COMPATTIFICAZIONI DI SATAKE, FORME QUADRATICHE E PROBLEMA DI SCHOTTKY

SIA C UNA CURVA LISCIA DI GENERE g SU $\mathbb{C}$

LA JACOBIANA $\mathrm{Jac}(C)$ È UNA VARIETÀ ABELIANA PRINCIPALMENTE POLARIZZATA DI DIMENSIONE g.

$$\mathcal{M}_g = \{ \text{MODULI DI CURVE LISCE DI GENERE } g \}$$
$$\mathcal{A}_g = \{ \text{MODULI DI V.A.P.P. DI DIM. } g \}$$

$$J : \mathcal{M}_g \longrightarrow A_g$$
$$C \longmapsto \mathrm{Jac}(C)$$

TORELLI. J È INIETTIVA

$$\mathrm{codim}(\mathcal{M}_g, \mathcal{A}_g) \sim g^2$$

PROBLEMA DI SCHOTTKY: DESCRIVERE $\mathrm{Im}(J)$

I RISULTATI NOTI SI BASANO SULLE SEGUENTI

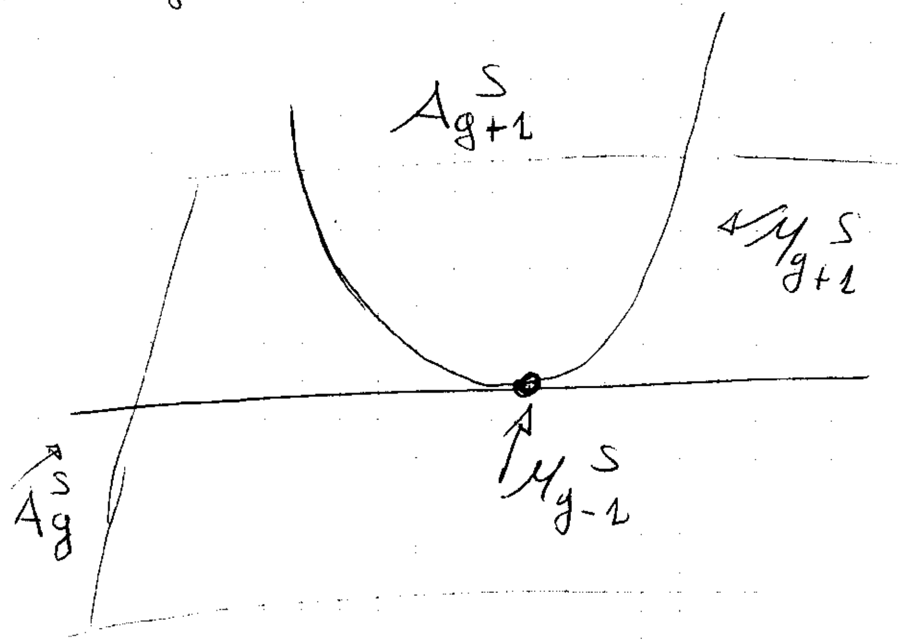
DESCRIZIONI DEL BORDO DELLO SPAZIO DEI MODULI

