definisce un iperpiano in $N_1(X)_{\mathbb{R}}$:

Per dualità, ogni divisore D definisce un iperpiano in $N_1(X)_{\mathbb{R}}$:

$$D^{\perp} := \{C \in N_1(X)_{\mathbb{R}} \mid D \cdot C = 0\}.$$

Per dualità, ogni divisore D definisce un iperpiano in $N_1(X)_{\mathbb{R}}$:

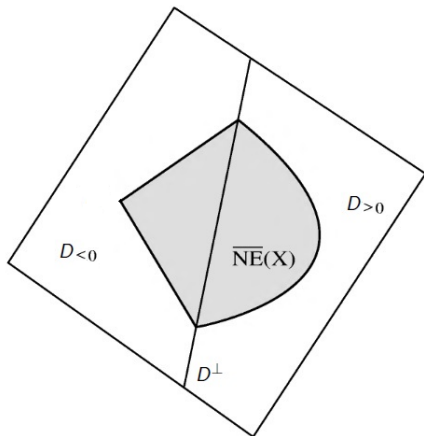
$$D^{\perp} := \{C \in N_1(X)_{\mathbb{R}} \mid D \cdot C = 0\}.$$

D^{\perp} divide $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ in due parti: $D_{>0}$ e $D_{<0}$.

Per dualità, ogni divisore D definisce un iperpiano in $N_1(X)_{\mathbb{R}}$:

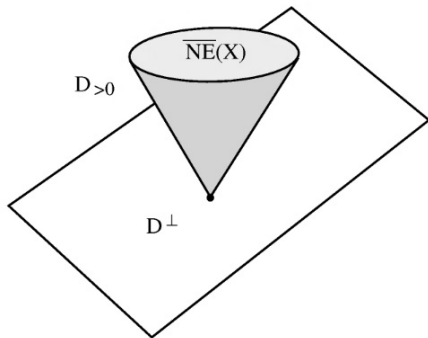
$$D^{\perp} := \{C \in N_1(X)_{\mathbb{R}} \mid D \cdot C = 0\}.$$

D^{\perp} divide $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ in due parti: $D_{>0}$ e $D_{<0}$.

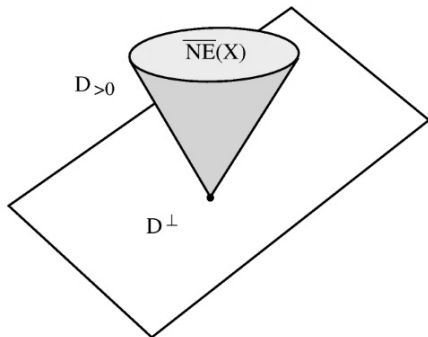


Il teorema di Kleiman ci dice che D è ampio se e solo se $\overline{NE}(X) - \{0\}$ è contenuto interamente in $D_{>0}$.

Il teorema di Kleiman ci dice che D è ampio se e solo se $\overline{NE}(X) - \{0\}$ è contenuto interamente in $D_{>0}$.

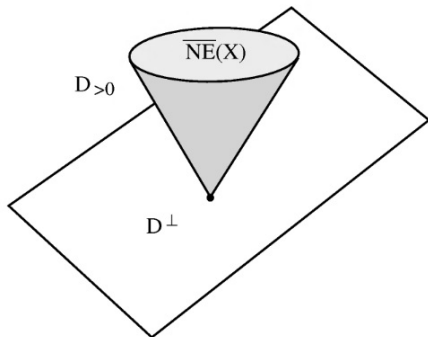


Il teorema di Kleiman ci dice che D è ampio se e solo se $\overline{NE}(X) - \{0\}$ è contenuto interamente in $D_{>0}$.



In particolare se D è nef ma non ampio, l'iperpiano D^\perp interseca $\overline{NE}(X)$ in una parte del suo bordo.

Il teorema di Kleiman ci dice che D è ampio se e solo se $\overline{NE}(X) - \{0\}$ è contenuto interamente in $D_{>0}$.



In particolare se D è nef ma non ampio, l'iperpiano D^\perp interseca $\overline{NE}(X)$ in una parte del suo bordo. Questa è l'idea chiave per il teorema del cono.

Teorema del cono

Il primo passo del programma del modello minimale è il teorema del cono di Mori.

Teorema del cono

Il primo passo del programma del modello minimale è il teorema del cono di Mori.

Teorema (Mori)

Sia X una varietà proiettiva liscia. Allora esistono un numero numerabile di curve razionali C_i tali che

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i],$$

e $0 < -(K_X \cdot C_i) \leq \dim(X) + 1$.

Teorema del cono

Il primo passo del programma del modello minimale è il teorema del cono di Mori.

Teorema (Mori)

Sia X una varietà proiettiva liscia. Allora esistono un numero numerabile di curve razionali C_i tali che

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i],$$

e $0 < -(K_X \cdot C_i) \leq \dim(X) + 1$.

Inoltre, se H è un divisore ampio fissato e $\epsilon > 0$ si ha che

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + \epsilon H \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i],$$

dove la somma è su un numero finito di curve.

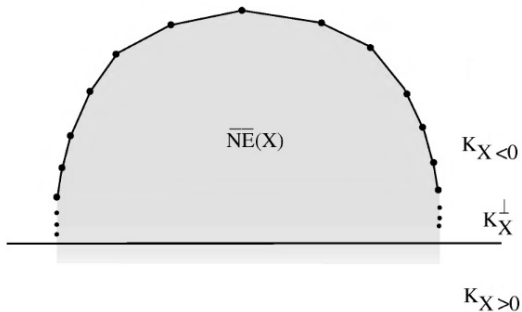
Il teorema del cono descrive la parte del cono $\overline{NE}(X)$ che contiene esattamente le curve che rendono K_X non nef.

Il teorema del cono descrive la parte del cono $\overline{NE}(X)$ che contiene esattamente le curve che rendono K_X non nef.

L'immagine da avere in mente è la seguente:

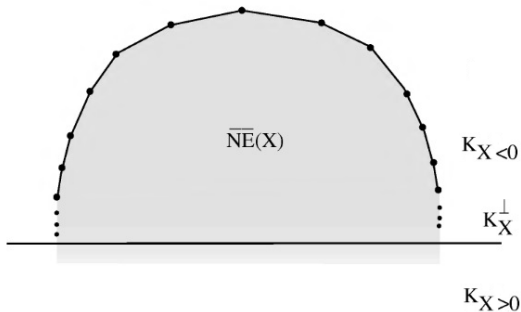
Il teorema del cono descrive la parte del cono $\overline{NE}(X)$ che contiene esattamente le curve che rendono K_X non nef.

L'immagine da avere in mente è la seguente:



Il teorema del cono descrive la parte del cono $\overline{NE}(X)$ che contiene esattamente le curve che rendono K_X non nef.

L'immagine da avere in mente è la seguente:



La parte K_X -positiva del cono delle curve effettive rimane tutt'ora abbastanza misteriosa.

La soglia nef

Come si dimostra il teorema del cono?

La soglia nef

Come si dimostra il teorema del cono?

L'idea fondamentale è quella di collegare punti all'interno del cono nef con il divisore canonico.

La soglia nef

Come si dimostra il teorema del cono?

L'idea fondamentale è quella di collegare punti all'interno del cono nef con il divisore canonico.

Definizione

Sia D un divisore qualsiasi e sia H un divisore ampio. La soglia nef è definita come

$$\sigma(D, H) := \inf \{ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid D + tH \text{ è ampio} \}.$$

La soglia nef

Come si dimostra il teorema del cono?

