Componenti di spazi di moduli di curve spin aventi dimensione attesa

Luca Benzo

Università di Trento

Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati XII

Torino, 4-7 giugno 2014

Theta-caratteristiche e dimensione attesa

- Sia $C \subset \mathbb{P}^r$ liscia. $L \in \mathrm{Pic}(C)$ t.c. $L^2 \cong \omega_C$ si dice theta caratteristica.
  Le theta-caratteristiche sono state studiate classicamente da diversi punti di vista:
  - Relazione con le funzioni theta (punto di vista trascendente).
  - Sia $G \subset \mathbb{P}^2$, $\deg G = 4$. $\omega_G \cong \mathcal{O}_G(1)$. Le bitangenti a G definiscono una theta-caratteristica su G.
- Identificazione di componenti privilegiate di spazi di moduli riducibili:
  - Se $\rho(g,r,d) \doteq g-(r+1)(g+r-d) \geq 0$, esiste una sola $V \subset Hilb_{g,r,d}$ t.c. $\pi : Hilb_{g,r,d}{}_{|V} \dashrightarrow \mathcal{M}_g$ è dominante.
    Numero atteso di moduli per una $V \subset Hilb_{g,r,d}$ t.c. $\rho(g,r,d) < 0$ (Sernesi);
  - *Numero atteso di moduli* per una $V \subset \overline{\mathcal{M}}_g(X,\beta)$ (Farkas).

Theta-caratteristiche e dimensione attesa

- Sia $C \subset \mathbb{P}^r$ liscia. $L \in \mathrm{Pic}(C)$ t.c. $L^2 \cong \omega_C$ si dice theta caratteristica.
  Le theta-caratteristiche sono state studiate classicamente da diversi punti di vista:
  - Relazione con le funzioni theta (punto di vista trascendente).
  - Sia $G \subset \mathbb{P}^2$, $\deg G = 4$. $\omega_G \cong \mathcal{O}_G(1)$. Le bitangenti a G definiscono una theta-caratteristica su G.

- Identificazione di componenti privilegiate di spazi di moduli riducibili:
  - Se $\rho(g, r, d) \doteq g - (r+1)(g + r - d) \geq 0$, esiste una sola $V \subset Hilb_{g,r,d}$ t.c. $\pi : Hilb_{g,r,d}{}_{|V} \dashrightarrow \mathcal{M}_g$ è dominante.
    Numero atteso di moduli per una $V \subset Hilb_{g,r,d}$ t.c. $\rho(g, r, d) < 0$ (Sernesi);
  - *Numero atteso di moduli* per una $V \subset \overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)$ (Farkas).

Theta-caratteristiche e dimensione attesa

- Sia $C \subset \mathbb{P}^r$ liscia. $L \in \mathrm{Pic}(C)$ t.c. $L^2 \cong \omega_C$ si dice theta caratteristica.
  Le theta-caratteristiche sono state studiate classicamente da diversi punti di vista:
  - Relazione con le funzioni theta (punto di vista trascendente).
  - Sia $G \subset \mathbb{P}^2$, $\deg G = 4$. $\omega_G \cong \mathcal{O}_G(1)$. Le bitangenti a G definiscono una theta-caratteristica su G.

- Identificazione di componenti privilegiate di spazi di moduli riducibili:
  - Se $\rho(g,r,d) \doteq g-(r+1)(g+r-d) \geq 0$, esiste una sola $V \subset Hilb_{g,r,d}$ t.c. $\pi : Hilb_{g,r,d_{|V}} \dashrightarrow \mathcal{M}_g$ è dominante.
    Numero atteso di moduli per una $V \subset Hilb_{g,r,d}$ t.c. $\rho(g,r,d) < 0$ (Sernesi);
  - *Numero atteso di moduli* per una $V \subset \overline{\mathcal{M}}_g(X,\beta)$ (Farkas).

Curve spin

- Sia $g \geq 1$. Si dice curva spin (liscia) di genere g una coppia (C, L), $g(C) = g$, $L \in \text{Pic}(C)$, $L^2 \cong \omega_C$.
- $S(C) \doteq \{L \in \text{Pic}(C) | L^2 \cong \omega_C\}$.
  Dati $L_1, L_2 \in S(C)$ si ha $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong M$, $M^2 \cong \mathcal{O}_C$. $S(C)$ è uno spazio omogeneo principale su $J_2(C) \doteq \{M \in \text{Pic}(C) | M^2 \cong \mathcal{O}_C\}$.
- $\mathcal{S}_g \doteq \{(C, L) | L \in \text{Pic}(C), L^2 \cong \omega_C\}$ spazio dei moduli delle curve spin (lisce) di genere g.
  La mappa $\pi : \mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$ è finita, étale di grado 2^{2g}.
  $$(C, L) \mapsto [C]$$

Curve spin

- Sia $g \geq 1$. Si dice curva spin (liscia) di genere g una coppia (C, L), $g(C) = g$, $L \in \mathrm{Pic}(C)$, $L^2 \cong \omega_C$.

- $S(C) \doteq \{L \in \mathrm{Pic}(C) | L^2 \cong \omega_C\}$.
  Dati $L_1, L_2 \in S(C)$ si ha $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong M$, $M^2 \cong \mathcal{O}_C$. $S(C)$ è uno spazio omogeneo principale su $J_2(C) \doteq \{M \in \mathrm{Pic}(C) | M^2 \cong \mathcal{O}_C\}$.

- $\mathcal{S}_g \doteq \{(C, L) | L \in \mathrm{Pic}(C), L^2 \cong \omega_C\}$ spazio dei moduli delle curve spin (lisce) di genere g.
  La mappa $\pi : \mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$ è finita, étale di grado 2^{2g}.
  $$(C, L) \mapsto [C]$$

Curve spin

- Sia $g \geq 1$. Si dice curva spin (liscia) di genere g una coppia (C, L), $g(C) = g$, $L \in \mathrm{Pic}(C)$, $L^2 \cong \omega_C$.

- $S(C) \doteq \left\{L \in \mathrm{Pic}(C) | L^2 \cong \omega_C\right\}$.
  Dati $L_1, L_2 \in S(C)$ si ha $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong M$, $M^2 \cong \mathcal{O}_C$. $S(C)$ è uno spazio omogeneo principale su $J_2(C) \doteq \left\{M \in \mathrm{Pic}(C) | M^2 \cong \mathcal{O}_C\right\}$.

- $\mathcal{S}_g \doteq \left\{(C, L) | L \in \mathrm{Pic}(C), L^2 \cong \omega_C\right\}$ spazio dei moduli delle curve spin (lisce) di genere g.
  La mappa $\pi : \mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$ è finita, étale di grado 2^{2g}.
  $$(C, L) \mapsto [C]$$

Teorema (Mumford '76, Harris ' 82)

Sia $\Psi : \mathcal{S} \to B$ piatta, B irriducibile, per ogni $\lambda \in B$ sia S_λ una curva ridotta nodale e sia $\mathcal{L} \in Pic(\mathcal{S})$ tale che $\mathcal{L}_\lambda^2 \cong \omega_{S_\lambda}$. Allora:

(i) $\rho : \lambda \mapsto h^0(S_\lambda, \mathcal{L}_\lambda)$ *è costante modulo 2;*

(ii) $B_r \doteq \{\lambda \in B | \rho(\lambda) = r + 1\}$ *è vuoto oppure ha codimensione minore o uguale a* $\binom{r+1}{2}$ *in* B.

- Sia $\mathcal{S}_g^r \doteq \{(C, L) \in \mathcal{S}_g | h^0(L) \geq r + 1 \text{ e } h^0(L) \equiv r + 1 \,(\text{mod } 2)\}$.
  Sia $\mathcal{M}_g^r \doteq \pi(\mathcal{S}_g^r)$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse, $\mathcal{S}_g^{even}$ e $\mathcal{S}_g^{odd}$.

Teorema (Mumford '76, Harris ' 82)

Sia $\Psi : \mathcal{S} \to B$ piatta, B irriducibile, per ogni $\lambda \in B$ sia S_λ una curva ridotta nodale e sia $\mathcal{L} \in Pic(\mathcal{S})$ tale che $\mathcal{L}_\lambda^2 \cong \omega_{S_\lambda}$. Allora:

(i) *$\rho : \lambda \mapsto h^0(S_\lambda, \mathcal{L}_\lambda)$ è costante modulo 2;*

(ii) *$B_r \doteq \{\lambda \in B | \rho(\lambda) = r+1\}$ è vuoto oppure ha codimensione minore o uguale a $\binom{r+1}{2}$ in B.*

- Sia $\mathcal{S}_g^r \doteq \{(C, L) \in \mathcal{S}_g | h^0(L) \geq r+1 \text{ e } h^0(L) \equiv r+1 \pmod 2\}$.
  Sia $\mathcal{M}_g^r \doteq \pi(\mathcal{S}_g^r)$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse, $\mathcal{S}_g^{even}$ e $\mathcal{S}_g^{odd}$.

