# ESTRATTI



## CLASSIFICAZIONE DELLE CONGRUENZE LISCIE CON CURVA FONDAMENTALE

MARINA BERTOLINI

In questo lavoro, effettuato in collaborazione con E.Arrondo e C.Turrini, si indichera' con "congruenza" una sottovarieta' della Grassmanniana $Gr(1, \mathbf{P}^n)$ di rette di $\mathbf{P}^n$, di dimensione uguale alla codimensione. All'inizio di questo secolo, numerosi matematici studiarono le congruenze di rette in $\mathbf{P}^3$. Particolarmente rilevante e' l'opera di G. Fano, il quale classifico' queste congruenze sotto l'ipotesi costante della non-esistenza di una *curva fondamentale* ovvero di una curva in $\mathbf{P}^3$ tale che tutte le rette della congruenza la intersecano. Recentemente, lo studio delle congruenze e' stato ripreso da M. Gross e dal primo autore che hanno classificato tutte le congruenze liscie escluse da Fano, ovvero hanno dato una classificazione di tutte le congruenze di rette in $\mathbf{P}^3$ con curva fondamentale. Inoltre quando gli altri due autori hanno iniziato ad occuparsi delle congruenze liscie di $\mathbf{P}^4$ con una curva intersecata da tutte le rette della congruenza, hanno trovato la stessa espressione per la formula dei punti doppi valida nel caso di $\mathbf{P}^3$. Questo e' stato il punto di partenza per questo lavoro che tratta il caso generale di congruenze liscie in ogni $\mathbf{P}^n$ le cui rette intersecano una curva detta *fondamentale*.

I risultati ottenuti si possono sintetizzare nei seguenti teoremi:

**Teorema 1.** *Sia $Y \subseteq G(1,n)$ una congruenza liscia, di bigrado (a,b) tale che tutte le sue rette intersecano una data retta $\Lambda \subseteq \mathbf{P}^n$. Si denoti con $\Gamma$ il cono $\Omega(\Lambda, \mathbf{P}^n)$ in $G(1,n)$. Allora si ha:*

*j) $b = a$ ed $Y$ e' l'intersezione di $\Gamma$ con un ipersuperfice di grado $a$* o

*jj) $b = a - 1$ e $Y$ e' legata a una $(n-1)-$varieta' di grado $n-2$ passante per il vertice di $\Gamma$, nella intersezione di $\Gamma$ con una ipersuperficie di grado $a+1$* o

*jjj) La dimensione e' $n = 3$, $a = b - 1$ e $Y$ e' legata nell'intersezione completa di $\Gamma$ e di una ipersuperficie di grado $b$, a un piano.*

**Theorem 2.** *Sia $Y$ una congruenza liscia con una curva (ridotta e irriducibile) $C$ come curva fondamentale. Allora vale uno dei seguenti fatti:*

*(i) $n = 3$ e la congruenza e' data dalle bisecanti alla cubica sghemba o alla quartica ellittica di $\mathbf{P}^3$.*

*(ii) La curva $C$ e' una retta (e $Y$ e' descritta nel Teorema 1).*

*(iii) La congruenza e' uno scroll , $C$ e' una conica e $a = 1$ o $2$, $b = 2$, o $C$ e' una cubica piana e $a = b = 3$*

*(iv) La congruenza e' un fibrato in iperquadriche, la curva $C$ e' una cubica piana e $a = 3$ e $b = 6$.*

Nel teorema 1 si tratta il caso particolare in cui la curva e' una retta. L'idea della dimostrazione consiste nello studiare la trasformata stretta della congruenza $Y$ nello scoppiamento del cono $\Gamma$ in cui e' contenuta. Si tratta di una generalizzazione a ogni $n$ di un risultato classico in dimensione $n = 3$, che risale a Roth. Il caso generale e' trattato nel teorema 2. La dimostrazione consta di due parti: nella prima parte si considera il pull-back della congruenza come ipersuperficie nella desingolarizzazione della varieta' delle rette che intersecano la curva fondamentale. Si ottiene una relazione numerica dalla formula dei punti doppi (utilizzando il fatto che si ha una sottovarieta' liscia di $Gr(1, \mathbf{P}^n)$ con dimensione uguale alla codimensione), che insieme alla limitazione di Castelnuovo per il genere di una curva, utilizzata nell'altro contesto, ci permette di concludere. La seconda parte consiste nel costruire esplicitamente tutte le possibili congruenze trovate come soluzioni numeriche ammissibili. Le tecniche di costruzione consistono principalmente nel generare le varieta' considerate come luoghi di degenerazione di opportuni fibrati vettoriali.

Inoltre si osserva anche che questa classificazione completa la classificazione degli scrolls $(n-1)$-dimensionali su una curva, contenuti in $G(1,n)$.