L'idea fondamentale è quella di collegare punti all'interno del cono nef con il divisore canonico.

Definizione

Sia D un divisore qualsiasi e sia H un divisore ampio. La soglia nef è definita come

$$\sigma(D, H) := \inf \{ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid D + tH \text{ è ampio} \}.$$

La soglia nef può essere pensata come la distanza tra D e il cono dei divisori nef.

Come si dimostra il teorema del cono?

L'idea fondamentale è quella di collegare punti all'interno del cono nef con il divisore canonico.

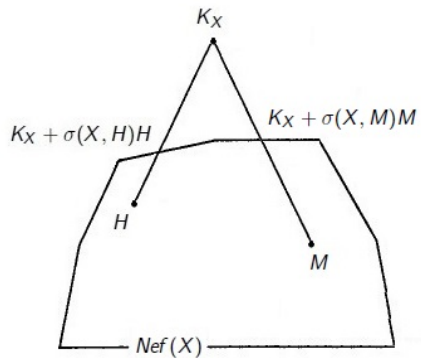
Definizione

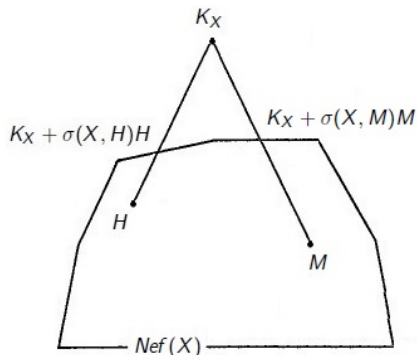
Sia D un divisore qualsiasi e sia H un divisore ampio. La soglia nef è definita come

$$\sigma(D, H) := \inf \{ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid D + tH \text{ è ampio} \}.$$

La soglia nef può essere pensata come la distanza tra D e il cono dei divisori nef.

Indicheremo con $\sigma(X, H) := \sigma(K_X, H)$ la soglia nef del divisore canonico.





Il teorema del cono è praticamente una conseguenza formale del teorema di razionalità che ci dice che, scelto un qualsiasi punto razionale all'interno di $Nef(X)$, la soglia nef è un numero razionale.

Il teorema di razionalità

Teorema (Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov, . . .)

Sia X una varietà proiettiva liscia e sia H un divisore ampio. Allora $\sigma(X, H)$ è un numero razionale con numeratore $\leq \dim(X) + 1$.

Il teorema di razionalità

Teorema (Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov, . . .)

Sia X una varietà proiettiva liscia e sia H un divisore ampio. Allora $\sigma(X, H)$ è un numero razionale con numeratore $\leq \dim(X) + 1$.

Il teorema del cono segue dal teorema di razionalità applicando la seguente idea:

Il teorema di razionalità

Teorema (Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov, . . .)

Sia X una varietà proiettiva liscia e sia H un divisore ampio. Allora $\sigma(X, H)$ è un numero razionale con numeratore $\leq \dim(X) + 1$.

Il teorema del cono segue dal teorema di razionalità applicando la seguente idea: fissato un divisore ampio H , il divisore $K_X + \sigma(X, H)H$ è nef ma non è ampio.

Il teorema di razionalità

Teorema (Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov, . . .)

Sia X una varietà proiettiva liscia e sia H un divisore ampio. Allora $\sigma(X, H)$ è un numero razionale con numeratore $\leq \dim(X) + 1$.

Il teorema del cono segue dal teorema di razionalità applicando la seguente idea: fissato un divisore ampio H , il divisore $K_X + \sigma(X, H)H$ è nef ma non è ampio. Grazie al teorema di razionalità, un certo multiplo di questo divisore è Cartier.

Il teorema di razionalità

Teorema (Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov, . . .)

Sia X una varietà proiettiva liscia e sia H un divisore ampio. Allora $\sigma(X, H)$ è un numero razionale con numeratore $\leq \dim(X) + 1$.

Il teorema del cono segue dal teorema di razionalità applicando la seguente idea: fissato un divisore ampio H , il divisore $K_X + \sigma(X, H)H$ è nef ma non è ampio. Grazie al teorema di razionalità, un certo multiplo di questo divisore è Cartier. In particolare, $\overline{NE}(X) \cap (K_X + \sigma(X, H)H)^\perp$ definisce una faccia del bordo di $\overline{NE}(X)$.

Il teorema di razionalità

Teorema (Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov, . . .)

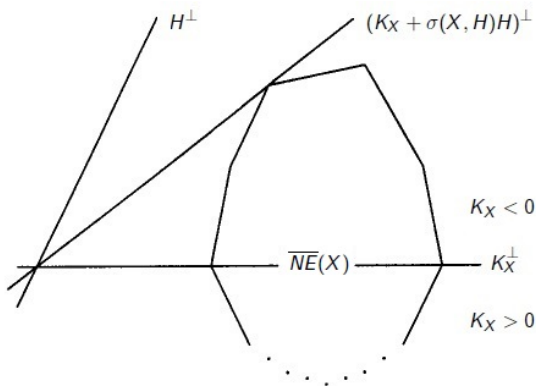
Sia X una varietà proiettiva liscia e sia H un divisore ampio. Allora $\sigma(X, H)$ è un numero razionale con numeratore $\leq \dim(X) + 1$.

Il teorema del cono segue dal teorema di razionalità applicando la seguente idea: fissato un divisore ampio H , il divisore $K_X + \sigma(X, H)H$ è nef ma non è ampio. Grazie al teorema di razionalità, un certo multiplo di questo divisore è Cartier. In particolare, $\overline{NE}(X) \cap (K_X + \sigma(X, H)H)^\perp$ definisce una faccia del bordo di $\overline{NE}(X)$.

Al variare di H all'interno del cono nef si ottengono tutte le facce di $\overline{NE}(X)_{K_X < 0}$.

L'immagine, duale a quella mostrata per la definizione di soglia nef, è la seguente:

L'immagine, duale a quella mostrata per la definizione di soglia nef, è la seguente:



Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

- per il teorema di Kleiman, un divisore D è ampio se e solo se $D^{\dim V} \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$.

Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

- per il teorema di Kleiman, un divisore D è ampio se e solo se $D^{\dim V} \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$. In particolare, $\sigma(X, H)$ è uno zero del polinomio $(K_X + xH)^{\dim V} \cdot V = 0$.

Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

- per il teorema di Kleiman, un divisore D è ampio se e solo se $D^{\dim V} \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$. In particolare, $\sigma(X, H)$ è uno zero del polinomio $(K_X + xH)^{\dim V} \cdot V = 0$.
- La razionalità di $\sigma(X, H)$ implica che esiste una curva C tale che $(K_X + \sigma(X, H)H) \cdot C = 0$.

Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

- per il teorema di Kleiman, un divisore D è ampio se e solo se $D^{\dim V} \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$. In particolare, $\sigma(X, H)$ è uno zero del polinomio $(K_X + xH)^{\dim V} \cdot V = 0$.
- La razionalità di $\sigma(X, H)$ implica che esiste una curva C tale che $(K_X + \sigma(X, H)H) \cdot C = 0$. In particolare, i raggi estremali di $\overline{NE}(X)_{K_X < 0}$ sono generati da curve irriducibili.

Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

- per il teorema di Kleiman, un divisore D è ampio se e solo se $D^{\dim V} \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$. In particolare, $\sigma(X, H)$ è uno zero del polinomio $(K_X + xH)^{\dim V} \cdot V = 0$.
- La razionalità di $\sigma(X, H)$ implica che esiste una curva C tale che $(K_X + \sigma(X, H)H) \cdot C = 0$. In particolare, i raggi estremali di $\overline{NE}(X)_{K_X < 0}$ sono generati da curve irriducibili.
- Il risultato è vero solo se si considera la soglia nef del divisore canonico rispetto ad un divisore ampio (o big e nef).

Alcuni commenti sul teorema di razionalità:

- per il teorema di Kleiman, un divisore D è ampio se e solo se $D \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$. In particolare, $\sigma(X, H)$ è uno zero del polinomio $(K_X + xH)^{\dim V} \cdot V = 0$.
- La razionalità di $\sigma(X, H)$ implica che esiste una curva C tale che $(K_X + \sigma(X, H)H) \cdot C = 0$. In particolare, i raggi estremali di $\overline{NE}(X)_{K_X < 0}$ sono generati da curve irriducibili.
- Il risultato è vero solo se si considera la soglia nef del divisore canonico rispetto ad un divisore ampio (o big e nef).

Si possono esibire esempi di divisori D e H su una superficie tali che $\sigma(D, H)$ è un numero irrazionale.

Esempio: $\sigma(D, H) \notin \mathbb{Q}$

Sia C una curva ellittica generica e $X := C \times C$. E' facile dimostrare che $Nef(X)$ è un cono circolare.

Esempio: $\sigma(D, H) \notin \mathbb{Q}$

Sia C una curva ellittica generica e $X := C \times C$. E' facile dimostrare che $Nef(X)$ è un cono circolare.

Siano $C_1 := \{p\} \times C$, $C_2 := C \times \{p\}$ e $\Gamma \subseteq X$ la diagonale. Ogni classe in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ si può scrivere come combinazione lineare di questi tre elementi.

Esempio: $\sigma(D, H) \notin \mathbb{Q}$

Sia C una curva ellittica generica e $X := C \times C$. E' facile dimostrare che $Nef(X)$ è un cono circolare.

Siano $C_1 := \{p\} \times C$, $C_2 := C \times \{p\}$ e $\Gamma \subseteq X$ la diagonale. Ogni classe in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ si può scrivere come combinazione lineare di questi tre elementi. Inoltre, $D = xC_1 + yC_2 + z\Gamma$ è nef se e solo se

$$xy + xz + yz \geq 0,$$

$$x + y + z \geq 0.$$

Esempio: $\sigma(D, H) \notin \mathbb{Q}$

Sia C una curva ellittica generica e $X := C \times C$. E' facile dimostrare che $Nef(X)$ è un cono circolare.

Siano $C_1 := \{p\} \times C$, $C_2 := C \times \{p\}$ e $\Gamma \subseteq X$ la diagonale. Ogni classe in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ si può scrivere come combinazione lineare di questi tre elementi. Inoltre, $D = xC_1 + yC_2 + z\Gamma$ è nef se e solo se

$$xy + xz + yz \geq 0,$$

$$x + y + z \geq 0.$$

Sia $D := C_1 + 2C_2 + 3\Gamma$ e $H := C_1 + C_2 + \Gamma$, allora la soglia nef è data da

$$\sigma(D, -H) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Esempio: $\sigma(D, H) \notin \mathbb{Q}$

Sia C una curva ellittica generica e $X := C \times C$. E' facile dimostrare che $Nef(X)$ è un cono circolare.

Siano $C_1 := \{p\} \times C$, $C_2 := C \times \{p\}$ e $\Gamma \subseteq X$ la diagonale. Ogni classe in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ si può scrivere come combinazione lineare di questi tre elementi. Inoltre, $D = xC_1 + yC_2 + z\Gamma$ è nef se e solo se

$$\begin{aligned}xy + xz + yz &\geq 0, \\x + y + z &\geq 0.\end{aligned}$$

Sia $D := C_1 + 2C_2 + 3\Gamma$ e $H := C_1 + C_2 + \Gamma$, allora la soglia nef è data da

$$\sigma(D, -H) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Da notare che $D - \sigma H$ è strettamente nef ma non è ampio.

La razionalità della soglia nef ci garantisce la decomposizione del cono delle curve.

La razionalità della soglia nef ci garantisce la decomposizione del cono delle curve. Invece, il fatto che il numeratore sia uniformemente limitato ci garantisce che i raggi estremali si accumulano soltanto verso l'iperpiano definito da K_X^\perp .

La razionalità della soglia nef ci garantisce la decomposizione del cono delle curve. Invece, il fatto che il numeratore sia uniformemente limitato ci garantisce che i raggi estremali si accumulano soltanto verso l'iperpiano definito da K_X^\perp .

Inoltre, il teorema può essere interpretato come un risultato di finitezza dei valori della soglia nef.

La razionalità della soglia nef ci garantisce la decomposizione del cono delle curve. Invece, il fatto che il numeratore sia uniformemente limitato ci garantisce che i raggi estremali si accumulano soltanto verso l'iperpiano definito da K_X^\perp .

Inoltre, il teorema può essere interpretato come un risultato di finitezza dei valori della soglia nef.

Corollario

Siano n e N due numeri interi fissati. Allora l'insieme formato da tutti i possibili valori di $\sigma(X, H)$ con

- *X varietà liscia di dimensione n ;*
- *H divisore ampio;*
- *$\sigma(X, H) \geq 1/N$;*

è un insieme finito.

La razionalità della soglia nef ci garantisce la decomposizione del cono delle curve. Invece, il fatto che il numeratore sia uniformemente limitato ci garantisce che i raggi estremali si accumulano soltanto verso l'iperpiano definito da K_X^\perp .

Inoltre, il teorema può essere interpretato come un risultato di finitezza dei valori della soglia nef.

Corollario

Siano n e N due numeri interi fissati. Allora l'insieme formato da tutti i possibili valori di $\sigma(X, H)$ con

- *X varietà liscia di dimensione n ;*
- *H divisore ampio;*
- *$\sigma(X, H) \geq 1/N$;*

è un insieme finito.

L'unico punto di accumulazione è lo zero.

Il cono dei divisori effettivi

Il cono dei divisori effettivi

I risultati precedenti danno una descrizione del cono delle curve effettive usando la dualità con il cono dei divisori nef.

Il cono dei divisori effettivi

I risultati precedenti danno una descrizione del cono delle curve effettive usando la dualità con il cono dei divisori nef.

E' possibile applicare lo stesso principio al cono dei divisori effettivi?

Il cono dei divisori effettivi

I risultati precedenti danno una descrizione del cono delle curve effettive usando la dualità con il cono dei divisori nef.

E' possibile applicare lo stesso principio al cono dei divisori effettivi?

- $\overline{Eff}(X)$ è la chiusura del cono generato dalle classi di divisori effettivi in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$;

Il cono dei divisori effettivi

I risultati precedenti danno una descrizione del cono delle curve effettive usando la dualità con il cono dei divisori nef.

E' possibile applicare lo stesso principio al cono dei divisori effettivi?

- $\overline{Eff}(X)$ è la chiusura del cono generato dalle classi di divisori effettivi in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$;
- l'interno di $\overline{Eff}(X)$ è il cono $Big(X)$ generato dalle classi di divisori big (per definizione divisori con dimensione di Kodaira massima);

Il cono dei divisori effettivi

I risultati precedenti danno una descrizione del cono delle curve effettive usando la dualità con il cono dei divisori nef.

E' possibile applicare lo stesso principio al cono dei divisori effettivi?