SIA $\mathcal{M}_g^S :=$ CHIUSURA DI $\mathcal{M}_g$ IN A_g^S

$\mathcal{M}_g^S \cap A_{g-1}^S = \mathcal{M}_{g-1}^S$ COME INSIEME

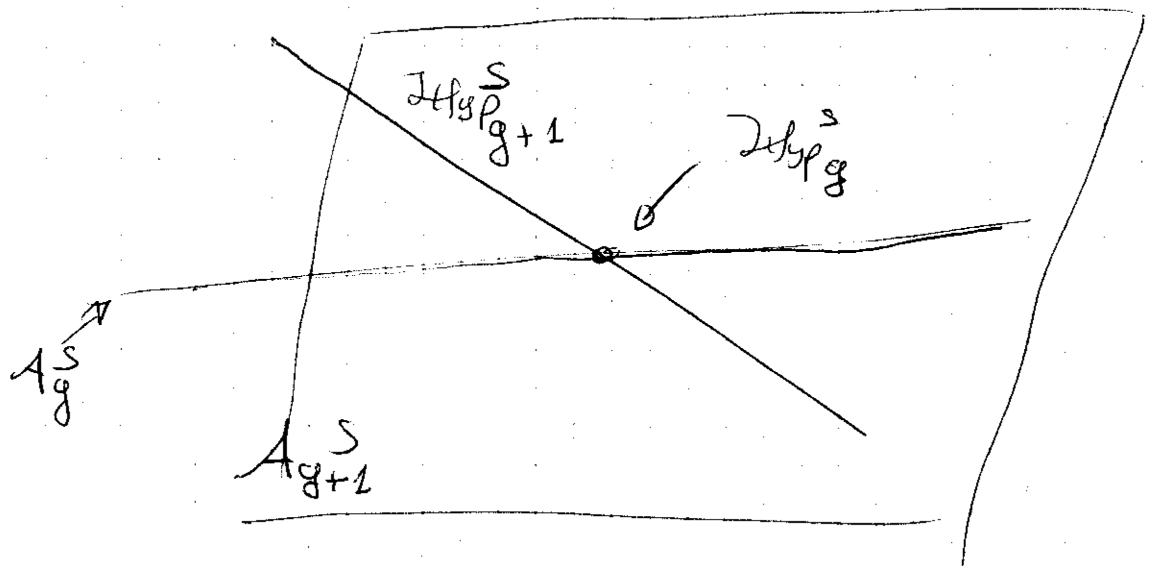
TEO (–, SHEPHERD – BARRON)

$\mathcal{M}_g^S$ CONTIENE IL PRIMO INTORNO INFINITESIMALE DI $\mathcal{M}_{g-1}$ IN A_{g-1}



AL CONTRARIO:

TEO (–) ∂Hyp_g^S INTERSECA TRANSVERSALMENTE A_{g-1}^S



SU $\mathcal{M}_g$ NONO ABBIAMO RISULTATI EFFETTIVI DI QUESTO TIPO, SAPPIAMO CHE ESISTE $\bar{g} > 0$ t.c.

$F_g \equiv 0$ SU $\mathcal{M}_g$ $\quad g < \bar{g}$

$F_{\bar{g}} \neq 0$ SU $\mathcal{M}_{\bar{g}}$ E DEFINISCE UN DIVISORE DI SLOPE $S < +\infty$

$F_g \neq 0$ SU $\mathcal{M}_g$ $\quad g > \bar{g}$ E SLOPE $= +\infty$

SE $rk(\Lambda) > 24$, <u>NON</u> ABBIAMO INFORMAZIONI SU $\bar{g}$ E S

<u>DOMANDA</u> QUALI PROPRIETÀ DI Λ E Γ "VEDE" $\mathcal{M}_g$???

LA DOMANDA ANALOGA VALE PER $\mathcal{H}yp_g$. QUANDO LA FORMA MODULARE F_g SI ANNULLA SU $\mathcal{H}yp_g$ $\forall g$, VUOL DIRE CHE Λ E Γ SI ASSOMIGLIANO, MA IN CHE SENSO ??

FORSE, LA RISPOSTA È LEGATA AI MODULI DI G-FIBRATI E ALLE ALGEBRE DI VERTICE ... ...