## TEORIA DI IWASAWA PER CURVE ELLITTICHE A VALORI NELLA $\mathbb{Z}_p$-ESTENSIONE ANTICICLOTOMICA DI UN CAMPO QUADRATICO IMMAGINARIO

MASSIMO BERTOLINI

Sia $E/\mathbb{Q}$ una curva ellittica modulare. Sia $K$ un campo quadratico immaginario, tale che tutti i primi razionali che dividono il conduttore aritmetico di $E$ si decompongono in $K$. La teoria della moltiplicazione complessa permette, per ogni primo razionale $p$, di definire una $\mathbb{Z}_p$-estensione $K_\infty$ di $K$, la *$\mathbb{Z}_p$-estensione anticiclotomica*, per mezzo di certi valori di forme modulari. $K_\infty$ è l'unica $\mathbb{Z}_p$-estensione di $K$ che è diedrale su $\mathbb{Q}$. Indichiamo con $K_n$ la sottoestensione di $K_\infty$ avente grado $p^n$ su $K$. Ci poniamo il problema di studiare la variazione con $n$ del rango dei punti razionali di $E$ sopra a $K_n$. Supponiamo per semplicità che la parte $p$-primaria del gruppo di Shafarevic-Tate di $E/K_n$ è finita per ogni $n$ (altrimenti occorre formulare i risultati seguenti in termini di gruppi di Selmer). E' definita su $K_\infty$ una famiglia di punti di $E$ detti *punti di Heegner*, che può essere usata per costruire un modulo $\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p$ sopra l'algebra di Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![Gal(K_\infty/K)]\!]$, avente rango 0 o 1. Il modulo $\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p$ è contenuto in modo naturale in un $\Lambda$-modulo libero $\hat{S}_p(E/K_\infty)$, definito come limite inverso rispetto alle mappe di corestrizione dei pro-$p$-gruppi di Selmer di $E$ relativi alle estensioni $K_n$. Supponiamo che il modulo $\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p$ è diverso da 0, cioè esiste un punto di Heegner di ordine infinito definito su $K_\infty$. Questa è un'ipotesi naturale, in vista di noti risultati analitici e del teorema di Gross-Zagier. Sotto le ipotesi fatte, possiamo dimostrare i seguenti risultati.

*(1)* $rango_{\mathbb{Z}}(E(K_n)) = p^n + e_n$, dove $\{e_n\}_{n\geq 1}$ è una successione limitata non-decrescente di interi non negativi.

*(2)* Se esiste un punto di Heegner su $K_\infty$ non divisibile per $p$, allora $e_n \leq 2rango_{\mathbb{Z}_p}(\hat{S}_p(E/K_\infty)/\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p)$ per ogni $n$.

(Si noti che (1) implica che $rango_{\mathbb{Z}_p}(\hat{S}_p(E/K_\infty)/\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p)$ è finito.) Infine, indichiamo con $\mathcal{X}_\infty$ il duale di Pontryagin del $p$-gruppo di Selmer di $E/K_\infty$. (1) implica che il rango su $\Lambda$ di $\mathcal{X}_\infty$ è 1. Sia $(\mathcal{X}_\infty)_{tors}$ la parte di $\Lambda$-torsione di $\mathcal{X}_\infty$.

*(3)* Il quadrato dell'ideale caratteristico $char(\hat{S}_p(E/K_\infty)/\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p)$ di $\hat{S}_p(E/K_\infty)/\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p$ è uno pseudo annullatore per $(\mathcal{X}_\infty)_{tors}$, cioè $char(\hat{S}_p(E/K_\infty)/\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p)^2(\mathcal{X}_\infty)_{tors}$ è un $\Lambda$-modulo finito.

(3) fornisce supporto alla "Main Conjecture" della teoria di Iwasawa nella nostra situazione, formulata da B.Perrin-Riou. $char(\hat{S}_p(E/K_\infty)/\hat{\mathcal{E}}(E/K_\infty)_p)^2$ è legato strettamente alla derivata prima di una funzione $L$ $p$-adica.



## AL DI SOTTO DI REIDER

GIAN MARIO BESANA

Sia $S$ una superficie proiettiva liscia complessa e sia $L$ un fibrato lineare ampio su $S$, generato dalle sue sezioni globali. Consideriamo il fibrato aggiunto $K_S + L$, dove $K_S$ e' il fibrato canonico della superficie. Nel caso in cui $L$ sia molto ampio Sommese [3] ha mostrato che $K_S + L$ e' generato dalle sue sezioni globali a meno che $L$ immerga $S$ come scroll su una curva oppure $(S, L) = (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(a))$ con $a = 1, 2$. Rilassando le condizioni su $L$ ad ampio e generato, se il grado del fibrato $L$ e' $L^2 \geq 5$ e' noto che il teorema di Reider [2] forza di nuovo $K_S + L$ ad essere generato, salvo il caso degli scroll , dove per scroll si intende un $\mathbf{P}^1$-bundle su una curva con $L_{|f} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ per tutte le fibre $f$.

