L'ostruzione di Manin relativa alle superfici biellittiche

(*In collaborazione con Alexei Skorobogatov*)

Abstract

Sia k un campo di numeri e sia Ω l'insieme dei posti di k. Data una varietà algebrica X su k, per ogni estensione K/k, indichiamo con $X(K)$ l'insieme dei K-*punti* di X, cioè dei punti di X definiti su K.

Sia $X(\mathbb{A}_k)$ l'insieme dei punti adelici di X (se X è proprio, $X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v \in \Omega} X(k_v)$, dove k_v indica il completamento di k rispetto a v). Chiaramente $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)$.

Si dice che una classe $\mathcal{C}$ di varietà algebriche soddisfa il *principio di Hasse* (PH) se per ogni X in $\mathcal{C}$ la condizione necessaria $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ è anche sufficiente per l'esistenza di k-punti su X.

Nel 1970 Manin ha definito la prima ostruzione al PH. Egli ha considerato l'insieme $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$, definito come il nucleo a destra della *Brauer–Manin pairing*; poiché $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)$, la condizione $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \emptyset$ determina un'ostruzione, l'*ostruzione di Brauer–Manin* (OM), al PH nel caso in cui $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$.

Sebbene l'OM abbia spiegato il fallimento del PH per la maggior parte dei casi conosciuti al tempo, vari motivi hanno indotto a credere che questo non fosse vero in generale. In effetti, recentemente Alexei Skorobogatov ha costruito il primo controesempio al PH non spiegato dall'OM. Tale controesempio è costituito da una superficie biellittica data dal quoziente del prodotto di due curve di genere 1 su $\mathbb{Q}$ rispetto a una involuzione senza punti fissi.

Il metodo di Skorobogatov può essere utilizzato per determinare condizioni sufficienti affinché una superficie biellittica sia un controesempio al PH non spiegato dall'OM. Questo sarà l'argomento di questo seminario; in particolare sarà presentato un altro esempio esplicito di superficie biellittica (data dal quoziente del prodotto di due curve di genere 1 su $\mathbb{Q}$ rispetto all'azione di un gruppo di ordine 3) per cui il fallimento del PH non può essere spiegato dall'OM.