Teorema (Mumford '76, Harris ' 82)

Sia $\Psi : \mathcal{S} \to B$ piatta, B irriducibile, per ogni $\lambda \in B$ sia S_λ una curva ridotta nodale e sia $\mathcal{L} \in Pic(\mathcal{S})$ tale che $\mathcal{L}_\lambda^2 \cong \omega_{S_\lambda}$. Allora:

(i) *$\rho : \lambda \mapsto h^0(S_\lambda, \mathcal{L}_\lambda)$ è costante modulo 2;*

(ii) *$B_r \doteq \{\lambda \in B | \rho(\lambda) = r+1\}$ è vuoto oppure ha codimensione minore o uguale a $\binom{r+1}{2}$ in B.*

- Sia $\mathcal{S}_g^r \doteq \left\{(C, L) \in \mathcal{S}_g | h^0(L) \geq r+1 \text{ e } h^0(L) \equiv r+1 \pmod 2\right\}$. Sia $\mathcal{M}_g^r \doteq \pi(\mathcal{S}_g^r)$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse, $\mathcal{S}_g^{even}$ e $\mathcal{S}_g^{odd}$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g^r$ è vuoto se e solo se $r > \frac{g-1}{2}$. Se $r \leq \frac{g-1}{2}$, per ogni $V \subset \mathcal{S}_g^r$ si ha

$$\dim V \geq 3g - 3 - \binom{r+1}{2}.$$

- Si ha uguaglianza per r basso (Teixidor '87):
  - $\mathcal{M}_g^1$ è un divisore in $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_g^2$ ha codimensione pura 3, $\mathcal{M}_g^3$ ha codimensione pura 6 per $g \geq 8$.
- Può essere $\mathcal{M}_g^r \neq \emptyset$ ma $3g - 3 - \binom{r+1}{2} << 0$:
  - luogo iperellittico $\emptyset \neq \mathcal{H}_g \subset \mathcal{M}_g^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor}$:
    $L = \frac{g-1}{2}\mathfrak{g}_2^1$, g dispari; $L = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor \mathfrak{g}_2^1 + P$, P di Weiestrass, g pari.
  - curve Castelnuovo estremali danno $\mathcal{M}_{3r}^r \neq \emptyset$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g^r$ è vuoto se e solo se $r > \frac{g-1}{2}$. Se $r \leq \frac{g-1}{2}$, per ogni $V \subset \mathcal{S}_g^r$ si ha

$$\dim V \geq 3g - 3 - \binom{r+1}{2}.$$

- Si ha uguaglianza per r basso (Teixidor '87):
  - $\mathcal{M}_g^1$ è un divisore in $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_g^2$ ha codimensione pura 3, $\mathcal{M}_g^3$ ha codimensione pura 6 per $g \geq 8$.
- Può essere $\mathcal{M}_g^r \neq \emptyset$ ma $3g - 3 - \binom{r+1}{2} << 0$:
  - luogo iperellittico $\emptyset \neq \mathcal{H}_g \subset \mathcal{M}_g^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor}$:

    $L = \frac{g-1}{2}\mathfrak{g}_2^1$, g dispari; $L = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor \mathfrak{g}_2^1 + P$, P di Weiestrass, g pari.
  - curve Castelnuovo estremali danno $\mathcal{M}_{3r}^r \neq \emptyset$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g^r$ è vuoto se e solo se $r > \frac{g-1}{2}$. Se $r \leq \frac{g-1}{2}$, per ogni $V \subset \mathcal{S}_g^r$ si ha

$$\dim V \geq 3g - 3 - \binom{r+1}{2}.$$

- Si ha uguaglianza per r basso (Teixidor '87):
  - $\mathcal{M}_g^1$ è un divisore in $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_g^2$ ha codimensione pura 3, $\mathcal{M}_g^3$ ha codimensione pura 6 per $g \geq 8$.
- Può essere $\mathcal{M}_g^r \neq \emptyset$ ma $3g - 3 - \binom{r+1}{2} << 0$:
  - luogo iperellittico $\emptyset \neq \mathcal{H}_g \subset \mathcal{M}_g^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor}$:
    $L = \frac{g-1}{2}\mathfrak{g}_2^1$, g dispari; $L = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor \mathfrak{g}_2^1 + P$, P di Weiestrass, g pari.
  - curve Castelnuovo estremali danno $\mathcal{M}_{3r}^r \neq \emptyset$.

Proposizione

$\mathcal{S}_g^r$ è vuoto se e solo se $r > \frac{g-1}{2}$. Se $r \leq \frac{g-1}{2}$, per ogni $V \subset \mathcal{S}_g^r$ si ha

$$\dim V \geq 3g - 3 - \binom{r+1}{2}.$$

- Si ha uguaglianza per r basso (Teixidor '87):
  - $\mathcal{M}_g^1$ è un divisore in $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_g^2$ ha codimensione pura 3, $\mathcal{M}_g^3$ ha codimensione pura 6 per $g \geq 8$.
- Può essere $\mathcal{M}_g^r \neq \emptyset$ ma $3g - 3 - \binom{r+1}{2} << 0$:
  - luogo iperellittico $\emptyset \neq \mathcal{H}_g \subset \mathcal{M}_g^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor}$:
    $L = \frac{g-1}{2}\mathfrak{g}_2^1$, g dispari; $L = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor \mathfrak{g}_2^1 + P$, P di Weiestrass, g pari.
  - curve Castelnuovo estremali danno $\mathcal{M}_{3r}^r \neq \emptyset$.

Teorema (Induzione su g, Farkas '05)

Siano $r, g_0 \geq 1$. Se $\mathcal{S}^r_{g_0}$ ha una componente di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_{g_0}$, allora, per ogni $g \geq g_0$, $\mathcal{S}^r_g$ ha una componente di di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_g$.

- Compattificazione $\overline{\mathcal{S}}_g$ di $\mathcal{S}_g$ (Cornalba '89).

Definizione

Sia X curva ridotta nodale. $R \subset X$ razionale liscia si dice componente eccezionale di X se $(R \cap \overline{(X \smallsetminus R)}) \leq 2$.

X si dice decente se è semistabile e $R_i \cap R_j = \emptyset$ per ogni $R_i, R_j \subset X, i \neq j$ eccezionali.

Teorema (Induzione su g, Farkas '05)

Siano $r, g_0 \geq 1$. *Se* $\mathcal{S}^r_{g_0}$ *ha una componente di codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_{g_0}$, *allora, per ogni* $g \geq g_0$, $\mathcal{S}^r_g$ *ha una componente di di codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_g$.

- Compattificazione $\overline{\mathcal{S}}_g$ di $\mathcal{S}_g$ (Cornalba '89).

Definizione

Sia X *curva ridotta nodale.* $R \subset X$ *razionale liscia si dice* ***componente eccezionale*** *di* X *se* $(R \cap \overline{(X \setminus R)}) \leq 2$.

X *si dice* ***decente*** *se è semistabile e* $R_i \cap R_j = \emptyset$ *per ogni* $R_i, R_j \subset X, i \neq j$ *eccezionali.*

Definizione

Una curva spin di genere g è una 3-upla (X, L, α), X decente, $p_a(X) = g$, $L \in Pic^{g-1}(X)$ e $\alpha : L^2 \to \omega_X$ t.c.:

- $\deg L_{|R} = 1$ *per ogni componente ecccezionale $R \subset X$;*
- $\alpha \neq 0$ *su ogni componente non eccezionale di X.*

- α è un isomorfismo su $\overline{X \setminus \bigcup_i R_i}$.

  Se X è liscia, L è una theta-caratteristica.

- $\overline{\mathcal{S}}_g \doteq \{$classi di isomorfismo di curve spin di genere $g\}$.

$$\pi : \overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g \text{ finita di grado } 2^{2g}$$

$\pi^{-1}([C]) \doteq \{(X, L, \alpha)$ curva spin, $p_a(X) = g | X$ stab. equiv. a $C\}$.

$\overline{\mathcal{S}}_g$ è una varietà proiettiva normale.

Definizione

Una curva spin di genere g è una 3-upla (X, L, α), X decente, $p_a(X) = g$, $L \in Pic^{g-1}(X)$ e $\alpha : L^2 \to \omega_X$ t.c.:

- *$\deg L_{|R} = 1$ per ogni componente ecccezionale $R \subset X$;*
- *$\alpha \neq 0$ su ogni componente non eccezionale di X.*

- α è un isomorfismo su $\overline{X \setminus \bigcup_i R_i}$.

  Se X è liscia, L è una theta-caratteristica.