FISSIAMO Λ E Π, GUARDIAMO $F_g = \Theta_{\Lambda,g} - \Theta_{\Pi,g}$ SU A_g

¿ É ZERO? LA RISPOSTA SI BASA SU UNO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER. DEFINIAMO IL SEGUENTE COEFFICIENTE

SIA S UNA MATRICE $g \times g$ SIMMETRICA INTERA

$$a_\Lambda(S) := \#\{x_1, \dots, x_g \in \Lambda \mid \underbrace{Q(x_i, x_j) = S_{ij}}\}$$

g EQUAZIONI DI GRADO 2 IN g INCOGNITE

FATTO

$$F_g \equiv 0 \text{ SU } A_g \iff a_\Lambda(S) = a_\Pi(S) \quad \forall S$$

(BASTA CONTROLLARNE UN NUMERO FINITO)

QUINDI A_g "VEDE" IL NUMERO DI SOLUZIONI DI UN OPPORTUNO SISTEMA DI EQUAZIONI

TEO SE $g = \operatorname{rk}(\Lambda) \Rightarrow F_g \neq 0$ SU A_g

DIM $S = \operatorname{Gram}(\Lambda)$

$$a_\Lambda(S) = \# \operatorname{Aut}(\Lambda) \qquad a_\Lambda(S) \neq a_\Pi(S)$$
$$a_\Pi(S) = 0$$

$\square$

QUINDI, CERCHIAMO COPPIE DI RETICOLI Λ E Γ TALI CHE

$$F := \Theta_\Lambda - \Theta_\Gamma \quad \text{SI ANNULLA SU} \quad \mathcal{H}yp_g \quad \forall g \geq 0$$

LE SEGUENTI COPPIE VANNO BENE

1. $\Lambda = E_8 \oplus E_8$, $\Gamma = D_{16}^+$ $(rk = 16)$ (POOR)
2. $rk(\Lambda) = rk(\Gamma) = 24$ $\quad r_2(\Lambda) = r_2(\Gamma)$ $\quad (-)$
3. $rk(\Lambda) = rk(\Gamma) = 32$ $\quad r_2(\Lambda) = r_2(\Gamma) = 0$
4. $rk(\Lambda) = rk(\Gamma) = 48$ $\quad r_2(\Lambda) = r_2(\Gamma) = r_4(\Lambda) = r_4(\Gamma) = 0$

DOVE $r_n(\Lambda) = \#\{ v \in \Lambda \mid Q(v,v) = n \}$

QUESTI ESEMPI SONO IN NUMERO FINITO

NEL CASO (3) CI SONO ALCUNI MILIONI DI COPPIE

LASCIATEMI PORRE IL PROBLEMA IN TERMINI PIÙ GENERALI

AL CONTRARIO, È POSSIBILE TROVARE FORME MODULARI STABILI CHE SI ANNULLANO SU $\mathcal{H}yp_g$ $\forall g \geq 0$

LUOGO DELLE CURVE IPERELLITTICHE

SIA F UNA DI QUESTE FORME

LEMMA: $$F = \sum_i{}' \lambda_i \left(\Theta_{\Lambda_i} - \Theta_{\Gamma_i} \right)$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ E $\Theta_{\Lambda_i} - \Theta_{\Gamma_i}$ SI ANNULLA SU $\mathcal{H}yp_g$ $\forall g \geq 0$ $\forall i$

DIM DEFINIAMO $\mathcal{H}yp_\infty := \lim_g \mathcal{H}yp_g$.

$\mathcal{H}yp_\infty$ È UN SOTTOMONOIDE DI A_∞; LE SERIE TETA SONO CARATTERI PER A_∞, IL RISULTATO SEGUE DALLA TEORIA DELLE ALGEBRE DI HOPF CO-COMMUTATIVE.

IL VANTAGGIO DI QUESTO PUNTO DI VISTA È CHE ORA L'ANELLO DI SEZIONI

$$R(A_\infty, L_\infty)$$

È UN'ALGEBRA DI HOPF. QUESTO SEMPLIFICA ALCUNE DIMOSTRAZIONI,

TEO (FREITAG) $R(A_\infty, L_\infty)$ È UN ANELLO POLINOMIALE.

