# IMMERSIONI BIRAZIONALI DI ORDINE $k$ DI SUPERFICI ($k$TH ORDER BIRATIONAL EMBEDDINGS OF SURFACES)

Sia $L$ un fibrato in rette su una superficie algebrica complessa $S$ liscia e connessa. $L$ è detto *$k$-molto ampio*, per un numero intero $k \geq 0$, se per ogni sottoschema 0-dimensionale $(\mathcal{Z}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ di lunghezza $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}) = k+1$, la mappa di restrizione $H^0(L) \to H^0(L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ è suriettiva. Questa definizione è una generalizzazione naturale del concetto di essere generato da sezioni globali e di essere molto ampio. Infatti, per definizione, $L$ è 0-molto ampio se e solo se $L$ è generato da sezioni globali, e $L$ è 1-molto ampio se e solo se $L$ è molto ampio.

Introduciamo la seguente definizione: $L$ è *birazionalmente $k$-molto ampio*, se esiste un sottoinsieme di Zariski aperto $\mathcal{U}$ di $S$ tale che $H^0(L) \to H^0(L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ sia suriettiva per ogni sottoschema 0-dimensionale $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{U}$ di lunghezza $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}) = k+1$. Per esempio, se $L$ è senza punti base, allora $L$ è birazionalmente (1-)molto ampio se e solo se il morfismo definito da $L$ è birazionale.

In questa esposizione spieghiamo come questo concetto sia collegato all'esistenza di certi divisori effettivi su $S$ (risultati tipo Reider) e come la $k$-molto ampiezza birazionale di $L + K_S$ sia determinata dalla gonalità delle curve liscie in $|L|$ per certe superfici. Precisamente, per superfici $K3$, Del Pezzo ed Enriques (quest'ultime solo per $k \geq 2$ e con un paio di eccezioni) abbiamo il seguente risultato:

$$L + K_S \text{ è birazionalmente } k\text{-molto ampio}$$
$$\text{se e solo se}$$
$$\text{tutte le curve liscie in } |L| \text{ hanno gonalità } \geq k+2.$$

Ci sono anche risultati simili collegati all'indice di Clifford delle curve in $|L|$.