- $\overline{\mathcal{S}}_g \doteq \{$classi di isomorfismo di curve spin di genere $g\}$.

$$\pi : \overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g \text{ finita di grado } 2^{2g}$$

$\pi^{-1}([C]) \doteq \{(X, L, \alpha) \text{ curva spin}, p_a(X) = g | X \text{ stab. equiv. a } C\}$.

$\overline{\mathcal{S}}_g$ è una varietà proiettiva normale.

Definizione

Una curva spin di genere g è una 3-upla (X, L, α), *X decente,* $p_a(X) = g$, $L \in Pic^{g-1}(X)$ *e* $\alpha : L^2 \to \omega_X$ *t.c.:*

- $\deg L_{|R} = 1$ *per ogni componente ecccezionale* $R \subset X$;
- $\alpha \neq 0$ *su ogni componente non eccezionale di* X.

- α è un isomorfismo su $\overline{X \setminus \bigcup_i R_i}$.

  Se X è liscia, L è una theta-caratteristica.
- $\overline{\mathcal{S}}_g \doteq \{$classi di isomorfismo di curve spin di genere $g\}$.

$$\pi : \overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g \text{ finita di grado } 2^{2g}$$

$\pi^{-1}([C]) \doteq \{(X, L, \alpha) \text{ curva spin}, p_a(X) = g | X \text{ stab. equiv. a } C\}$.

$\overline{\mathcal{S}}_g$ è una varietà proiettiva normale.

Teorema (Farkas)

Siano $r, g \geq 1$. Se $\mathcal{S}^r_g$ ha una componente V_g di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_g$, allora $\mathcal{S}^r_{g+1}$ ha una componente V_{g+1} di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_{g+1}$.

Dimostrazione.

Sia $(C_1, L_1) \in V_g$. Definiamo $C \doteq C_1 \cup_p E$, $g(E) = 1$, $p \in C_1$ generico e $X \doteq C_1 \cup_q R \cup_s E$ ottenuta scoppiando C in p.

Definiamo (X, L, α) con $L_{C_1} = L_1$, $L_R = \mathcal{O}_R(1)$ e $L_E = \mathcal{O}_E(t - s)$.

Si ha $h^0(X, L) = h^0(C_1, L_1) \geq r + 1$. $(X, L, \alpha) \in \overline{\mathcal{S}}^r_{g+1}$?

Sia $(\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathcal{L}, \alpha : \mathcal{L}^2 \to \omega_f)$ una deformazione semiuniversale di (X, L, α) e sia $B_r \doteq \{ b \in B | h^0(L_b) \geq r + 1, h^0(L_b) \equiv r + 1 (\mathrm{mod}\ 2) \}$.

Teorema (Farkas)

Siano $r, g \geq 1$. Se $\mathcal{S}_g^r$ ha una componente V_g di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_g$, allora $\mathcal{S}_{g+1}^r$ ha una componente V_{g+1} di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_{g+1}$.

Dimostrazione.

Sia $(C_1, L_1) \in V_g$. Definiamo $C \doteq C_1 \cup_p E$, $g(E) = 1$, $p \in C_1$ generico e $X \doteq C_1 \cup_q R \cup_s E$ ottenuta scoppiando C in p.

Definiamo (X, L, α) con $L_{C_1} = L_1$, $L_R = \mathcal{O}_R(1)$ e $L_E = \mathcal{O}_E(t - s)$.

Si ha $h^0(X, L) = h^0(C_1, L_1) \geq r + 1$. $(X, L, \alpha) \in \overline{\mathcal{S}}_{g+1}^r$?

Sia $(\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathcal{L}, \alpha : \mathcal{L}^2 \to \omega_f)$ una deformazione semiuniversale di (X, L, α) e sia $B_r \doteq \left\{ b \in B | h^0(L_b) \geq r + 1, h^0(L_b) \equiv r + 1 (\mathrm{mod}\ 2) \right\}$.

Dimostrazione.

Per assurdo sia $0 \ni W \subset B_r$ t.c. $W \subset \underbrace{\Delta}_{\text{curve spin singolari}}$. Usando il teorema di Mumford si costruisce

$$W \doteq \left\{ (C_b \cup R_b \cup E_b, L_b, \alpha_b), b \in \Delta | (C_b, L_{b|C_b}) \in V_g \right\}$$

Allora $\dim W = \dim V_g + 2 < 3(g+1) - 3 - \binom{r+1}{2}$, assurdo, e quindi $(X, L, \alpha) \in \overline{\mathcal{S}}^r_{g+1}$.

Esiste $(X, L, \alpha) \ni V_{g+1} \subset \overline{\mathcal{S}}^r_{g+1}$ di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\overline{\mathcal{S}}_{g+1}$.

Lemma

Sia $C = C_1 \cup_p E$ una curva stabile, C_1 liscia, $g(C_1) = g$, $g(E) = 1$, p generico in C_1. Se $[C] \in \overline{\mathcal{M}}^r_{g+1}$, allora $[C_1] \in \mathcal{M}^r_g$.

Dimostrazione.

Per assurdo sia $0 \ni W \subset B_r$ t.c. $W \subset \underbrace{\Delta}_{\text{curve spin singolari}}$. Usando il teorema di Mumford si costruisce

$$W \doteq \left\{(C_b \cup R_b \cup E_b, L_b, \alpha_b), b \in \Delta \middle| (C_b, L_{b|C_b}) \in V_g\right\}$$

Allora $\dim W = \dim V_g + 2 < 3(g+1) - 3 - \binom{r+1}{2}$, assurdo, e quindi $(X, L, \alpha) \in \overline{\mathcal{S}}^r_{g+1}$.

Esiste $(X, L, \alpha) \ni V_{g+1} \subset \overline{\mathcal{S}}^r_{g+1}$ di codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\overline{\mathcal{S}}_{g+1}$.

Lemma

Sia $C = C_1 \cup_p E$ una curva stabile, C_1 liscia, $g(C_1) = g$, $g(E) = 1$, p generico in C_1. Se $[C] \in \overline{\mathcal{M}}^r_{g+1}$, allora $[C_1] \in \mathcal{M}^r_g$.

$\square$

Sia X varietà proiettiva liscia, $L \in \mathrm{Pic}(X)$.

Sia $R(L) \doteq \ker H^0(L) \otimes H^0(L) \to H^0(L^2)$.

Si ha $R(L) = \wedge^2 H^0(L) \oplus S_2(L)$, dove $S_2(L) \doteq \ker \mathrm{Sym}^2 H^0(L) \to H^0(L^2)$.

Definiamo

$$\Phi_L : R(L) \to H^0(\Omega^1_X \otimes L^2)$$

$$s \otimes t \mapsto s\,dt - t\,ds.$$

$\Psi_L \doteq \Phi_{L|\wedge^2 H^0(L)} : \wedge^2 H^0(L) \to H^0(\Omega^1_X \otimes L^2)$ mappa gaussiana di L

La mappa di Gauss

Sia X varietà proiettiva liscia, $L \in \mathrm{Pic}(X)$.

Sia $R(L) \doteq \ker H^0(L) \otimes H^0(L) \to H^0(L^2)$.

Si ha $R(L) = \wedge^2 H^0(L) \oplus S_2(L)$, dove $S_2(L) \doteq \ker \mathrm{Sym}^2 H^0(L) \to H^0(L^2)$.

Definiamo

$$\Phi_L : R(L) \to H^0(\Omega^1_X \otimes L^2)$$

$$s \otimes t \mapsto s\,dt - t\,ds.$$

$$\Psi_L \doteq \Phi_{L|\wedge^2 H^0(L)} : \wedge^2 H^0(L) \to H^0(\Omega^1_X \otimes L^2)$$ mappa gaussiana di L

- Sia ora L m.a. e $X \hookrightarrow_{\varphi_{|L|}} \mathbb{P}^r$. Dualizzando

$$0 \to \mathcal{O}_X \to H^0(\mathcal{O}_X(1))^* \otimes \mathcal{O}_X(1) \to T_{\mathbb{P}^r|X} \to 0$$

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2) \to H^0(\mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{O}_X(2) \to 0.$$

- $R(L) = H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2))$ e $\Phi_L = H^0(\alpha)$

$$0 \to N_X^\vee(2) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2) \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_X(2) \to 0.$$

- $H^0(N_X^\vee(2)) \cong \ker \Phi_L = \ker \Psi_L \oplus \underbrace{S_2(L)}_{\cong H^0(\mathcal{I}_X(2))}$

- Sia ora L m.a. e $X \hookrightarrow_{\varphi_{|L|}} \mathbb{P}^r$. Dualizzando

$$0 \to \mathcal{O}_X \to H^0(\mathcal{O}_X(1))^* \otimes \mathcal{O}_X(1) \to T_{\mathbb{P}^r|X} \to 0$$