- $\overline{Eff}(X)$ è la chiusura del cono generato dalle classi di divisori effettivi in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$;
- l'interno di $\overline{Eff}(X)$ è il cono $Big(X)$ generato dalle classi di divisori big (per definizione divisori con dimensione di Kodaira massima);
- il duale di $\overline{Eff}(X)$ è il cono delle curve mobili $\overline{Mov}(X)$, per il teorema principale in [BDPP];

Il cono dei divisori effettivi

I risultati precedenti danno una descrizione del cono delle curve effettive usando la dualità con il cono dei divisori nef.

E' possibile applicare lo stesso principio al cono dei divisori effettivi?

- $\overline{Eff}(X)$ è la chiusura del cono generato dalle classi di divisori effettivi in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$;
- l'interno di $\overline{Eff}(X)$ è il cono $Big(X)$ generato dalle classi di divisori big (per definizione divisori con dimensione di Kodaira massima);
- il duale di $\overline{Eff}(X)$ è il cono delle curve mobili $\overline{Mov}(X)$, per il teorema principale in [BDPP];
- i divisori nel bordo di $\overline{Eff}(X)$ sono chiamati divisori pseudo-effettivi.

Soglia pseudo-effettiva

Analogamente alla soglia nef possiamo definire la soglia pseudo-effettiva. La definiremo solo nel caso in cui uno dei divisori è il divisore canonico.

Soglia pseudo-effettiva

Analogamente alla soglia nef possiamo definire la soglia pseudo-effettiva. La definiremo solo nel caso in cui uno dei divisori è il divisore canonico.

Definizione

Sia X una varietà liscia e sia H un divisore big. Definiamo la soglia pseudo-effettiva come

$$\tau(X, H) := \inf \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid K_X + tH \text{ è big}\}.$$

Soglia pseudo-effettiva

Analogamente alla soglia nef possiamo definire la soglia pseudo-effettiva. La definiremo solo nel caso in cui uno dei divisori è il divisore canonico.

Definizione

Sia X una varietà liscia e sia H un divisore big. Definiamo la soglia pseudo-effettiva come

$$\tau(X, H) := \inf \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid K_X + tH \text{ è big}\}.$$

E' naturale, a questo punto, porre le seguenti domande.

Domanda

Quali sono le proprietà che la soglia pseudo-effettiva condivide con la soglia nef?

Soglia pseudo-effettiva

Analogamente alla soglia nef possiamo definire la soglia pseudo-effettiva. La definiremo solo nel caso in cui uno dei divisori è il divisore canonico.

Definizione

Sia X una varietà liscia e sia H un divisore big. Definiamo la soglia pseudo-effettiva come

$$\tau(X, H) := \inf \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid K_X + tH \text{ è big}\}.$$

E' naturale, a questo punto, porre le seguenti domande.

Domanda

Quali sono le proprietà che la soglia pseudo-effettiva condivide con la soglia nef? In particolare, è sempre un numero razionale?

Soglia pseudo-effettiva

Analogamente alla soglia nef possiamo definire la soglia pseudo-effettiva. La definiremo solo nel caso in cui uno dei divisori è il divisore canonico.

Definizione

Sia X una varietà liscia e sia H un divisore big. Definiamo la soglia pseudo-effettiva come

$$\tau(X, H) := \inf \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid K_X + tH \text{ è big}\}.$$

E' naturale, a questo punto, porre le seguenti domande.

Domanda

Quali sono le proprietà che la soglia pseudo-effettiva condivide con la soglia nef? In particolare, è sempre un numero razionale? Soddisfa il teorema di finitezza?

Razionalità di $\tau(X, H)$

Il problema della razionalità di $\tau(X, H)$ è un problema con una lunga storia. Citiamo alcuni dei risultati più importanti.

Razionalità di $\tau(X, H)$

Il problema della razionalità di $\tau(X, H)$ è un problema con una lunga storia. Citiamo alcuni dei risultati più importanti.

Teorema (BCHM)

Sia (X, Δ) una coppia klt e sia H un divisore ampio. Allora $\tau(X, \Delta; H)$ è un numero razionale.

Razionalità di $\tau(X, H)$

Il problema della razionalità di $\tau(X, H)$ è un problema con una lunga storia. Citiamo alcuni dei risultati più importanti.

Teorema (BCHM)

Sia (X, Δ) una coppia klt e sia H un divisore ampio. Allora $\tau(X, \Delta; H)$ è un numero razionale.

Il teorema è stato recentemente esteso al caso big e nef dall'autore.

Razionalità di $\tau(X, H)$

Il problema della razionalità di $\tau(X, H)$ è un problema con una lunga storia. Citiamo alcuni dei risultati più importanti.

Teorema (BCHM)

Sia (X, Δ) una coppia klt e sia H un divisore ampio. Allora $\tau(X, \Delta; H)$ è un numero razionale.

Il teorema è stato recentemente esteso al caso big e nef dall'autore.

Teorema A

Sia (X, Δ) una coppia klt e sia H un divisore big e nef. Allora $\tau(X, \Delta; H)$ è un numero razionale.

Finitezza dei valori

La limitatezza del numeratore di $\tau(X, H)$ è ancora un problema aperto. E' stato formulato per la prima volta nel 1992 da Fujita.

La limitatezza del numeratore di $\tau(X, H)$ è ancora un problema aperto. È stato formulato per la prima volta nel 1992 da Fujita.

Congettura (Fujita)

Siano n e N due numeri interi fissati. Allora l'insieme formato da tutti i possibili valori di $\tau(X, H)$ con

- *X varietà liscia di dimensione n ;*
- *H divisore ampio;*
- *$\tau(X, H) \geq 1/N$;*

è un insieme finito.

La limitatezza del numeratore di $\tau(X, H)$ è ancora un problema aperto. E' stato formulato per la prima volta nel 1992 da Fujita.

Congettura (Fujita)

Siano n e N due numeri interi fissati. Allora l'insieme formato da tutti i possibili valori di $\tau(X, H)$ con

- *X varietà liscia di dimensione n ;*
- *H divisore ampio;*
- *$\tau(X, H) \geq 1/N$;*

è un insieme finito.

La congettura è conosciuta come la congettura spettrale di Fujita.

La limitatezza del numeratore di $\tau(X, H)$ è ancora un problema aperto. E' stato formulato per la prima volta nel 1992 da Fujita.

Congettura (Fujita)

Siano n e N due numeri interi fissati. Allora l'insieme formato da tutti i possibili valori di $\tau(X, H)$ con

- *X varietà liscia di dimensione n ;*
- *H divisore ampio;*
- *$\tau(X, H) \geq 1/N$;*

è un insieme finito.

La congettura è conosciuta come la congettura spettrale di Fujita. E' formulata solo per divisori ampi perchè Fujita era interessato alla classificazione delle varietà polarizzate.

L'unico risultato verso questa direzione è il seguente:

L'unico risultato verso questa direzione è il seguente:

Teorema B

L'insieme dei $\tau(X, H)$ come nella congettura precedente non ammette punti di accumulazione dal basso.

L'unico risultato verso questa direzione è il seguente:

Teorema B

L'insieme dei $\tau(X, H)$ come nella congettura precedente non ammette punti di accumulazione dal basso.

Il risultato era stato congetturato da Fujita nello stesso articolo ed era noto come la congettura log-spettrale di Fujita.

L'unico risultato verso questa direzione è il seguente:

Teorema B

L'insieme dei $\tau(X, H)$ come nella congettura precedente non ammette punti di accumulazione dal basso.

Il risultato era stato congetturato da Fujita nello stesso articolo ed era noto come la congettura log-spettrale di Fujita.