E' un problema aperto, vedi ad esempio [1], stabilire quali $(S, L)$ esistano con $L^2 = 3, 4$, $L$ ampio e generato, $K + L$ non generato, $(S, L)$ non uno scroll. Sono noti esempi nel caso $L^2 = 4$. Utilizzando risultati sui rivestiminti tripli del piano proiettivo si e' cercato di affrontare il caso $L^2 = 3$. Si mostra che tali superficie sono irregolari e o sono relativamente minimali oppure sono scoppiamenti semplici di una coppia polarizzata $(S', L')$ con $L'$ di grado 4 e non generato dalle sue sezioni globali, $K' + L'$ ampio. Sotto opportune ipotesi su $S$ si mostra che il genere sezionale $g$ di $(S, L)$ e' limitato dal di sopra. Nel caso di superficie con dimensione di kodaira $kod(S) \leq 0$ si mostra che gli invarianti numerici di $S$ hanno un numero assai ristretto di possibili valori. In particolare:

(1) Se $kod(S) = -\infty$ allora $q = 1$, $g = 8, 9$, $K^2 = -7, -4$
(2) Se $kod(S) = 0$ allora $g = 9$, $K^2 = -4$ ed $S$ ha modello minimale abeliano o biellittico

### Bibliografia


1. T. Fujita. *Classification Theories of Polarized Varieties.* Number 155 in London Mathematical Society Lecture Note. Cambridge University Press, 1990.
2. I. Reider. Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces. *Annals of Mathematics*, (127):309–316, 1988.
3. A. J. Sommese. Hyperplane sections of projective surfaces 1 : The adjunction mapping. *Duke Mathematical Journal*, (46):377–401, 1979.

## FIBRATI DI RANGO 2, QUADRICHE DI RANGO 6 E DIVISORE THETA GENERALIZZATO

SONIA BRIVIO

Siano $C$ una curva liscia di genere $g$, $H$ un fibrato lineare su $C$ che immerge $C \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ in modo tale che il suo ideale $I_C$ sia generato dalle quadriche. Indichiamo con $W^{(6)} \subset |I_C(2)|$ la sottovarieta' delle quadriche di rango $\leq 6$ contenenti la curva: tale varieta' e' strettamente collegata ai fibrati di rango 2 su $C$ con determinante $H$. Infatti, sia $Q \in W^{(6)}$ di rango $r$, $Sing(Q) \cap C = \emptyset$, consideriamo la proiezione $g: \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{r-1}$ di centro $Sing(Q)$, e l'immagine $G = g(Q)$: $G$ e' la Grassmanniana $G(2,4)$ se $r = 6$, e' una sua sezione se $r \leq 5$. Esistono quindi su di essa due fibrati vettoriali di rango 2: $\mathcal{U}_G$ e $\bar{\mathcal{U}}_G$ detti rispettivamente fibrato universale e fibrato quoziente. Si determinano di conseguenza due fibrati di rango 2 su $C$

$$\mathcal{E} := g^* \mathcal{U}_G{}^* \quad \bar{\mathcal{E}} := g^* \bar{\mathcal{U}}_G,$$

con determinante $H$. Piu' precisamente, $Q$ e' univocamente determinata dalla coppia $(\mathcal{E}, V)$, dove $V$ e' un sottospazio 4-dimensionale di $H^0(\mathcal{E})$, $V = g^* H^0(\mathcal{U}_G{}^*)$.

Sia $\mathcal{SU}(2, H)$ lo spazio dei moduli dei fibrati di rango 2 su $C$ con determinante $H$. Scegliendo $H$ di grado $2g + 2$, si ha che $dim W^{(6)} = dim \mathcal{SU}(2, H) = 3g - 3$, ed inoltre $h^0(\mathcal{E}) = 4$ per il generico elemento di $\mathcal{SU}(2, H)$. Si dimostra infatti l'esistenza di una mappa razionale di grado 2

$$\phi_H : \mathcal{SU}(2, H) \to W^{(6)}$$

la cui immagine, se $g \geq 3$, e' una componente irriducibile di $W^{(6)}$.

Ricordiamo che $Pic\mathcal{SU}(2, H) \simeq \mathbf{Z}$, sia $\mathcal{L}$ il suo generatore ampio, $\mathcal{L}$ e' detto divisore theta generalizzato. Si dimostra che $\phi_H$ e' definita da un sottospazio vettoriale di $H^0(\mathcal{L})$, piu' precisamente detto $\theta: \mathcal{SU}(2, H) \to \mathbf{P}^N$ il morfismo associato a $\mathcal{L}$, si ha che $\phi_H = \lambda_H \circ \theta$, dove $\lambda_H$ e' una proiezione lineare.

Come applicazione delle costruzioni precedenti si prova il seguente risultato: sia $C$ non iperellittica, generale nel senso di Noether-Lefschetz e $g(C) \geq 4$, allora $\mathcal{L}$ e' molto ampio.



## PUNTI RAZIONALI SU CURVE ALGEBRICHE E VARIETÁ DI TIPO GENERALE

LUCIA CAPORASO

Gli argomenti qui esposti sono oggetto di un lavoro in via di svolgimento, in collaborazione con Joe Harris e Barry Mazur. Il problema fondamentale che studiamo è di carattere algebrico geometrico, tuttavia le motivazioni vengono dalla geometria aritmetica, come adesso spiego.