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2) \to H^0(\mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{O}_X(2) \to 0.$$

- $R(L) = H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2))$ e $\Phi_L = H^0(\alpha)$

$$0 \to N_X^\vee(2) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2) \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_X(2) \to 0.$$

- $H^0(N_X^\vee(2)) \cong \ker \Phi_L = \ker \Psi_L \oplus \underbrace{S_2(L)}_{\cong H^0(\mathcal{I}_X(2))}$

- Sia ora L m.a. e $X \hookrightarrow_{\varphi_{|L|}} \mathbb{P}^r$. Dualizzando

$$0 \to \mathcal{O}_X \to H^0(\mathcal{O}_X(1))^* \otimes \mathcal{O}_X(1) \to T_{\mathbb{P}^r|X} \to 0$$

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2) \to H^0(\mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{O}_X(2) \to 0.$$

- $R(L) = H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2))$ e $\Phi_L = H^0(\alpha)$

$$0 \to N_X^\vee(2) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^r|X}(2) \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_X(2) \to 0.$$

- $H^0(N_X^\vee(2)) \cong \ker \Phi_L = \ker \Psi_L \oplus \underbrace{S_2(L)}_{\cong H^0(\mathcal{I}_X(2))}$

- Isoliamo $H^0(\mathcal{I}_X(2))$ mediante $0 \to \underbrace{\mathcal{I}_X^2(2)}_{h^0=0} \to \mathcal{I}_X(2) \to N_X^\vee(2) \to 0.$

Osservazione

Se $h^1(\mathcal{I}_X(2)) = 0$, *allora* $\ker \Psi_L \cong H^1(\mathcal{I}_X^2(2))$.

- Connessione tra (C, L) curva spin e Ψ_L:

Teorema (Nagaraj '90)

Sia $(C, L) \in \mathcal{S}_g^r$ *e sia* $\Psi_L : \wedge^2 H^0(L) \to H^0(\omega_C^2)$ *la mappa di Gauss. Allora*

$$T_{(C,L)} S_g^r \cong \left(im\,(\Psi_L)^\perp \right)^\vee \subset T_{(C,L)} \mathcal{S}_g \cong T_{[C]} \mathcal{M}_g = H^0(\omega_C^2)^\vee.$$

In particolare, se Ψ_L *iniettiva,* $\dim T_{(C,L)} S_g^r = 3g - 3 - \binom{r+1}{2}$.

- Isoliamo $H^0(\mathcal{I}_X(2))$ mediante $0 \to \underbrace{\mathcal{I}_X^2(2)}_{h^0=0} \to \mathcal{I}_X(2) \to N_X^\vee(2) \to 0$.

Osservazione

Se $h^1(\mathcal{I}_X(2)) = 0$, *allora* $\ker \Psi_L \cong H^1(\mathcal{I}_X^2(2))$.

- Connessione tra (C, L) curva spin e Ψ_L:

Teorema (Nagaraj '90)

Sia $(C, L) \in \mathcal{S}_g^r$ *e sia* $\Psi_L : \wedge^2 H^0(L) \to H^0(\omega_C^2)$ *la mappa di Gauss. Allora*

$$T_{(C,L)}S_g^r \cong \left(im\ (\Psi_L)^\perp\right)^\vee \subset T_{(C,L)}\mathcal{S}_g \cong T_{[C]}\mathcal{M}_g = H^0(\omega_C^2)^\vee.$$

In particolare, se Ψ_L *iniettiva,* $\dim T_{(C,L)}S_g^r = 3g - 3 - \binom{r+1}{2}$.

Corollario

Sia $(C, L) \in V \subset \mathcal{S}_g^r$ *tale che* Ψ_L *è iniettiva. Allora* (C, L) *è un punto liscio di* V *e* V *ha codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_g$.

Proposizione (Wahl '90)

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ *una varietà liscia proiettivamente normale tale che* $\Psi_{\mathcal{O}_X(1)}$ *è iniettiva. Se* $Y \subset X$ *soddisfa*

$$H^1(\mathcal{I}_{Y/X}(1)) = (0), H^1(\mathcal{I}^2_{Y/X}(2)) = (0), H^1(\mathcal{I}_{Y/X} \otimes N_X^\vee(2)) = (0)$$

allora $\Psi_{\mathcal{O}_Y(1)}$ *è iniettiva.*

Proposizione (Wahl '90)

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ *una varietà liscia proiettivamente normale e aritmeticamente CM e* Y *una sezione lineare liscia di codimensione* $n < r$*. Se* $H^1(N_X^\vee(2-i)) = (0)$ *per* $1 \le i \le n$ *e* $\Psi_{\mathcal{O}_X(1)}$ *è iniettiva, allora anche* $\Psi_{\mathcal{O}_Y(1)}$ *è iniettiva.*

Corollario

Sia $(C, L) \in V \subset \mathcal{S}_g^r$ *tale che* Ψ_L *è iniettiva. Allora* (C, L) *è un punto liscio di* V *e* V *ha codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_g$*.*

Proposizione (Wahl '90)

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ *una varietà liscia proiettivamente normale tale che* $\Psi_{\mathcal{O}_X(1)}$ *è iniettiva. Se* $Y \subset X$ *soddisfa*

$$H^1(\mathcal{I}_{Y/X}(1)) = (0), H^1(\mathcal{I}^2_{Y/X}(2)) = (0), H^1(\mathcal{I}_{Y/X} \otimes N_X^\vee(2)) = (0)$$

allora $\Psi_{\mathcal{O}_Y(1)}$ *è iniettiva.*

Proposizione (Wahl '90)

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ *una varietà liscia proiettivamente normale e aritmeticamente CM e* Y *una sezione lineare liscia di codimensione* $n < r$*. Se* $H^1(N_X^\vee(2-i)) = (0)$ *per* $1 \leq i \leq n$ *e* $\Psi_{\mathcal{O}_X(1)}$ *è iniettiva, allora anche* $\Psi_{\mathcal{O}_Y(1)}$ *è iniettiva.*

Sia $G(r) \doteq \min \{g | \exists (C, L) \in \mathcal{S}_g^r \text{ con } \Psi_L \text{ iniettiva } \}$.

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G(r)$	5	9	11	15	21	25	29	43		43

- $r = 2$, luogo iperellittico $\mathcal{H}_5$.
- $r = 3$, intersezione completa $(2, 4)$ in $\mathbb{P}^3$;
- $r = 4$, $g(C) = 11$, $C \xrightarrow{2:1} E$ associato a $2L$, $\deg L = 5$;
- $r = 5$, $C \subset \mathbb{P}^2$, $\deg(C) = 7$;

Sia $G(r) \doteq \min \{ g | \, \exists (C, L) \in \mathcal{S}_g^r \text{ con } \Psi_L \text{ iniettiva } \}$.

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G(r)$	5	9	11	15	21	25	29	43		43

- $r = 2$, luogo iperellittico $\mathcal{H}_5$.
- $r = 3$, intersezione completa $(2, 4)$ in $\mathbb{P}^3$;
- $r = 4$, $g(C) = 11$, $C \xrightarrow{2:1} E$ associato a $2L$, $\deg L = 5$;
- $r = 5$, $C \subset \mathbb{P}^2$, $\deg(C) = 7$;

- Esistono esempi in cui $V \subset \mathcal{S}_g^r$ ha codimensione attesa, ma il punto generico $(C, L) \in V$ ha Ψ_L non iniettiva.

Proposizione (Pignatelli)

Sia C una curva liscia, $L \in Pic(C)$. Se $L \geq \mathcal{O}_C(D_1 + D_2 + D_3)$, $h^0(\mathcal{O}_C(D_i)) \geq 2$, allora Ψ_L non è iniettiva.

Corollario

$\mathcal{M}_8^3$ è una varietà non-ridotta di dimensione 15. $(\mathcal{M}_8^3)_{red} = \mathcal{H}_8$.

Dimostrazione.

Ogni $(C, L) \in \mathcal{S}_8^3$ è t.c. C iperellittica, $L = 3\mathfrak{g}_2^1 + P$, P punto di Weierstrass. □

- Esistono esempi in cui $V \subset \mathcal{S}_g^r$ ha codimensione attesa, ma il punto generico $(C, L) \in V$ ha Ψ_L non iniettiva.

Proposizione (Pignatelli)

Sia C una curva liscia, $L \in Pic(C)$. Se $L \geq \mathcal{O}_C(D_1 + D_2 + D_3)$, $h^0(\mathcal{O}_C(D_i)) \geq 2$, allora Ψ_L non è iniettiva.

Corollario

$\mathcal{M}_8^3$ è una varietà non-ridotta di dimensione 15. $(\mathcal{M}_8^3)_{red} = \mathcal{H}_8$.

Dimostrazione.