Il Teorema B vale anche per coppie klt ed è l'analogo della congettura spettrale in questo contesto.

L'unico risultato verso questa direzione è il seguente:

Teorema B

L'insieme dei $\tau(X, H)$ come nella congettura precedente non ammette punti di accumulazione dal basso.

Il risultato era stato congetturato da Fujita nello stesso articolo ed era noto come la congettura log-spettrale di Fujita.

Il Teorema B vale anche per coppie klt ed è l'analogo della congettura spettrale in questo contesto.

E' interessante notare che il Teorema B implica la razionalità della soglia pseudo-effettiva.

Idea della dimostrazione della razionalità

Idea della dimostrazione della razionalità

Vogliamo usare il Teorema B per dimostrare che $\tau(X, H)$ è un numero razionale, almeno nel caso in cui H è un divisore ampio.

Idea della dimostrazione della razionalità

Vogliamo usare il Teorema B per dimostrare che $\tau(X, H)$ è un numero razionale, almeno nel caso in cui H è un divisore ampio.

Per ogni $x < \tau(X, H)$, $K_X + xH$ non è contenuto nel cono dei divisori effettivi e quindi si può usare il programma del modello minimale grazie ai risultati ottenuti in [BCHM].

Idea della dimostrazione della razionalità

Vogliamo usare il Teorema B per dimostrare che $\tau(X, H)$ è un numero razionale, almeno nel caso in cui H è un divisore ampio.

Per ogni $x < \tau(X, H)$, $K_X + xH$ non è contenuto nel cono dei divisori effettivi e quindi si può usare il programma del modello minimale grazie ai risultati ottenuti in [BCHM].

In particolare, si ottiene che X ammette una mappa birazionale ad un fibrato di Mori.

Idea della dimostrazione della razionalità

Vogliamo usare il Teorema B per dimostrare che $\tau(X, H)$ è un numero razionale, almeno nel caso in cui H è un divisore ampio.

Per ogni $x < \tau(X, H)$, $K_X + xH$ non è contenuto nel cono dei divisori effettivi e quindi si può usare il programma del modello minimale grazie ai risultati ottenuti in [BCHM].

In particolare, si ottiene che X ammette una mappa birazionale ad un fibrato di Mori.

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & Y_x, \\ & & \downarrow \\ & & Z_x \end{array}$$

Idea della dimostrazione della razionalità

Vogliamo usare il Teorema B per dimostrare che $\tau(X, H)$ è un numero razionale, almeno nel caso in cui H è un divisore ampio.

Per ogni $x < \tau(X, H)$, $K_X + xH$ non è contenuto nel cono dei divisori effettivi e quindi si può usare il programma del modello minimale grazie ai risultati ottenuti in [BCHM].

In particolare, si ottiene che X ammette una mappa birazionale ad un fibrato di Mori.

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & Y_x, \\ & & \downarrow \\ & & Z_x \end{array}$$

dove le fibre F_x della mappa verticale hanno numero di Picard uguale ad 1.

Si può dimostrare che, facendo tendere x a $\tau(X, H)$, i valori delle soglie pseudo-effettive $\tau(F_x, H_x)$ tendono a $\tau(X, H)$ dal basso.

Si può dimostrare che, facendo tendere x a $\tau(X, H)$, i valori delle soglie pseudo-effettive $\tau(F_x, H_x)$ tendono a $\tau(X, H)$ dal basso.

Per il Teorema B non ci sono punti di accumulazione dal basso. In particolare, si ha che per x sufficientemente vicino a $\tau(X, H)$, il valore di $\tau(F_x, H_x)$ coincide con la soglia pseudo-effettiva di cui eravamo inizialmente interessati, cioè $\tau(X, H)$.

Si può dimostrare che, facendo tendere x a $\tau(X, H)$, i valori delle soglie pseudo-effettive $\tau(F_x, H_x)$ tendono a $\tau(X, H)$ dal basso.

Per il Teorema B non ci sono punti di accumulazione dal basso. In particolare, si ha che per x sufficientemente vicino a $\tau(X, H)$, il valore di $\tau(F_x, H_x)$ coincide con la soglia pseudo-effettiva di cui eravamo inizialmente interessati, cioè $\tau(X, H)$.

Per definizione di fibrazione di Mori, $K_{F_x} + \tau(F_x, H_x)H_x \equiv 0$ ed in particolare la soglia pseudo-effettiva $\tau(X, H)$ coincide con la soglia nef $\sigma(F_x, H_x)$,

Si può dimostrare che, facendo tendere x a $\tau(X, H)$, i valori delle soglie pseudo-effettive $\tau(F_x, H_x)$ tendono a $\tau(X, H)$ dal basso.

Per il Teorema B non ci sono punti di accumulazione dal basso. In particolare, si ha che per x sufficientemente vicino a $\tau(X, H)$, il valore di $\tau(F_x, H_x)$ coincide con la soglia pseudo-effettiva di cui eravamo inizialmente interessati, cioè $\tau(X, H)$.

Per definizione di fibrazione di Mori, $K_{F_x} + \tau(F_x, H_x)H_x \equiv 0$ ed in particolare la soglia pseudo-effettiva $\tau(X, H)$ coincide con la soglia nef $\sigma(F_x, H_x)$, che è sempre un numero razionale.

Si può dimostrare che, facendo tendere x a $\tau(X, H)$, i valori delle soglie pseudo-effettive $\tau(F_x, H_x)$ tendono a $\tau(X, H)$ dal basso.

Per il Teorema B non ci sono punti di accumulazione dal basso. In particolare, si ha che per x sufficientemente vicino a $\tau(X, H)$, il valore di $\tau(F_x, H_x)$ coincide con la soglia pseudo-effettiva di cui eravamo inizialmente interessati, cioè $\tau(X, H)$.

Per definizione di fibrazione di Mori, $K_{F_x} + \tau(F_x, H_x)H_x \equiv 0$ ed in particolare la soglia pseudo-effettiva $\tau(X, H)$ coincide con la soglia nef $\sigma(F_x, H_x)$, che è sempre un numero razionale.

La dimostrazione ci dice che $\tau(X, H)$ può essere calcolato come soglia nef su una varietà singolare, per questo non possiamo ottenere la limitatezza del numeratore.

Caso generale

Nei risultati precedenti abbiamo imposto delle condizioni di positività sul divisore H . Come fatto per il teorema del cono, è necessario muoversi all'interno del cono dei divisori effettivi e quindi considerare divisori soltanto big.

Caso generale

Nei risultati precedenti abbiamo imposto delle condizioni di positività sul divisore H . Come fatto per il teorema del cono, è necessario muoversi all'interno del cono dei divisori effettivi e quindi considerare divisori soltanto big.

La prima cosa da osservare è che in questo caso la soglia pseudo-effettiva non è necessariamente un numero razionale.

Caso generale

Nei risultati precedenti abbiamo imposto delle condizioni di positività sul divisore H . Come fatto per il teorema del cono, è necessario muoversi all'interno del cono dei divisori effettivi e quindi considerare divisori soltanto big.

La prima cosa da osservare è che in questo caso la soglia pseudo-effettiva non è necessariamente un numero razionale.

Sia $S = C \times C$ la superficie costruita in precedenza come prodotto di una curva ellettica per se stessa. Ricordiamo che la soglia nef di $D := C_1 + 2C_2 + 3\Gamma$ e $H := C_1 + C_2 + \Gamma$ è irrazionale.