LE VARIABILI SONO Θ_Λ CON Λ IRRIDUCIBILE (QUINDI ∞ VARIABILI)

DOMANDA ESISTONO FORME MODULARI STABILI (I.E. POLINOMI NELLE Θ_Λ) CHE SI ANNULLANO SU $\mathcal{M}_g$ $\forall g \geq 0$?

RISPOSTA (C., SHEPHERD-BARRON) **NO**

DAREMO UN'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE IN SEGUITO

INOLTRE ABBIAMO

$$L_g \big|_{A_{g-1}^S} = L_{g-1}$$

QUINDI POSSIAMO COSTRUIRE IL FIBRATO

$$L_\infty = \lim_g L_g \longrightarrow A_\infty$$

E SI VERIFICA CHE $m^* L_\infty = L_\infty \boxtimes L_\infty$

LE SEZIONI DI L_∞^K SONO DETTE F. M. STABILI DI PESO K

$$H^0(A_\infty, L_\infty^k) = \lim_g H^0(A_g, L_g^k) = \left\{ (F_g)_{g \geq 0} \,\middle|\, F_g \in H^0(A_g, L_g^k),\ F_g \big|_{A_{g-1}} = F_{g-1} \right\}$$

DEFINIAMO $\Theta_\Lambda := \left(\Theta_{\Lambda, g} \right)_{g \geq 0}$

<u>FATTO</u> Θ_Λ É UNA FORMA MODULARE STABILE, ED

É UN CARATTERE PER A_∞

SECONDO PUNTO DI VISTA SU Λ_g

ABBIAMO UN FIBRATO AMPIO $L_g \to A_g$; DEFINIAMO LA COMPATTIFICAZIONE DI SATAKE COME

$$A_g^S := \mathrm{Proj}\, R(A_g, L_g)$$

FATTO $\quad A_g^S = A_g \amalg A_{g-1}^S$

QUINDI POSSIAMO DEFINIRE LA IND-VARIETÀ

$$A_\infty = \lim_g A_g^S$$

QUESTO SPAZIO HA UNA STRUTTURA DI MONOIDE COMMUTATIVO

$$\begin{aligned} m: \quad A_\infty \times A_\infty &\longrightarrow A_\infty \\ [X] \quad [Y] &\longmapsto [X \times Y] \end{aligned}$$

UTILIZZANDO LA TEORIA DEI "LOOP GROUPS", SI PUÒ ASSOCIARE A Q UN FIBRATO LINEARE $L_Q \to P_G$. QUINDI VOGLIO VEDERE $Q \in \mathrm{Pic}(P_G)$.

e.g.: SE $G = SL_n$, IL CASIMIR DÀ IL GENERATORE DEL PICARD

~~QUANDO~~ QUANDO $G = (\mathbb{G}_m)^N$ E Q È UNIMODULARE ABBIAMO $h^0(L_Q) = 1$ E $\Theta_{\Lambda,g}$ È IL PULL-BACK DI QUESTA SEZIONE ATTRAVERSO LA SEZIONE NULLA, OVVERO

$$
\begin{tikzcd}
L_Q \arrow[r] & P_G \arrow[r] & \mathcal{M}_g \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[ll, bend left=50, "\Theta_{\Lambda,g}"]
\end{tikzcd}
$$

MODULI DI G - BUNDLES

SIA G UN GRUPPO ALGEBRICO RIDUTTIVO, e.g. $G = SL_n$

$G = (\mathbb{C}_m^*)^N$

CHIAMIAMO P_G LO SPAZIO DEI MODULI

$$P_G = \{ \pi : V \to C \mid C \in \mathcal{M}_g ,\ V \text{ È UN } G\text{-FIBRATO} \}$$

ABBIAMO UNA PROIEZIONE $p : P_G \to \mathcal{M}_g$.