Ogni $(C, L) \in \mathcal{S}_8^3$ è t.c. C iperellittica, $L = 3\mathfrak{g}_2^1 + P$, P punto di Weierstrass. $\square$

- Esistono esempi in cui $V \subset \mathcal{S}^r_g$ ha codimensione attesa, ma il punto generico $(C, L) \in V$ ha Ψ_L non iniettiva.

Proposizione (Pignatelli)

Sia C una curva liscia, $L \in Pic(C)$. Se $L \geq \mathcal{O}_C(D_1 + D_2 + D_3)$, $h^0(\mathcal{O}_C(D_i)) \geq 2$, allora Ψ_L non è iniettiva.

Corollario

$\mathcal{M}^3_8$ è una varietà non-ridotta di dimensione 15. $\left(\mathcal{M}^3_8\right)_{red} = \mathcal{H}_8$.

Dimostrazione.

Ogni $(C, L) \in \mathcal{S}^3_8$ è t.c. C iperellittica, $L = 3\mathfrak{g}^1_2 + P$, P punto di Weierstrass. $\square$

Componenti buone di S_g^r per $r >> 0$?

Congettura (Farkas '05)

Sia $r \geq 2$ e $g(r) \doteq \binom{r+2}{2}$. Esiste una componente $V_{g(r)} \subset \mathcal{S}^r_{g(r)}$ avente codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_{g(r)}$.

- Idea: $(C, L) \in V_{g(r)}$ è t.c. $C \hookrightarrow_{\varphi_{|L|}} \mathbb{P}^r$ $(L = \mathcal{O}_C(1))$.
  Si ha $\mathcal{O}_C(2) \cong \omega_C$ e C si dice semicanonica.
  Esiste una componente $W \subset Hilb_{g(r),r,g(r)-1}$ il cui punto generico è una curva semicanonica.

Componenti buone di S_g^r per $r >> 0$?

Congettura (Farkas '05)

Sia $r \geq 2$ e $g(r) \doteq \binom{r+2}{2}$. Esiste una componente $V_{g(r)} \subset \mathcal{S}_{g(r)}^r$ avente codimensione $\binom{r+1}{2}$ in $\mathcal{S}_{g(r)}$.

- Idea: $(C, L) \in V_{g(r)}$ è t.c. $C \hookrightarrow_{\varphi_{|L|}} \mathbb{P}^r$ $(L = \mathcal{O}_C(1))$.
  Si ha $\mathcal{O}_C(2) \cong \omega_C$ e C si dice semicanonica.
  Esiste una componente $W \subset Hilb_{g(r),r,g(r)-1}$ il cui punto generico è una curva semicanonica.

Consideriamo $0 \to \mathcal{I}_C(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2) \to \mathcal{O}_C(2) \to 0$.

$$0 \to H^0(\mathcal{I}_C(2)) \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2))}_{\binom{r+2}{2}} \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_C(2))}_{g} \to \dots .$$

- Se $g < \binom{r+2}{2}$, allora $h^1(N_C) = h^0(N_C^\vee(2)) \geq h^0(\mathcal{I}_C(2)) > 0$.
- Se $g \geq \binom{r+2}{2}$ e $h^1(N_C) = 0$, allora $W \subset Hilb_{g,r,g-1}$ con $\dim \pi(W) \geq \min\{3g-3, 3g-3+\rho(g,r,g-1)\} \geq 3g-3-\binom{r+1}{2}$.

Osservazione

$g = \binom{r+2}{2}$ è l' unico valore per il quale può esistere una componente regolare di $Hilb_{g,r,g-1}$ il cui punto generico è una curva semicanonica.

Consideriamo $0 \to \mathcal{I}_C(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2) \to \mathcal{O}_C(2) \to 0$.

$$0 \to H^0(\mathcal{I}_C(2)) \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2))}_{\binom{r+2}{2}} \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_C(2))}_{g} \to \dots .$$

- Se $g < \binom{r+2}{2}$, allora $h^1(N_C) = h^0(N_C^\vee(2)) \geq h^0(\mathcal{I}_C(2)) > 0$.
- Se $g \geq \binom{r+2}{2}$ e $h^1(N_C) = 0$, allora $W \subset Hilb_{g,r,g-1}$ con $\dim \pi(W) \geq \min\{3g-3, 3g-3+\rho(g,r,g-1)\} \geq 3g-3-\binom{r+1}{2}$.

Osservazione

$g = \binom{r+2}{2}$ è l' unico valore per il quale può esistere una componente regolare di $Hilb_{g,r,g-1}$ il cui punto generico è una curva semicanonica.

Consideriamo $0 \to \mathcal{I}_C(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2) \to \mathcal{O}_C(2) \to 0$.

$$0 \to H^0(\mathcal{I}_C(2)) \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2))}_{\binom{r+2}{2}} \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_C(2))}_{g} \to \dots.$$

- Se $g < \binom{r+2}{2}$, allora $h^1(N_C) = h^0(N_C^\vee(2)) \geq h^0(\mathcal{I}_C(2)) > 0$.
- Se $g \geq \binom{r+2}{2}$ e $h^1(N_C) = 0$, allora $W \subset Hilb_{g,r,g-1}$ con $\dim \pi(W) \geq \min\{3g-3, 3g-3+\rho(g,r,g-1)\} \geq 3g-3-\binom{r+1}{2}$.

Osservazione

$g = \binom{r+2}{2}$ è l' unico valore per il quale può esistere una componente regolare di $Hilb_{g,r,g-1}$ il cui punto generico è una curva semicanonica.

Deformazioni di curve

- Sia $X \subset \mathbb{P}^r$, $r \geq 2$ curva ridotta. Esiste:

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^r|X} \to N_{X/\mathbb{P}^r} \to T^1_X \to 0$$

$T_X \doteq \mathbf{Hom}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$, T^1_X primo fascio cotangente.

$N'_{X/\mathbb{P}^r} \doteq \ker N_{X/\mathbb{P}^r} \to T^1_X$ fascio normale equisingolare.

Teorema

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ una curva ridotta l.c.i., $\deg(X) = d$, $p_a(X) = g$. Si ha

(i) $T_{[X]} Hilb_{g,r,d} \cong H^0(N_{X/\mathbb{P}^r})$;

(ii) $\chi(N_{X/\mathbb{P}^r}) \leq \dim_{[X]} Hilb_{g,r,d} \leq h^0(N_{X/\mathbb{P}^r})$;

(iii) *Se $H^1(N_{X/\mathbb{P}^r}) = (0)$, allora $Hilb_{g,r,d}$ è liscio di dimensione $h^0(N_{X/\mathbb{P}^r})$ in $[X]$.*

Deformazioni di curve

- Sia $X \subset \mathbb{P}^r$, $r \geq 2$ curva ridotta. Esiste:

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^r|X} \to N_{X/\mathbb{P}^r} \to T_X^1 \to 0$$

$T_X \doteq \mathbf{Hom}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$, T_X^1 primo fascio cotangente.

$N'_{X/\mathbb{P}^r} \doteq \ker N_{X/\mathbb{P}^r} \to T_X^1$ fascio normale equisingolare.

Teorema

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ una curva ridotta l.c.i., $\deg(X) = d$, $p_a(X) = g$. *Si ha*

(i) $T_{[X]} Hilb_{g,r,d} \cong H^0(N_{X/\mathbb{P}^r})$;

(ii) $\chi(N_{X/\mathbb{P}^r}) \leq \dim_{[X]} Hilb_{g,r,d} \leq h^0(N_{X/\mathbb{P}^r})$;

(iii) *Se* $H^1(N_{X/\mathbb{P}^r}) = (0)$, *allora* $Hilb_{g,r,d}$ *è liscio di dimensione* $h^0(N_{X/\mathbb{P}^r})$ *in* $[X]$.

Teorema

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ *una curva ridotta,* $\deg(X) = d$, $p_a(X) = g$ *con* δ *nodi. Si ha*

- (i) $T_{[X]}\mathscr{V}^r_{g,d,\delta} \cong H^0(N'_{X/\mathbb{P}^r})$;
- (ii) $\chi(N'_{X/\mathbb{P}^r}) \leq \dim_{[X]} \mathscr{V}^r_{g,d,\delta} \leq h^0(N'_{X/\mathbb{P}^r})$;
- (iii) *Se* $H^1(N'_{X/\mathbb{P}^r}) = (0)$, *allora* $\mathscr{V}^r_{g,d,\delta}$ *è liscio di dimensione* $h^0(N'_{X/\mathbb{P}^r})$ *in* $[X]$. *Inoltre, per ogni* $0 \leq \delta' \leq \delta$ *esiste una deformazione* X' *di* X *avente esattamente* δ' *nodi.*

- Più in generale, se $H^0(N_X) \to H^0(T^1_p)$ è suriettiva per ogni $p \in \mathrm{Sing}(X)$ e $H^1(N_X) = (0)$, allora X è lisciabile in $\mathbb{P}^r$.