Caso generale

Nei risultati precedenti abbiamo imposto delle condizioni di positività sul divisore H . Come fatto per il teorema del cono, è necessario muoversi all'interno del cono dei divisori effettivi e quindi considerare divisori soltanto big.

La prima cosa da osservare è che in questo caso la soglia pseudo-effettiva non è necessariamente un numero razionale.

Sia $S = C \times C$ la superficie costruita in precedenza come prodotto di una curva ellettica per se stessa. Ricordiamo che la soglia nef di $D := C_1 + 2C_2 + 3\Gamma$ e $H := C_1 + C_2 + \Gamma$ è irrazionale.

Sia $X := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H))$.

Caso generale

Nei risultati precedenti abbiamo imposto delle condizioni di positività sul divisore H . Come fatto per il teorema del cono, è necessario muoversi all'interno del cono dei divisori effettivi e quindi considerare divisori soltanto big.

La prima cosa da osservare è che in questo caso la soglia pseudo-effettiva non è necessariamente un numero razionale.

Sia $S = C \times C$ la superficie costruita in precedenza come prodotto di una curva ellittica per se stessa. Ricordiamo che la soglia nef di $D := C_1 + 2C_2 + 3\Gamma$ e $H := C_1 + C_2 + \Gamma$ è irrazionale.

Sia $X := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H))$. Possiamo pensare S contenuta in X come la zero-sezione di $\pi : X \rightarrow S$. E' facile dimostrare che $K_X \equiv -2S - \pi^*(H)$.

Caso generale

Nei risultati precedenti abbiamo imposto delle condizioni di positività sul divisore H . Come fatto per il teorema del cono, è necessario muoversi all'interno del cono dei divisori effettivi e quindi considerare divisori soltanto big.

La prima cosa da osservare è che in questo caso la soglia pseudo-effettiva non è necessariamente un numero razionale.

Sia $S = C \times C$ la superficie costruita in precedenza come prodotto di una curva ellettica per se stessa. Ricordiamo che la soglia nef di $D := C_1 + 2C_2 + 3\Gamma$ e $H := C_1 + C_2 + \Gamma$ è irrazionale.

Sia $X := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H))$. Possiamo pensare S contenuta in X come la zero-sezione di $\pi : X \rightarrow S$. E' facile dimostrare che $K_X \equiv -2S - \pi^*(H)$.

Inoltre, il cono $\overline{\text{Eff}}(X)$ dei divisori effettivi di X è generato da S e da $\pi^*(\overline{\text{Eff}}(S))$.

Definiamo su X il divisore big

$$M := 3S + \pi^*D.$$

Definiamo su X il divisore big

$$M := 3S + \pi^*D.$$

Possiamo calcolare il valore di $\tau(X, M)$ utilizzando la decomposizione del cono dei divisori effettivi di X citata precedentemente.

Definiamo su X il divisore big

$$M := 3S + \pi^*D.$$

Possiamo calcolare il valore di $\tau(X, M)$ utilizzando la decomposizione del cono dei divisori effettivi di X citata precedentemente.

$$\begin{aligned}\tau(X, M) &= \inf \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid -2S - \pi^*H + t(3S + \pi^*D) \text{ è big}\} \\ &= \max \left\{ \frac{2}{3}, \sigma(D, -H) \right\} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Definiamo su X il divisore big

$$M := 3S + \pi^*D.$$

Possiamo calcolare il valore di $\tau(X, M)$ utilizzando la decomposizione del cono dei divisori effettivi di X citata precedentemente.

$$\begin{aligned}\tau(X, M) &= \inf \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid -2S - \pi^*H + t(3S + \pi^*D) \text{ è big}\} \\ &= \max \left\{ \frac{2}{3}, \sigma(D, -H) \right\} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Abbiamo visto precedentemente che la razionalità della soglia pseudo-effettiva può essere dedotto da un risultato di finitezza. In particolare, l'esempio precedente ci suggerisce che la finitezza potrebbe fallire in questo contesto.

Nonostante la soglia pseudo-effettiva non sia in generale un numero razionale, possiamo sperare che ci sia un risultato di limitatezza del numeratore nel caso in cui sia razionale.

Nonostante la soglia pseudo-effettiva non sia in generale un numero razionale, possiamo sperare che ci sia un risultato di limitatezza del numeratore nel caso in cui sia razionale.

Purtroppo anche questo non è vero.

Nonostante la soglia pseudo-effettiva non sia in generale un numero razionale, possiamo sperare che ci sia un risultato di limitatezza del numeratore nel caso in cui sia razionale.

Purtroppo anche questo non è vero.

La costruzione è molto simile a quella del caso precedente.

Nonostante la soglia pseudo-effettiva non sia in generale un numero razionale, possiamo sperare che ci sia un risultato di limitatezza del numeratore nel caso in cui sia razionale.

Purtroppo anche questo non è vero.

La costruzione è molto simile a quella del caso precedente. Sulla superficie abeliana S consideriamo i seguenti divisori per ogni $k \geq 3$:

$$D_k := kC_1 + (k + 1)C_2 + (k + 1)\Gamma,$$

$$H_k := k(C_1 + C_2 + \Gamma).$$

Sia $X_k := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H_k))$ e sia $M_k := 3S + \pi^*(D_k)$.

Sia $X_k := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H_k))$ e sia $M_k := 3S + \pi^*(D_k)$.

Come fatto in precedenza possiamo calcolare le soglie pseudo-effettive.

Sia $X_k := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H_k))$ e sia $M_k := 3S + \pi^*(D_k)$.

Come fatto in precedenza possiamo calcolare le soglie pseudo-effettive. Si ha che

$$\tau(X_k, M_k) = \frac{3k}{3k+1}.$$

Sia $X_k := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H_k))$ e sia $M_k := 3S + \pi^*(D_k)$.

Come fatto in precedenza possiamo calcolare le soglie pseudo-effettive. Si ha che

$$\tau(X_k, M_k) = \frac{3k}{3k+1}.$$

In particolare, il numeratore non è uniformemente limitato e 1 è un punto di accumulazione dal basso.

Sia $X_k := \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H_k))$ e sia $M_k := 3S + \pi^*(D_k)$.

Come fatto in precedenza possiamo calcolare le soglie pseudo-effettive. Si ha che

$$\tau(X_k, M_k) = \frac{3k}{3k+1}.$$

In particolare, il numeratore non è uniformemente limitato e 1 è un punto di accumulazione dal basso.

Con un pò più di lavoro è possibile dimostrare il seguente risultato.

Teorema C

Sia \mathcal{T}_n l'insieme delle soglie pseudo-effettive $\tau(X, M)$ dove X è una varietà liscia di dimensione n e M è un divisore big. Allora ogni numero reale positivo è un punto di accumulazione dal basso in \mathcal{T}_n .

Alcuni commenti nel caso in cui M è nef.

Alcuni commenti nel caso in cui M è nef. Per uno dei teoremi precedentemente citati sappiamo che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale.

Alcuni commenti nel caso in cui M è nef. Per uno dei teoremi precedentemente citati sappiamo che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale.

Purtroppo per la finitezza si hanno solo risultati parziali.

Alcuni commenti nel caso in cui M è nef. Per uno dei teoremi precedentemente citati sappiamo che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale.

Purtroppo per la finitezza si hanno solo risultati parziali. E' già interessante notare il seguente risultato.

Lemma

Sia $S = C \times C$ come prima. Sia H un divisore ampio su S e sia $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H))$. Sia M un divisore nef tale che $K_X + M$ è big. Allora

$$\tau(X, M) = \frac{2}{a},$$

dove a è il coefficiente di S in M .