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ $\quad Q : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ UNA FORMA QUADRATICA

Ad - INVARIANTE E OPPORTUNAMENTE NORMALIZZATA

e.g. PER $G = SL_n$ $\quad Q$ = CASIMIR ; $G = (\mathbb{C}_m^*)^N$ LE Q CHE

ABBIAMO DISCUSSO PRIMA

DATA UNA F. Q. (Λ, Q), $\forall g \geq 1$ DEFINIAMO

LA SERIE TETA ASSOCIATA A (Λ, Q)

$$\Theta_{\Lambda, g}(\tau) := \sum_{x_1, \dots, x_g \in \Lambda} \exp\left(\pi i \sum_{i,j} Q(x_i, x_j)\, \tau_{ij}\right)$$

$$\forall \tau \in \mathcal{H}_g$$

FATTO. $\Theta_{\Lambda, g}$ É UNA FORMA MODULARE DI

PESO $\frac{N}{2}$

GRADO g.

ORA DAREMO DUE PUNTI DI VISTA SU QUESTA FORMA MODULARE "MENO CONTOSI"

SORPRENDENTEMENTE, POSSIAMO DEFINIRE UNA F. M. A PARTIRE DA UNA FORMA QUADRATICA.

DEFINIZIONE DI FORMA QUADRATICA:

UNA F. Q. È UNA COPPIA (Λ, Q) DOVE $\Lambda \cong \mathbb{Z}^N$

$$Q : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}. \qquad N = \mathrm{rk}(\Lambda)$$

ASSUMO: PARI $\left(= Q(v,v) \in 2\mathbb{Z} \ \forall v \in \Lambda \right)$, $Q > 0$, UNIMODULARI

ALCUNE CONSEGUENZE DELLE IPOTESI:

- $\mathrm{rk}(\Lambda) = 8K$ (OVVERO, È UN MULTIPLO DI 8)
- FISSATO $\mathrm{rk}(\Lambda)$, $\exists \ \# < \infty$ DI F. Q.

ABBIAMO LA SEGUENTE TABELLINA

$\mathrm{rk}(\Lambda)$	8	16	24	32	???
# F. Q.	1	2	24	ALMENO DIECI MILIONI	

COME COSTRUIRE FORME MODULARI:

$$\mathcal{H}_g = \{ \text{MATRICI } \tau \quad g \times g \text{ , SIMM. , } \quad \operatorname{Im} \tau > 0 \}$$

CONTRAIBILE

$$\mathcal{A}_g = \mathcal{H}_g / Sp(2g, \mathbb{Z})$$

DISCRETO

QUINDI

$$H^0(\mathcal{A}_g, L_g^K) = \{ F : \mathcal{H}_g \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ OLOMORFE, } F(g\tau) = j(g,\tau)^K F(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{H}_g, \ \forall g \in Sp(2g,\mathbb{Z}) \}$$

j — È IL COCICLO CHE DEFINISCE L_g

ESPLICITAMENTE

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{Z}) \qquad j(g,\tau) = \det (C\tau + D).$$

APPROCCIO ALGEBRICO:

$L_g \longrightarrow A_g$ FIBRATO AMPIO

$L_g := \det \mathbb{E}_g$, $\quad Pic(A_g) = \mathbb{Q} L_g$

$H^0(A_g, L_g^k) =$ FORME MODULARI DI PESO K E GRADO g

CERCHIAMO FORME MODULARI CHE SI ANNULLANO SU $\mathcal{M}_g$, OVVERO LE EQUAZIONI DI $\mathcal{M}_g$ IN A_g.

OSS: PIÙ IN GENERALE, È INTERESSANTE CAPIRE SE UNA DATA FORMA MODULARE SI ANNULLA SU $\mathcal{M}_g$. QUALORA NON SI ANNULLASSE, SI OTTERREBBE UN DIVISORE EFFETTIVO SU $\mathcal{M}_g$. PRODURRE ESEMPI DI DIVISORI "INTERESSANTI" SU $\mathcal{M}_g$ È UN PROBLEMA APERTO