Teorema

Sia $X \subset \mathbb{P}^r$ *una curva ridotta,* $\deg(X) = d$, $p_a(X) = g$ *con* δ *nodi. Si ha*

(i) $T_{[X]}\mathscr{V}^r_{g,d,\delta} \cong H^0(N'_{X/\mathbb{P}^r})$;

(ii) $\chi(N'_{X/\mathbb{P}^r}) \leq \dim_{[X]} \mathscr{V}^r_{g,d,\delta} \leq h^0(N'_{X/\mathbb{P}^r})$;

(iii) *Se* $H^1(N'_{X/\mathbb{P}^r}) = (0)$, *allora* $\mathscr{V}^r_{g,d,\delta}$ *è liscio di dimensione* $h^0(N'_{X/\mathbb{P}^r})$ *in* $[X]$. *Inoltre, per ogni* $0 \leq \delta' \leq \delta$ *esiste una deformazione* X' *di* X *avente esattamente* δ' *nodi.*

- Più in generale, se $H^0(N_X) \to H^0(T^1_p)$ è suriettiva per ogni $p \in \mathrm{Sing}(X)$ e $H^1(N_X) = (0)$, allora X è lisciabile in $\mathbb{P}^r$.

Idea: condizioni ideali per provare la congettura con tecniche di degenerazione.

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "q"] & \subset \mathbb{P}^r \times B \\ \bullet \arrow[r] & B & \end{tikzcd}$$

X nodata, $\mathcal{X}_b$ liscia, , $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ t.c. $\mathcal{L}_b \cong \mathcal{O}_{X_b}(1)$ e $\mathcal{L}_b^2 \cong \omega_{X_b}$.

- Fibrato normale relativo $\mathcal{N} \doteq \mathcal{N}_{\mathcal{X}/B}$, $\mathcal{N}_0 = N_X$, $\mathcal{N}_b = N_{\mathcal{X}_b}$.
  $B \ni b \mapsto h^i(N_{\mathcal{X}_b})$ è superiormente semicontinua per ogni $i \geq 0$.
  Se $h^1(N_X) = 0$, allora $h^1(N_{\mathcal{X}_b}) = 0$.
- X si deforma a $\mathcal{X}_b$ generica in $W \subset Hilb_{p_a(X),r,p_a(X)-1}$, $W \ni [X]$.

Idea: condizioni ideali per provare la congettura con tecniche di degenerazione.

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "q"] & \subset \mathbb{P}^r \times B \\ \bullet \arrow[r] & B & \end{tikzcd}$$

X nodata, $\mathcal{X}_b$ liscia, , $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ t.c. $\mathcal{L}_b \cong \mathcal{O}_{X_b}(1)$ e $\mathcal{L}_b^2 \cong \omega_{X_b}$.

- Fibrato normale relativo $\mathcal{N} \doteq \mathcal{N}_{\mathcal{X}/B}$, $\mathcal{N}_0 = N_X$, $\mathcal{N}_b = N_{\mathcal{X}_b}$.
  $B \ni b \mapsto h^i(N_{\mathcal{X}_b})$ è superiormente semicontinua per ogni $i \geq 0$.
  Se $h^1(N_X) = 0$, allora $h^1(N_{\mathcal{X}_b}) = 0$.
- X si deforma a $\mathcal{X}_b$ generica in $W \subset Hilb_{p_a(X),r,p_a(X)-1}$, $W \ni [X]$.

Idea: condizioni ideali per provare la congettura con tecniche di degenerazione.

$$\begin{array}{ccc} X = \mathcal{X}_0 & \longrightarrow & \mathcal{X} \qquad \subset \mathbb{P}^r \times B \\ \downarrow & & \downarrow q \\ \bullet & \longrightarrow & B \end{array}$$

X nodata, $\mathcal{X}_b$ liscia, , $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ t.c. $\mathcal{L}_b \cong \mathcal{O}_{X_b}(1)$ e $\mathcal{L}_b^2 \cong \omega_{X_b}$.

- Fibrato normale relativo $\mathcal{N} \doteq \mathcal{N}_{\mathcal{X}/B}$, $\mathcal{N}_0 = N_X$, $\mathcal{N}_b = N_{\mathcal{X}_b}$.
  $B \ni b \mapsto h^i(N_{\mathcal{X}_b})$ è superiormente semicontinua per ogni $i \geq 0$.
  Se $h^1(N_X) = 0$, allora $h^1(N_{\mathcal{X}_b}) = 0$.
- X si deforma a $\mathcal{X}_b$ generica in $W \subset Hilb_{p_a(X),r,p_a(X)-1}$, $W \ni [X]$.

Osservazione

Se $1 = h^1(\mathcal{O}_X(2)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2))$, *allora* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2) \cong \omega_{\mathcal{X}_b}$.

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathcal{X}_b}(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2) \to 0$$

dà $h^1(\mathcal{O}_X(2)) = h^2(\mathcal{I}_X(2)) \underbrace{=}_{h^1(\mathcal{I}_X(2))=0} h^2(\mathcal{I}_{\mathcal{X}_b}(2)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2))$.

- Sia $X \doteq C \cup D$. Se C e D sono 2-normali ci sono solo due possibilità:

(1) $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \underbrace{\mathcal{I}_C(2)}_{h^2=h^1(\mathcal{O}_C(2))=1} \oplus \underbrace{\mathcal{I}_D(2)}_{h^2=0} \to \underbrace{\mathcal{I}_\Delta(2)}_{h^1=0,\ h^2=0} \to 0$

(2) $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \underbrace{\mathcal{I}_C(2)}_{h^2=0} \oplus \underbrace{\mathcal{I}_D(2)}_{h^2=0} \to \underbrace{\mathcal{I}_\Delta(2)}_{h^1=1,\ h^2=0} \to 0$

Osservazione

Se $1 = h^1(\mathcal{O}_X(2)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2))$, *allora* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2) \cong \omega_{\mathcal{X}_b}$.

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathcal{X}_b}(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2) \to 0$$

dà $h^1(\mathcal{O}_X(2)) = h^2(\mathcal{I}_X(2)) \underbrace{=}_{h^1(\mathcal{I}_X(2))=0} h^2(\mathcal{I}_{\mathcal{X}_b}(2)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2))$.

- Sia $X \doteq C \cup D$. Se C e D sono 2-normali ci sono solo due possibilità:

(1) $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \underbrace{\mathcal{I}_C(2)}_{h^2=h^1(\mathcal{O}_C(2))=1} \oplus \underbrace{\mathcal{I}_D(2)}_{h^2=0} \to \underbrace{\mathcal{I}_\Delta(2)}_{h^1=0,\ h^2=0} \to 0$

(2) $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \underbrace{\mathcal{I}_C(2)}_{h^2=0} \oplus \underbrace{\mathcal{I}_D(2)}_{h^2=0} \to \underbrace{\mathcal{I}_\Delta(2)}_{h^1=1,\ h^2=0} \to 0$

Osservazione

Se $1 = h^1(\mathcal{O}_X(2)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2))$, *allora* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2) \cong \omega_{\mathcal{X}_b}$.

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathcal{X}_b}(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2) \to 0$$

dà $h^1(\mathcal{O}_X(2)) = h^2(\mathcal{I}_X(2)) \underbrace{=}_{h^1(\mathcal{I}_X(2))=0} h^2(\mathcal{I}_{\mathcal{X}_b}(2)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_b}(2))$.

- Sia $X \doteq C \cup D$. Se C e D sono 2-normali ci sono solo due possibilità:

(1) $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \underbrace{\mathcal{I}_C(2)}_{h^2=h^1(\mathcal{O}_C(2))=1} \oplus \underbrace{\mathcal{I}_D(2)}_{h^2=0} \to \underbrace{\mathcal{I}_\Delta(2)}_{h^1=0,\ h^2=0} \to 0$

(2) $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \underbrace{\mathcal{I}_C(2)}_{h^2=0} \oplus \underbrace{\mathcal{I}_D(2)}_{h^2=0} \to \underbrace{\mathcal{I}_\Delta(2)}_{h^1=1,\ h^2=0} \to 0$

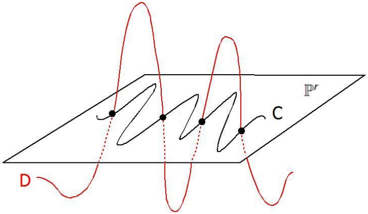
Induzione su r

- $(C, \mathcal{O}_C(1)) \in V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)} \rightsquigarrow (X, \mathcal{O}_X(1)) \rightsquigarrow (\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \in V_{r+1} \subset \mathcal{S}^{r+1}_{g(r+1)}$.
  $h^1(N_C) = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $h^1(N_\Gamma) = 0$

Induzione su r

- $(C, \mathcal{O}_C(1)) \in V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)} \rightsquigarrow (X, \mathcal{O}_X(1)) \rightsquigarrow (\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \in V_{r+1} \subset \mathcal{S}^{r+1}_{g(r+1)}$.