Per semplicità, in quel che segue denoto con $K$ un campo di numeri algebrici, e con $g$ un intero maggiore o uguale a due. Inoltre con il termine "varietà " indico una varietà algebrica ridotta e irriducibile.

Comincio con l'enunciare due ben note congetture aperte in geometria aritmetica.

**Congettura A.** *Sia $Z$ una varietà di tipo generale e dimensione positiva, definita su un campo di numeri $K$. Allora l'insieme dei punti $K$-razionali di $Z$ non è denso (nella topologia di Zariski) in $Z$.*

Questa congettura, formulata da Lang e Bombieri (tra gli altri) è semplicemente una generalizzazione della Congettura di Mordell (dimostrata da Faltings) a dimensione superiore. Dal Teorema di Faltings si genera anche la cosiddetta Uniform Bound Conjecture, che qui chiamo Congettura B.

**Congettura B.** *Siano $K$ e $g$ fissati.*
*Allora esiste un estremo superiore $M(K, g) < \infty$ per il numero di punti $K$-razionali che una qualsiasi curva di genere $g$ può avere.*

Ci proponiamo di dimostare che la Congettura A implica la Congettura B.

L'osservazione fondamentale è che la suddetta implicazione segue dal Teorema enunciato piú sotto; in altre parole, non è difficile dimostrare che

Teorema 0 + Congettura A $\Longrightarrow$ Congettura B.

**Teorema 0.** *Zia $T \to B$ un morfismo proprio di varietà su $K$, avente come fibra generica una curva liscia di genere $g$. Allora esiste un intero $n > 0$ tale che l'n-simo prodotto fibrato di $T$ su $B$ ammette un morfismo razionale, dominante, non costante e definito su $K$, su una varietà di tipo generale.*

Con Harris e Mazur stiamo attualmente scrivendo la dimostrazione del Teorema, che si basa fortemente sui seguenti fatti.

(1) Prima di tutto, se nella famiglia iniziale $T \to B$ i moduli delle fibre lisce hanno variazione massima (e cioè, se il morfismo razionale canonico da $B$ a $M_g$ ha fibre generalmente finite) allora si può dimostrare che il dualizzante relativo di $T$ su $B$ è big. Questo permetterà di dimostrare che in tal caso, esiste $n$ tale che lo stesso prodotto fibrato di $T$ su $B$ $n$ volte è di tipo generale. Per far ciò si usa anche quanto segue.

(2) L'esistenza di una riduzione semistabile per curve, e cioè il fatto ben noto che esiste una compattificazione di $M_g$ al cui bordo si aggiungono solo curve con normal crossing semplice (nodi!). Questo permette di avere un buon controllo sulle singolarità dei prodotti fibrati di $T$ su $B$.

## RIVESTIMENTI QUADRUPLI, SUPERFICI DI ENRIQUES E FIBRATI STABILI CON $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ SU $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

GIANFRANCO CASNATI

Una superficie di Enriques polarizzata di grado $2q$ è una coppia $(S, |D|)$ ove $S$ è una superficie di Enriques definita su $\mathbb{C}$ (i.e. $S$ è liscia, $p_g(S) = q(S) = 0$ e $2K_S \sim 0$) e $|D|$ è una polarizzazione di grado $2q$ su $S$ (i.e. $|D|$ è un sistema lineare su $S$ numericamente effettivo, privo di punti base con $D^2 = 2q$). Sia $M(0,3)$ lo spazio dei moduli dei fibrati stabili $\mathcal{F}$ su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con $c_1(\mathcal{F}) = 0$ e $c_2(\mathcal{F}) = 3$. Vale il seguente teorema.

**Teorema.** *Lo spazio dei moduli $M^4_E$ delle superfici di Enriques polarizzate di grado 4 è irriducibile e birazionalmente equivalente a $M(0,3) \times_{\mathbb{C}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. In particolare $M^4_E$ è razionale.* □

Il teorema risponde al problema posto da I.V. Dolgachev (cfr [Do]) di determinare la razionalità degli spazi di moduli $M^{2q}_E$ nel caso $q = 2$. Un risultato classico è la razionalità di $M^{2q}_E$ per $q = 3$ (cfr. [Do]). Recentemente S. Kondō (cfr. [Ko]) ha dimostrato la razionalità dello spazio dei moduli $M_E$ delle superfici di Enriques.

Le curve eccezionali del morfismo $\sigma: S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ indotto da $|D|$ sono $(-2)$–curve, quindi tramite la fattorizzazione di Stein si ottiene in maniera naturale un morfismo $\varrho: X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ piatto e finito di grado 4 con $X$ normale con al più punti doppi razionali per singolarità. Il morfismo $\varrho$ è stato dettagliatamente studiato da A. Verra in [Ve].