Alcuni commenti nel caso in cui M è nef. Per uno dei teoremi precedentemente citati sappiamo che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale.

Purtroppo per la finitezza si hanno solo risultati parziali. E' già interessante notare il seguente risultato.

Lemma

Sia $S = C \times C$ come prima. Sia H un divisore ampio su S e sia $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-H))$. Sia M un divisore nef tale che $K_X + M$ è big. Allora

$$\tau(X, M) = \frac{2}{a},$$

dove a è il coefficiente di S in M .

Le condizioni di positività nel lemma precedente impogono una condizione molto forte su $K_X + \tau(X, M)M$, che non sembra essere molto incoraggiante.

Alcuni problemi aperti

Come notato in precedenza, la soglia nef è sempre un numero algebrico grazie al teorema di Kleiman.

Alcuni problemi aperti

Come notato in precedenza, la soglia nef è sempre un numero algebrico grazie al teorema di Kleiman.

Domanda

$\tau(X, M)$ è un numero algebrico?

Alcuni problemi aperti

Come notato in precedenza, la soglia nef è sempre un numero algebrico grazie al teorema di Kleiman.

Domanda

$\tau(X, M)$ è un numero algebrico?

La domanda è aperta anche nel caso delle superfici.

Alcuni problemi aperti

Come notato in precedenza, la soglia nef è sempre un numero algebrico grazie al teorema di Kleiman.

Domanda

$\tau(X, M)$ è un numero algebrico?

La domanda è aperta anche nel caso delle superfici. Un analogo del teorema di Kleiman per il cono dei divisori effettivi risolverebbe il problema.

Alcuni problemi aperti

Come notato in precedenza, la soglia nef è sempre un numero algebrico grazie al teorema di Kleiman.

Domanda

$\tau(X, M)$ è un numero algebrico?

La domanda è aperta anche nel caso delle superfici. Un analogo del teorema di Kleiman per il cono dei divisori effettivi risolverebbe il problema. I risultati in [BDPP] sono un primo passo in questa direzione.

Alcuni problemi aperti

Come notato in precedenza, la soglia nef è sempre un numero algebrico grazie al teorema di Kleiman.

Domanda

$\tau(X, M)$ è un numero algebrico?

La domanda è aperta anche nel caso delle superfici. Un analogo del teorema di Kleiman per il cono dei divisori effettivi risolverebbe il problema. I risultati in [BDPP] sono un primo passo in questa direzione.

La precedente domanda è legata al fatto che, almeno per la congettura spettrale di Fujita, si pensa che i punti di accumulazione in \mathcal{T}_n siano esattamente \mathcal{T}_{n-1} .

Il caso delle superfici sembra particolarmente speciale.

Il caso delle superfici sembra particolarmente speciale.

Domanda

Se X ha dimensione 2, è vero che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale?

Il caso delle superfici sembra particolarmente speciale.

Domanda

Se X ha dimensione 2, è vero che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale?

La domanda precedente dovrebbe essere legata al fatto che la esiste una decomposizione di $\overline{Eff}(X)$ in sottoconi razionali dove la parte negativa della decomposizione di Zariski è costante [Bauer, Kuronya, Szemberg].

Il caso delle superfici sembra particolarmente speciale.

Domanda

Se X ha dimensione 2, è vero che $\tau(X, M)$ è sempre un numero razionale?

La domanda precedente dovrebbe essere legata al fatto che la esiste una decomposizione di $\overline{Eff}(X)$ in sottoconi razionali dove la parte negativa della decomposizione di Zariski è costante [Bauer, Kuronya, Szemberg]. .

Il seguente risultato sembra essere più complicato.

Congettura

\mathcal{T}_2 è un insieme discreto con 0 unico punto di accumulazione.

Relazioni con il volume

Il volume di un divisore D è definito come

$$\text{vol}(D) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}.$$

Relazioni con il volume

Il volume di un divisore D è definito come

$$\text{vol}(D) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}.$$

E' interessante calcolare il volume di $K_{X_k} + M_k$ negli esempi descritti in precedenza.

Relazioni con il volume

Il volume di un divisore D è definito come

$$\text{vol}(D) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}.$$

E' interessante calcolare il volume di $K_{X_k} + M_k$ negli esempi descritti in precedenza.

$$\text{vol}(K_{X_k} + M_k) = 3 \int_0^{\frac{1}{k}} (D_k - (1-x)H_k)^2 dx = \frac{12}{k}.$$

Relazioni con il volume

Il volume di un divisore D è definito come

$$\text{vol}(D) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}.$$

E' interessante calcolare il volume di $K_{X_k} + M_k$ negli esempi descritti in precedenza.

$$\text{vol}(K_{X_k} + M_k) = 3 \int_0^{\frac{1}{k}} (D_k - (1-x)H_k)^2 dx = \frac{12}{k}.$$

In particolare, 0 è un numero di accumulazione nell'insieme dei valori ottenuti da questo tipo di coppie.

Relazioni con il volume

Il volume di un divisore D è definito come

$$\text{vol}(D) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}.$$

E' interessante calcolare il volume di $K_{X_k} + M_k$ negli esempi descritti in precedenza.

$$\text{vol}(K_{X_k} + M_k) = 3 \int_0^{\frac{1}{k}} (D_k - (1-x)H_k)^2 dx = \frac{12}{k}.$$

In particolare, 0 è un numero di accumulazione nell'insieme dei valori ottenuti da questo tipo di coppie. I recenti lavori sulle mappe pluricanoniche, ci dicono che in questo caso non vale l'uniforme birazionalità per questo tipo di divisori.

Nonostante questo, ci dovrebbe essere una chiara connessione tra la soglia pseudo-effettiva e il volume. Alcuni risultati parziali sono stati ottenuti dall'autore.

Nonostante questo, ci dovrebbe essere una chiara connessione tra la soglia pseudo-effettiva e il volume. Alcuni risultati parziali sono stati ottenuti dall'autore.

Teorema D

Sia X una varietà liscia e M un divisore big e nef tale che $K_X + M$ è big. Allora

$$\text{vol}(K_X + M) \geq N(1 - \tau(X, M))^n,$$

dove N è una costante che dipende solo dalla dimensione di X .

Nonostante questo, ci dovrebbe essere una chiara connessione tra la soglia pseudo-effettiva e il volume. Alcuni risultati parziali sono stati ottenuti dall'autore.

Teorema D

Sia X una varietà liscia e M un divisore big e nef tale che $K_X + M$ è big. Allora

$$\text{vol}(K_X + M) \geq N(1 - \tau(X, M))^n,$$

dove N è una costante che dipende solo dalla dimensione di X .

Combinando il precedente teorema con il Teorema B si ottiene l'uniforme birazionalità per varietà polarizzate.

Nonostante questo, ci dovrebbe essere una chiara connessione tra la soglia pseudo-effettiva e il volume. Alcuni risultati parziali sono stati ottenuti dall'autore.

Teorema D

Sia X una varietà liscia e M un divisore big e nef tale che $K_X + M$ è big. Allora

$$\text{vol}(K_X + M) \geq N(1 - \tau(X, M))^n,$$

dove N è una costante che dipende solo dalla dimensione di X .

Combinando il precedente teorema con il Teorema B si ottiene l'uniforme birazionalità per varietà polarizzate.

Corollario

Sia n un numero intero fissato. Allora esiste un numero intero m_n tale che se (X, H) è una varietà polarizzata di dimensione n , la mappa associata a $m(K_X + H)$ è birazionale per ogni $m \geq m_n$.