$D \subset \mathbb{P}^{r+1}$ ellittica normale



- $p_a(X) = g(C) + g(D) + (r+2) - 1 = g(r) + (r+2) = g(r+1)$;
  $\deg(\mathcal{O}_X(1)) = \deg(C) + \deg(D) = g(r) - 1 + (r+2) = p_a(X) - 1$.

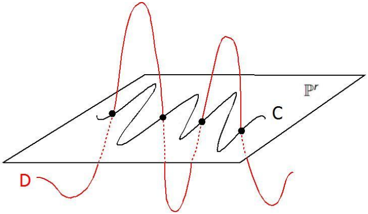
Osservazione

$\mathcal{O}_X(2)$ non è il dualizzante ω_X su X.

Induzione su r

- $(C, \mathcal{O}_C(1)) \in V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)} \rightsquigarrow (X, \mathcal{O}_X(1)) \rightsquigarrow (\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \in V_{r+1} \subset \mathcal{S}^{r+1}_{g(r+1)}$.

$D \subset \mathbb{P}^{r+1}$ ellittica normale



- $p_a(X) = g(C) + g(D) + (r+2) - 1 = g(r) + (r+2) = g(r+1)$;
  $\deg(\mathcal{O}_X(1)) = \deg(C) + \deg(D) = g(r) - 1 + (r+2) = p_a(X) - 1$.

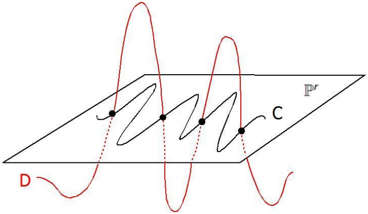
Osservazione

$\mathcal{O}_X(2)$ non è il dualizzante ω_X su X.

Induzione su r

- $(C, \mathcal{O}_C(1)) \in V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)} \rightsquigarrow (X, \mathcal{O}_X(1)) \rightsquigarrow (\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \in V_{r+1} \subset \mathcal{S}^{r+1}_{g(r+1)}$.

$D \subset \mathbb{P}^{r+1}$ ellittica normale



- $p_a(X) = g(C) + g(D) + (r+2) - 1 = g(r) + (r+2) = g(r+1)$;
  $\deg(\mathcal{O}_X(1)) = \deg(C) + \deg(D) = g(r) - 1 + (r+2) = p_a(X) - 1$.

Osservazione

$\mathcal{O}_X(2)$ non è il dualizzante ω_X su X.

Lemma (Lisciabilità)

Sia $r \geq 2$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^r \times B \xrightarrow{q} B$ famiglia loc. banale, $\mathcal{X}_0 \doteq X$ nodata, B irriducibile. Si assuma che lo schema critico $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di q sia irriducibile, che $h^0(N'_X) < h^0(N_X)$ e $h^1(N_X) = 0$. Allora X è lisciabile in $\mathbb{P}^r$.

- $0 \to H^0(N'_X) \to H^0(N_X) \to H^0(T^1_X) \to H^1(N'_X) \to 0.$
  Esiste p nodo di X tale che $H^0(N_X) \to H^0(T^1_p)$ è suriettiva.
- $\mathcal{S}$ irriducibile traduce l'osservazione intuitiva che i nodi di X sono indistinguibili.
- $0 \to \underbrace{N_{X|D}(-\Delta)}_{h^1=0} \to N_X \to \underbrace{N_{X|C}}_{h^1(N_C)=0 \Rightarrow h^1=0} \to 0.$

Lemma (Lisciabilità)

Sia $r \geq 2$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^r \times B \xrightarrow{q} B$ famiglia loc. banale, $\mathcal{X}_0 \doteq X$ nodata, B irriducibile. Si assuma che lo schema critico $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di q sia irriducibile, che $h^0(N'_X) < h^0(N_X)$ e $h^1(N_X) = 0$. Allora X è lisciabile in $\mathbb{P}^r$.

- $0 \to H^0(N'_X) \to H^0(N_X) \to H^0(T^1_X) \to H^1(N'_X) \to 0.$
  Esiste p nodo di X tale che $H^0(N_X) \to H^0(T^1_p)$ è suriettiva.
- $\mathcal{S}$ irriducibile traduce l'osservazione intuitiva che i nodi di X sono indistinguibili.
- $0 \to \underbrace{N_{X|D}(-\Delta)}_{h^1=0} \to N_X \to \underbrace{N_{X|C}}_{h^1(N_C)=0 \Rightarrow h^1=0} \to 0.$

Lemma (Lisciabilità)

Sia $r \geq 2$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^r \times B \xrightarrow{q} B$ famiglia loc. banale, $\mathcal{X}_0 \doteq X$ nodata, B irriducibile. Si assuma che lo schema critico $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di q sia irriducibile, che $h^0(N'_X) < h^0(N_X)$ e $h^1(N_X) = 0$. Allora X è lisciabile in $\mathbb{P}^r$.

- $0 \to H^0(N'_X) \to H^0(N_X) \to H^0(T^1_X) \to H^1(N'_X) \to 0.$
  Esiste p nodo di X tale che $H^0(N_X) \to H^0(T^1_p)$ è suriettiva.
- $\mathcal{S}$ irriducibile traduce l'osservazione intuitiva che i nodi di X sono indistinguibili.
- $0 \to \underbrace{N_{X|D}(-\Delta)}_{h^1=0} \to N_X \to \underbrace{N_{X|C}}_{h^1(N_C)=0 \Rightarrow h^1=0} \to 0.$

Lemma (Lisciabilità)

Sia $r \geq 2$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^r \times B \xrightarrow{q} B$ famiglia loc. banale, $\mathcal{X}_0 \doteq X$ nodata, B irriducibile. Si assuma che lo schema critico $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di q sia irriducibile, che $h^0(N'_X) < h^0(N_X)$ e $h^1(N_X) = 0$. Allora X è lisciabile in $\mathbb{P}^r$.

- $0 \to H^0(N'_X) \to H^0(N_X) \to H^0(T^1_X) \to H^1(N'_X) \to 0.$
  Esiste p nodo di X tale che $H^0(N_X) \to H^0(T^1_p)$ è suriettiva.
- $\mathcal{S}$ irriducibile traduce l'osservazione intuitiva che i nodi di X sono indistinguibili.
- $0 \to \underbrace{N_{X|D}(-\Delta)}_{h^1=0} \to N_X \to \underbrace{N_{X|C}}_{h^1(N_C)=0 \Rightarrow h^1=0} \to 0.$

Teorema (Benzo '13)

Sia $r \geq 2$ *e* $g(r) \doteq \binom{r+2}{2}$. *Esiste una componente* $V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)}$, $V_r \ni (C, L)$, L *molto ampio e* $h^1(N_C) = 0$ *nell'embedding definito da* L.

In particolare, Ψ_L *è iniettiva e* V_r *ha codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_{g(r)}$.

Dimostrazione.

Per induzione su r. Per il passo base ($r = 2$):C quintica piana liscia e $L = \mathcal{O}_C(1)$. □

- Combinando le induzioni su g e su r si ottiene:

Teorema

Per ogni $r \geq 2$ *e* $g \geq g(r)$, *esiste una componente* $V_g \subset \mathcal{S}^r_g$ *avente codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_g$.

Teorema (Benzo '13)

Sia $r \geq 2$ *e* $g(r) \doteq \binom{r+2}{2}$. *Esiste una componente* $V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)}$, $V_r \ni (C, L)$, L *molto ampio e* $h^1(N_C) = 0$ *nell'embedding definito da* L.

In particolare, Ψ_L *è iniettiva e* V_r *ha codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_{g(r)}$.

Dimostrazione.

Per induzione su r. Per il passo base ($r = 2$):C quintica piana liscia e $L = \mathcal{O}_C(1)$. □

- Combinando le induzioni su g e su r si ottiene:

Teorema

Per ogni $r \geq 2$ *e* $g \geq g(r)$, *esiste una componente* $V_g \subset \mathcal{S}^r_g$ *avente codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_g$.

Teorema (Benzo '13)

Sia $r \geq 2$ *e* $g(r) \doteq \binom{r+2}{2}$. *Esiste una componente* $V_r \subset \mathcal{S}^r_{g(r)}$, $V_r \ni (C, L)$, L *molto ampio e* $h^1(N_C) = 0$ *nell'embedding definito da* L.

In particolare, Ψ_L *è iniettiva e* V_r *ha codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_{g(r)}$.