Tali rivestimenti quadrupli sono parametrizzati dall'insieme $\mathbb{P}_E$ delle coppie $(\mathcal{F}, \eta)$ ove $\mathcal{F} \in M(0,3)$ ed $\eta \in H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \check{\mathcal{F}}(1)^{\oplus 6})$ (cfr. [Cs]) ed $M^4_E$ è realizzato in maniera naturale come quoziente di $\mathbb{P}_E$ modulo un'opportuna azione di $SL_3 \times_k SL_3$.

### Bibliografia


[Cs] Casnati, G.: *Covers of algebraic varieties I. A general structure theorem, covers of degree 3, 4 and Enriques surfaces.* Preprint.

[Do] Dolgachev, I.V.: *Rationality of fields of invariants.* Algebraic geometry, Bowdoin 1985 (Spencer J. Bloch ed.), Proceedings of symposia in pure mathematics 46, 1987.

[Ko] Kondō, S.: *The rationality of the moduli space of Enriques surfaces.* Preprint.

[Ve] Verra, A.: *On Enriques surfaces as fourfold cover of* $\mathbb{P}^2_k$. Math. Ann., vol. 266, 1983, pp. 241–250.




## BASI DI GROEBNER E ANELLI DETERMINANTALI

ALDO CONCA

Gli anelli determinantali classici sono anelli definiti dagli ideali dei minori di un dato ordine di una matrice di indeterminate sopra un campo. Essi nascono per esempio come anelli delle coordinate delle varietà determinantali o come anelli di invarianti. Lo studio di questa classe di anelli viene solitamente effettuato per mezzo della loro ben nota struttura combinatoria. Lo scopo del mio seminario è mostrare come si possano utilizzare le basi di Groebner per studiare gli anelli determinantali associati con matrici simmetriche di indeterminate e anelli determinantali associati con certi sottoinsiemi, detti ladders, di una matrice di indeterminate.

La conoscenza di una base di Groebner di un ideale di polinomi $I$ permette di effetuare una deformazione di $I$ e di studiare il suo ideale dei termini iniziali $in(I)$. La struttura dell' ideale $in(I)$ è piú semplice che quella di $I$ in quanto i suoi generatori sono monomi. Le buone proprietà omologiche (come il definire un anello di Cohen-Macaulay o di Gorenstein) passano dall' ideale $in(I)$ all' ideale $I$. Inoltre se $I$ è omogeneo, le serie di Hilbert di $I$ e $in(I)$ coincidono e quindi coincidono tutti gli invarianti che alla serie di Hilbert sono legati come ad esempio la dimensione e la molteplicità. Nel caso particolare in cui lideale $in(I)$ è generato da monomi in cui non compaiono potenze di indeterminate si associa allìdeale $in(I)$ un complesso simpliciale $\Delta$ e si possono interpretare gli invarianti e le proprietà dell' anello definito da $in(I)$ in termini di invarianti e proprietà topologiche ed combinatorie di $\Delta$.

Questa tecnica di deformazione è applicata alle classi di anelli determinantali suddetti. In particolare si ottengono formule per la molteplicità e per la serie di Hilbert degli anelli determinantali di una matrice simmetrica e si caratterizzano gli anelli determinantali associati a ladders che sono di Gorenstein.

## CICLI ALGEBRICI E $\mathcal{K}$-TEORIA SU CONI AFFINI

CATERINA CONSANI

Il teorema di localizzazione di R. Thomason per la K-teoria algebrica delle categorie derivate [5] è utilizzato per studiare la K-teoria algebrica di varietà aventi singolarità isolate. Sia $X$ una varietà il cui luogo singolare $Y$ ha dimensione di Krull zero. Il gruppo $K_0^Y(X)$ e' costruito a partire dallo sprettro di K-teoria definito sulla categoria di Waldhausen dei complessi perfetti su $X$, aciclici su $X - Y$. Tale gruppo interviene nella sequenza esatta di localizzazione di K-teoria per la coppia $(X,Y)$ ed in generale è somma diretta di $SK_1(U)$ e $H^1_Y(X,\mathcal{O}^*_X)$, dove $U = X' - Y$ e $X' = Spec(\mathcal{O}_{X,Y})$. Pertanto, $K_0^Y(X)$ può differire dal gruppo di Grothendieck costruito sulla categoria dei fasci coerenti su $X$, ivi aventi dimensione omologica finita e supportati su $Y$ (vedi e.g. [2] Example 1.1.2). Sul gruppo $K_0^Y(X)$ viene definita, sfruttando la successione di localizzazione di cui sopra, una filtrazione $\{F^iK_0^Y(X)\}$, il gruppo $K_0^Y(X)$ è quindi studiato considerando il graduato associato $gr^*K_0^Y(X)$. È esposta una caratterizzazione dei gruppi $K_0(X)$ e $K_0^Y(X)$ per coni affini su particolari superficie razionali, estendendo precedenti risultati in tale direzione ottenuti da V. Srinivas ([4]) e M. Levine ([3]). Precisamente:

**Teorema.** *Sia $T$ una superficie proiettiva non singolare di grado $d \geq 2$ in $\mathbb{P}^{d+1}$ non contenuta in nessun iperpiano $\mathbb{P}^d$. Si supponga $T$ definita su un campo algebricamente chiuso, sia $X$ il cono affine su $T$ e $Y$ il suo vertice. Allora:*

(1) $K_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus Pic(X)$, *con* $Pic(X)$ *generato da* $\mathbb{Z}$.
(2) $F^3K_0^Y(X) \simeq \mathbb{Z}$.
(3) $gr^2K_0^Y(X)$ *è definito dalla sequenza esatta:* $0 \to \frac{Pic(T)\otimes k^*}{k^*} \to gr^2K_0^Y(X) \to A \to 0$, *dove* $A$ *è* $\mathbb{Z}$ *o zero*

La dimostrazione dipende in modo cruciale dal seguente risultato geometrico:

**Teorema.** *Sia $T$ la superficie proiettiva non singolare definita nel precedente Teorema e sia $X$ il cono affine su di essa ($Y$ il vertice). Allora: $CH^i(X,Y) = 0$ per $i \geq 2$.*

Qui, i gruppi $CH^i(X,Y)$ sono i gruppi relativi di Chow introdotti per esempio da A. Collino in [1]. Più in generale può essere provato, usando un argomento standard di coomologia étale, che $CH^2(X,Y)$ è libero da torsione quando $T$ è una superficie razionale non singolare definita su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.

### REFERENCES

1. A. Collino, *Quillen's K-Theory and Algebraic Cycles on Almost Non-singular Varieties*, Illinois Journal Of Mathematics **25** (1981), 654–666.
2. C. Consani, *K-Theory of Blow-ups and Vector Bundles on the Cone over a Surface*, K-Theory J. **7** (1993), 269–284.
3. M. Levine, *Localization on Singular Varieties*, Inventiones Mathematicae **91** (1988), 423–464.
4. V. Srinivas, *Vector Bundles on the Cone over a Curve*, Compositio Mathematica **47** (1982), 249–269.
5. R. Thomason, T. Trobaugh, *Higher Algebraic K-Theory of Schemes and of Derived Categories*, in: Progress in Mathematics, Birkhauser **88** (1990), 247–435.



## MAPPE DI SHAFAREVICH

MARK ANDREA DE CATALDO

CONGETTURA ( Shafarevich ). *Sia $X$ una varietà proiettiva liscia. Allora esistono un morfismo $sh_X$ avente fibre connesse ed una varietà normale $Sh(X)$, $sh_X : X \to Sh(X)$, tali che : $\forall$ sottovarietà $Z \subset X$ si abbia $Im[\pi_1(Z') \to \pi(X)]$ di cardinalità finita se e solo se $Z$ sia contenuta in una fibra di $sh_X$ ($Z'$ denota la normalizzazione).*

Si noti che sostituendo $H_1(-,\mathbf{Z})$ a $\pi_1(-)$ nella congettura si ha la risposta positiva data dal morfismo di Albanese.

Nonostante la congettura sia ancora solo tale, Kollár dimostra che la congettura ha risposta positiva per lo meno al livello di mappe razionali ([1]).

È naturale chiedersi se e come il gruppo fondamentale di una varietà giuochi un qualche ruolo essenziale nell'ambito della classificazione della varietà proiettive secondo la dimensione di Kodaira ([2]). Occorre però preventivamente chiedersi quando sia lecito aspettarsi che il gruppo fondamentale (usuale o algebrico: $\hat{\pi}_1$) governi proprietà globali. La nozione di gruppo fondamentale (algebrico) genericamente grande ("g.l.(a.)f.g.") risponde a tale esigenza; se $X$ ha g.l.(a.)f.g. allora $sh_X$ (come il suo corrispettivo algebrico $\hat{sh}_X$) è una mappa birazionale. In sostanza "quasi" tutte le sottovarietà di $X$ contribuiscono largamente al gruppo fondamentale globale. Su tali varietà è possibile, utilizzando in maniera ausiliaria dei loro rivestimenti étale, ottenere delle sezioni di fibati lineari "positivi" in qualche senso ([1], sezz. 8,10). Due esempi:

1) $X$ di tipo generale con $|\hat{\pi}_1(X)| = \infty$; allora $h^0(2K_X) > 0$;

2) $X$ varietà abeliana, $L$ fibrato lineare ampio su $X$; allora $h^0(L) > 0$.

Kollàr dimostra che se il morfismo di Albanese è genericamente finito, in particolare $X$ avrebbe g.l.(a.)f.g., allora $\chi(K_X) \geq 0$.