Sarebbe molto interessante ottenere qualche risultato nella direzione opposta.

Sarebbe molto interessante ottenere qualche risultato nella direzione opposta.

Conggettura

Siano n e ϵ due numeri positivi fissati. Allora esiste un intero N tale che se (X, H) è una varietà polarizzata con $\dim(X) = n$ e $\tau(X, H) \geq \epsilon$, si ha che

$$\text{vol}(H) = H^n \leq N.$$

Sarebbe molto interessante ottenere qualche risultato nella direzione opposta.

Congettura

Siano n e ϵ due numeri positivi fissati. Allora esiste un intero N tale che se (X, H) è una varietà polarizzata con $\dim(X) = n$ e $\tau(X, H) \geq \epsilon$, si ha che

$$\text{vol}(H) = H^n \leq N.$$

La congettura è interessante per il seguente risultato.

Sarebbe molto interessante ottenere qualche risultato nella direzione opposta.

Conggettura

Siano n e ϵ due numeri positivi fissati. Allora esiste un intero N tale che se (X, H) è una varietà polarizzata con $\dim(X) = n$ e $\tau(X, H) \geq \epsilon$, si ha che

$$\text{vol}(H) = H^n \leq N.$$

La congettura è interessante per il seguente risultato.

Lemma

La congettura implica la congettura spettrale di Fujita.

Sarebbe molto interessante ottenere qualche risultato nella direzione opposta.

Congettura

Siano n e ϵ due numeri positivi fissati. Allora esiste un intero N tale che se (X, H) è una varietà polarizzata con $\dim(X) = n$ e $\tau(X, H) \geq \epsilon$, si ha che

$$\text{vol}(H) = H^n \leq N.$$

La congettura è interessante per il seguente risultato.

Lemma

La congettura implica la congettura spettrale di Fujita.

La dimostrazione del lemma è basata sull'uniforme birazionalità per varietà polarizzate e sulla semicontinuità della soglia pseudo-effettiva in famiglie.

Fujita ha dimostrato che la sua congettura spettrale può essere dimostrata usando la congettura BAB.

Fujita ha dimostrato che la sua congettura spettrale può essere dimostrata usando la congettura BAB. Nonostante i grandi sviluppi moderni sul programma del modello minimale si sa molto poco sulla congettura BAB.

Fujita ha dimostrato che la sua congettura spettrale può essere dimostrata usando la congettura BAB. Nonostante i grandi sviluppi moderni sul programma del modello minimale si sa molto poco sulla congettura BAB.

Invece la congettura proposta precedentemente sembra essere molto più facile da dimostrare come i recenti risultati in [HMX] suggeriscono.

Fujita ha dimostrato che la sua congettura spettrale può essere dimostrata usando la congettura BAB. Nonostante i grandi sviluppi moderni sul programma del modello minimale si sa molto poco sulla congettura BAB.

Invece la congettura proposta precedentemente sembra essere molto più facile da dimostrare come i recenti risultati in [HMX] suggeriscono.

Infatti si può dimostrare che:

Proposizione

La congettura è vera nel caso in cui $K_X + \tau(X, H)H \equiv 0$.

Fujita ha dimostrato che la sua congettura spettrale può essere dimostrata usando la congettura BAB. Nonostante i grandi sviluppi moderni sul programma del modello minimale si sa molto poco sulla congettura BAB.

Invece la congettura proposta precedentemente sembra essere molto più facile da dimostrare come i recenti risultati in [HMX] suggeriscono.

Infatti si può dimostrare che:

Proposizione

La congettura è vera nel caso in cui $K_X + \tau(X, H)H \equiv 0$.

Per il caso generale bisogna capire come varia il volume di H dopo aver applicato il programma del modello minimale.

Sul cono delle curve mobili

Ricordiamo che una classe $\gamma \in N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è detta mobile se esiste un morfismo birazionale $\mu : X' \rightarrow X$ e classi ampie $a_1, \dots, a_{n-1} \in N^1(X')_{\mathbb{R}}$ tali che $\gamma = \mu_*(a_1 \cdots a_{n-1})$.

Sul cono delle curve mobili

Ricordiamo che una classe $\gamma \in N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è detta mobile se esiste un morfismo birazionale $\mu : X' \rightarrow X$ e classi ampie $a_1, \dots, a_{n-1} \in N^1(X')_{\mathbb{R}}$ tali che $\gamma = \mu_*(a_1 \cdots a_{n-1})$.

$\overline{Mov}(X)$ è la chiusura del cono generato da tutte le classi di curve mobili.

Sul cono delle curve mobili

Ricordiamo che una classe $\gamma \in N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è detta mobile se esiste un morfismo birazionale $\mu : X' \rightarrow X$ e classi ampie $a_1, \dots, a_{n-1} \in N^1(X')_{\mathbb{R}}$ tali che $\gamma = \mu_*(a_1 \cdots a_{n-1})$.

$\overline{Mov}(X)$ è la chiusura del cono generato da tutte le classi di curve mobili.

Teorema (BDPP)

Sia X una varietà liscia. Allora $\overline{Mov}(X)$ è il duale di $\overline{Eff}(X)$.

Sul cono delle curve mobili

Ricordiamo che una classe $\gamma \in N_1(X)_{\mathbb{R}}$ è detta mobile se esiste un morfismo birazionale $\mu : X' \rightarrow X$ e classi ampie $a_1, \dots, a_{n-1} \in N^1(X')_{\mathbb{R}}$ tali che $\gamma = \mu_*(a_1 \cdots a_{n-1})$.

$\overline{Mov}(X)$ è la chiusura del cono generato da tutte le classi di curve mobili.

Teorema (BDPP)

Sia X una varietà liscia. Allora $\overline{Mov}(X)$ è il duale di $\overline{Eff}(X)$.

I risultati citati in precedenza e la teoria classica sviluppata per il teorema del cono dovrebbero produrre un risultato analogo al teorema del cono per le curve mobili.

Batyrev ha proposto la seguente congettura:

Batyrev ha proposto la seguente congettura:

Congettura (Batyrev)

Sia (X, Δ) una coppia klt. Allora ci sono un numero numerabile di curve mobili C_i tali che

$$\overline{NE}(X) + \overline{Mov}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + \Delta \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{>0}[C_i].$$

Inoltre i raggi generati dalle classi C_i si accumulano al piano $(K_X + \Delta)^\perp$.

Batyrev ha proposto la seguente congettura:

Congettura (Batyrev)

Sia (X, Δ) una coppia klt. Allora ci sono un numero numerabile di curve mobili C_i tali che

$$\overline{NE}(X) + \overline{Mov}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + \Delta \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{>0}[C_i].$$

Inoltre i raggi generati dalle classi C_i si accumulano al piano $(K_X + \Delta)^\perp$.

E' stato dimostrato da Lehmann che la decomposizione proposta da Batyrev è vera.

Batyrev ha proposto la seguente congettura:

Congettura (Batyrev)

Sia (X, Δ) una coppia klt. Allora ci sono un numero numerabile di curve mobili C_i tali che

$$\overline{NE}(X) + \overline{Mov}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + \Delta \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{>0}[C_i].$$

Inoltre i raggi generati dalle classi C_i si accumulano al piano $(K_X + \Delta)^\perp$.

E' stato dimostrato da Lehmann che la decomposizione proposta da Batyrev è vera.

Non è chiaro come dimostrare che i raggi estremali si accumulano verso il piano $(K_X + \Delta)^\perp$. Il risultato chiave dovrebbe essere la congettura spettrale di Fujita.