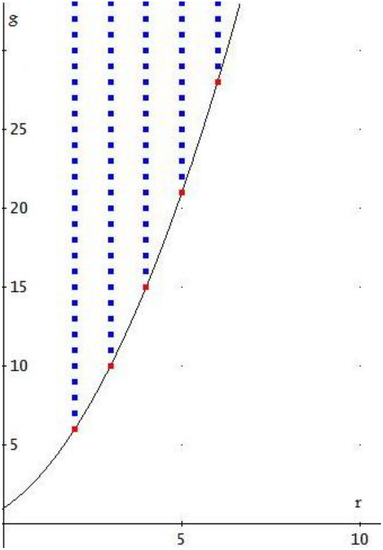
Dimostrazione.

Per induzione su r. Per il passo base ($r = 2$):C quintica piana liscia e $L = \mathcal{O}_C(1)$. □

- Combinando le induzioni su g e su r si ottiene:

Teorema

Per ogni $r \geq 2$ *e* $g \geq g(r)$, *esiste una componente* $V_g \subset \mathcal{S}^r_g$ *avente codimensione* $\binom{r+1}{2}$ *in* $\mathcal{S}_g$.

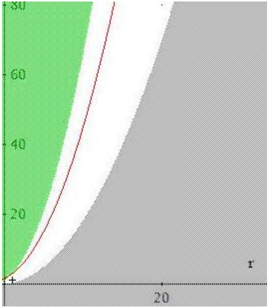

g
25
20
15
10
5
r
5
10

Possibili sviluppi: per quali (r, g) si ha dimensione attesa?

- $\mathcal{S}_g^r$ ha una componente di dimensione attesa $\Rightarrow g \geq \frac{r(r+1)}{6} + 1$.

Congettura (Congettura delle curve rigide)

Non esistono componenti $W \subset Hilb_{g,r,d}$ tali che $\dim \pi(W)$, $\pi(W) \subset \mathcal{M}_g$, è troppo bassa.

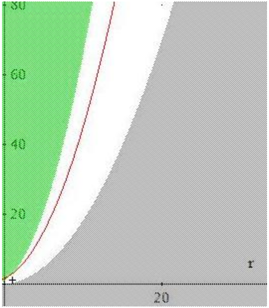


Possibili sviluppi: per quali (r, g) si ha dimensione attesa?

- $\mathcal{S}_g^r$ ha una componente di dimensione attesa $\Rightarrow g \geq \frac{r(r+1)}{6} + 1$.

Congettura (Congettura delle curve rigide)

Non esistono componenti $W \subset Hilb_{g,r,d}$ *tali che* $\dim \pi(W)$, $\pi(W) \subset \mathcal{M}_g$, *è troppo bassa.*



Proposizione

Sia $(C, L) \in \mathcal{S}_g^r$ *una curva spin tale che* Ψ_L *sia iniettiva e* $\varphi_{|L|}$ *sia un rivestimento n-uplo. Allora si ha* $g \geq (2r+1) + \frac{(r-1)(r-2)}{3}$.

- Analisi sistematica della situazione precedente. $C \subset \mathbb{P}^r$ a moduli generali, $\deg(C) = g(C) + r$ passante per $\Delta \doteq D \cap Q \subset \mathbb{P}^r$, D ellittica normale, Q iperquadrica.

  I $2r+2$ punti di Δ impongono una condizione in meno alle iperquadriche di $\mathbb{P}^r$ i.e. $h^1(\mathcal{I}_\Delta(2)) = 1$.

  Problema: argomento ad hoc per la lisciabilità.

Proposizione

Sia $(C, L) \in \mathcal{S}_g^r$ una curva spin tale che Ψ_L sia iniettiva e $\varphi_{|L|}$ sia un rivestimento n-uplo. Allora si ha $g \geq (2r+1) + \frac{(r-1)(r-2)}{3}$.

- Analisi sistematica della situazione precedente. $C \subset \mathbb{P}^r$ a moduli generali, $\deg(C) = g(C) + r$ passante per $\Delta \doteq D \cap Q \subset \mathbb{P}^r$, D ellittica normale, Q iperquadrica.

  I $2r+2$ punti di Δ impongono una condizione in meno alle iperquadriche di $\mathbb{P}^r$ i.e. $h^1(\mathcal{I}_\Delta(2)) = 1$.

  Problema: argomento ad hoc per la lisciabilità.

Proposizione

Sia $(C, L) \in \mathcal{S}_g^r$ *una curva spin tale che* Ψ_L *sia iniettiva e* $\varphi_{|L|}$ *sia un rivestimento n-uplo. Allora si ha* $g \geq (2r+1) + \frac{(r-1)(r-2)}{3}$.

- Analisi sistematica della situazione precedente. $C \subset \mathbb{P}^r$ a moduli generali, $\deg(C) = g(C) + r$ passante per $\Delta \doteq D \cap Q \subset \mathbb{P}^r$, D ellittica normale, Q iperquadrica.

  I $2r+2$ punti di Δ impongono una condizione in meno alle iperquadriche di $\mathbb{P}^r$ i.e. $h^1(\mathcal{I}_\Delta(2)) = 1$.

  Problema: argomento ad hoc per la lisciabilità.

Una variante: luoghi sottocanonici

- $\mathcal{G}_g \doteq \{(C,p) \in \mathcal{M}_{g,1} | (2g-2)p \cong \omega_C\}$ luogo sottocanonico.

$$\mathcal{G}_g^r \doteq \left\{ (C,p) \in \mathcal{G}_g \middle| \begin{array}{l} C \text{ non iperellittica, } h^0((g-1)p) \geq r+1, \\ h^0((g-1)p) \equiv r+1 (\text{mod } 2) \end{array} \right\}.$$

Teorema (Bastianelli-Pirola '14, tipo Harris)

$\mathcal{G}_g^r$ è vuoto oppure ogni $Z \subset \mathcal{G}_g^r$ ha dimensione $\geq 2g - \frac{r(r-1)}{2} - 1$.

Teorema (Bastianelli-Pirola '14, tipo Farkas)

Sia $r \geq 1, g \geq 4$. Se $\mathcal{G}_g^r$ ha una componente irriducibile di dimensione $2g - \frac{r(r-1)}{2} - 1$, allora $\mathcal{G}_{g+1}^r$ ha una componente irriducibile di dimensione $2(g+1) - \frac{r(r-1)}{2} - 1$.

Una variante: luoghi sottocanonici

- $\mathcal{G}_g \doteq \{(C,p) \in \mathcal{M}_{g,1} | (2g-2)p \cong \omega_C\}$ luogo sottocanonico.

$$\mathcal{G}_g^r \doteq \left\{ (C,p) \in \mathcal{G}_g \middle| \begin{array}{l} C \text{ non iperellittica, } h^0((g-1)p) \geq r+1, \\ h^0((g-1)p) \equiv r+1 (\text{mod } 2) \end{array} \right\}.$$

Teorema (Bastianelli-Pirola '14, tipo Harris)

$\mathcal{G}_g^r$ è vuoto oppure ogni $Z \subset \mathcal{G}_g^r$ ha dimensione $\geq 2g - \frac{r(r-1)}{2} - 1$.

Teorema (Bastianelli-Pirola '14, tipo Farkas)

Sia $r \geq 1, g \geq 4$. Se $\mathcal{G}_g^r$ ha una componente irriducibile di dimensione $2g - \frac{r(r-1)}{2} - 1$, allora $\mathcal{G}_{g+1}^r$ ha una componente irriducibile di dimensione $2(g+1) - \frac{r(r-1)}{2} - 1$.

Una variante: luoghi sottocanonici

- $\mathcal{G}_g \doteq \{(C,p) \in \mathcal{M}_{g,1} | (2g-2)p \cong \omega_C\}$ luogo sottocanonico.

$$\mathcal{G}_g^r \doteq \left\{ (C,p) \in \mathcal{G}_g \middle| \begin{array}{l} C \text{ non iperellittica, } h^0((g-1)p) \geq r+1, \\ h^0((g-1)p) \equiv r+1 (\mathrm{mod}\ 2) \end{array} \right\}.$$

Teorema (Bastianelli-Pirola '14, tipo Harris)

$\mathcal{G}_g^r$ *è vuoto oppure ogni* $Z \subset \mathcal{G}_g^r$ *ha dimensione* $\geq 2g - \frac{r(r-1)}{2} - 1$.

Teorema (Bastianelli-Pirola '14, tipo Farkas)

Sia $r \geq 1, g \geq 4$. *Se* $\mathcal{G}_g^r$ *ha una componente irriducibile di dimensione* $2g - \frac{r(r-1)}{2} - 1$, *allora* $\mathcal{G}_{g+1}^r$ *ha una componente irriducibile di dimensione* $2(g+1) - \frac{r(r-1)}{2} - 1$.