Noi dimostriamo che:

*se $X$ è proiettiva e liscia e valgono le seguenti due condizioni su $\hat{\pi}_1$ :*

*i) $\hat{\pi}_1(Z') \to \hat{\pi}_1(X)$ è suriettiva per ogni sottovarietà positivo-dimensionale $Z \subset X$,*

*ii) $|\hat{\pi}_1(X)| = \infty$,*

*allora $\chi(K_X) \geq 0$.*

Le due condizioni di cui sopra sono verificate per le varietà abeliane semplici, per le quali il risultato è però banale. Al momento non siamo ancora a conoscenza di altre varietà che le verifichino. Siamo interessati a :

1) trovare varietà (ve ne sono di regolari?), con le suddette proprietà;

2) capire il significato che tali varietà avrebbero nel contesto della classificazione;

3) rilassare in ii) la suriezione a qualcosa di più blando del tipo: $Im(\hat{\pi}_1(Z'))$ abbia indice finito.

[1] J. Kollár.: Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties. Invent.math. 113, 177-215 (1993)

[2] J. Kollár.: Shafarevich maps and automorphic forms (preprint)

## SU ALCUNE LIMITAZIONI PER IL GENERE DI UNA CURVA PROIETTIVA

VINCENZO DI GENNARO

Traendo spunto dai classici lavori di Castelnuovo [C] e da quelli di Gruson-Peskine [GP] ed Eisenbud-Harris [EH], si illustra un recente risultato [CCD] concernente l'esistenza di una limitazione $G = G(r; d, s)$ per il genere di una curva $C \subset \mathbf{P}^r$ ridotta ed irriducibile, non degenere, di grado $d$, non contenuta su una superficie di grado $< s$ ($d \gg s$, $s \geq r-1$).

Infine si accenna ad una generalizzazione [CCD2] che consiste nel dimostrare l'esistenza di una limitazione $G = G(r; s_1, s_2, \dots, s_l)$ per il genere di una curva $C \subset \mathbf{P}^r$ di grado $s_1$ tale che per ogni $i = 2, \dots, l$ non esiste in $\mathbf{P}^r$ una sottovarietà contenente $C$ di dimensione $i$ e grado $< s_i$ ($s_1 \gg s_2 \gg \dots \gg s_l \geq r - l + 1$, $l \geq 2$).

*Bibliografia*

[C] G.Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1937.

[CCD] L.Chiantini, C.Ciliberto, V.Di Gennaro, *The genus of projective curves*, Duke Math J., Vol.70, No.2 (May 1993), 229-245.

[CCD2] L.Chiantini, C.Ciliberto, V.Di Gennaro, *Flags and curves of high genus in $P^r$*, preprint.

[EH] D.Eisenbud, J.Harris, *Curves in projective space*, Presses de l'Université de Montreal (1982).

[GP] L.Gruson,C.Peskine, *Genre des courbes dans l'espace projectif*, Lecture Notes in Math. 687, Springer-Verlag, New York, 1978, 31-59.



## DEFORMAZIONI DI VARIETÀ CON SINGOLARITÀ PUNTI DOPPI RAZIONALI TRASVERSALI

BARBARA FANTECHI

*Definizione.* Sia $X$ una varietà proiettiva complessa (o varietà analitica compatta). Diremo che $X$ ha punti doppi razionali trasversali (tRDP) di tipo $A_n$ (risp. $D_n$, $E_n$) se $Z = \operatorname{Sing} X$ è irriducibile e in ogni punto di $Z$ la coppia di germi $(Z, X)$ è isomorfa alla coppia $(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d \times G)$ dove $G$ è un germe di singolarità di superficie di tipo $A_n$ (risp. $D_n$, $E_n$).

Sia $X$ una varietà con tRDP: indicheremo con $f : Y \to X$ la risoluzione delle singolarità che si ottiene scoppiando successivamente il luogo singolare di $X$; si ha $f^*(K_X) = K_Y$.

Si vuole paragonare la teoria delle deformazioni di $X$ con quella di $Y$. Sia perciò $Def_X$ il funtore (dalle $\mathbb{C}$-algebre locali di dimensione finita negli insiemi) che associa ad un'algebra $A$ le deformazioni di $X$ su $Spec\, A$. Sia $LTDef_X$ il funtore delle deformazioni localmente banali.

Ci sono trasformazioni naturali di funtori $LTDef_X \to Def_Y \to Def_X$ la cui composizione è l'inclusione naturale. Nel caso in cui la dimensione di $X$ è due, il problema è stato completamente studiato all'inizio degli anni '70; si dimostra che esiste un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} Def_Y & \longrightarrow & L_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Def_X & \longrightarrow & L_X \end{array}$$

dove $L_X = Def_U$ per un intorno affine $U$ di $Z$, $L_Y = Def_{f^{-1}(U)}$. $L_X$ ed $L_Y$ sono non ostruiti di dimensione $n$, e la mappa $L_Y \to L_X$ è un quoziente per l'azione del gruppo di Weil della singolarità. In particolare $Def_Y \to Def_X$ è surgettivo.

**Proposizione.** *Si possono definire i funtori $L_X$ ed $L_Y$ anche per dimensione arbitraria, in modo che il diagramma precedente resti valido; inoltre $L_X$ ha come spazio tangente $H^0(\mathcal{E}xt^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X))$, $L_Y$ ha come spazio tangente $H^0(R^1 f_* \Theta_Y)$.*
*$\mathcal{E}xt^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ è un line bundle sul luogo jacobiano di $X$; $R^1 f_* \Theta_Y$ è un fibrato su $Z$ di rango $n$.*

**Teorema.** *Nel caso $X$ abbia tRDP di tipo $A_1$,*
*$R^1 f_* \Theta_Y =: L$ è uguale a $K_Z \otimes K_X^{-1}$, e $\mathcal{E}xt^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X) = L^{\otimes 2}$.*
*$Def_Y$ è surgettivo su $Def_X$ se e solo se $h^0(L) = h^0(L^{\otimes 2})$.*

**Corollario.** *Nelle stesse ipotesi, se $L$ ha sezioni ma non è banale ogni piccola deformazione di $Y$ induce una deformazione singolare di $X$.*

Risultati analoghi si possono ottenere anche negli altri casi; si è preferito non enunciarli perché non sono ancora disponibili nelle ipotesi ottimali.

# UNA CONGETTURA IN TEORIA DI ARAKELOV

CARLO GASBARRI

Sia $f : X \to C$ una famiglia semistabile di curve di genere $g \geq 2$ con base una curva liscia $C$; se la famiglia énon isotriviale allora il numero di sezioni di $f$ éfinito e se $\omega_{X/C}$ éil dualizzante relativo allora per ogni sezione $s_P(C) = E_P$ abbiamo

$$(\omega_{X/C}; E_P) \leq 2(2g-1)(2g+3)(2q-1+s)$$

dove $q = g(C)$ e $s$ il numero di fibre singolari (Szpiro non pubblicato). Questo risultato puòessere interpretato in geometria diofanteà sui campi di funzioni nel seguente modo: sia $X$ una curva definita sul campo $\mathbb{C}(C)$ di genere $g \geq 2$ non definibile su un campo piùpiccolo, allora l'insieme $\{X(\mathbb{C}(C))\}$ dei punti $\mathbb{C}(C)$-razionali di X éfinito e di altezza limitata.

Sia adesso $X_K$ una curva definita su un campo di numeri $K$, sia $\mathfrak{O}_K$ l'anello degli interi di $K$, allora esiste un unica famiglia semistabile $f : \mathcal{X} \to B = \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$ minimale (detta superficie aritmetica) che éuno schema regolare di dimensione due; la teoria di Arakelov fornisce una teoria dell'intersezione a valori in $\mathbb{R}$ per i "divisori compattificati" di $\mathcal{X}$ in modo tale che le altezze associate ai fasci invertibili siano intersezioni.

Una conseguenza della disuguaglianza di Bogomolov-Miyaoka $(c_1(X)^2 \leq 3c_2(X))$ é(nella situazione all'inizio del testo) che

$$(\omega_{X/C}; \omega_{X/C}) \leq 3\delta + 4(g-1)(q-1)$$

ove $\delta$ éil numero di punti singolari sulle fibre di $f$.

Un analogo in teoria di Arakelov di tale disuguaglianza potrebbe essere: definiamo il divisore compattificato delle singolaritàdi una superficie aritmetica nel seguente modo:

$$\Delta(X/\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K) = \sum_{\sigma \in S_\infty} |\delta(X_\sigma)| + \sum_{\mathfrak{b} \in \operatorname{Specmax}(\mathfrak{O}_K)} \delta_{\mathfrak{b}} \log(\operatorname{Norma}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{b}))$$

ove $\delta(X_\sigma)$ él'invariante di Faltings di una superficie di Riemann e $\delta_{\mathfrak{b}}$ éil numero di punti singolari della fibra sopra a $\mathfrak{b}$.

**CONGETTURA B-M.** *Esistono due funzioni efettivaente calcolabili $A(g, \underline{\Delta}, d)$ e $B(g, \underline{\Delta}, d)$ tali che per ogni superficie aritmetica $f : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$ tale che il genere di $X_K$ sia $g$, $\Delta(\mathcal{X}/\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K) \leq \underline{\Delta}$ (nel senso dei divisori compattificati) e $[K : \mathbb{Q}] \leq d$ tali che*

$$(\omega_{\mathcal{X}/B}; \omega_{\mathcal{X}/B}) \leq A(g, \underline{\Delta}, d) + B(g, \underline{\Delta}, d) \log |\mathfrak{D}_{K/\mathbb{Q}}|$$

*ove $\mathfrak{D}_{K/\mathbb{Q}}$ éil discriminante di $K$ su $\mathbb{Q}$.*

Tale congettura inplicherebbe una versione molto forte della cogettura di Mordell:

**TEOREMA.** *Se la congettura B-M évera per tutte le $f : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$ stabili, allora esiste una costante $C(\mathcal{X})$ effettivamente calcolabile tale che per ogni sezione $E_P$ di $f$ abbiamo che*

$$(\omega_{\mathcal{X}/B}; E_P) \leq C(\mathcal{X})$$

La dimostrazione éun'utilizazione standard del metodo del rivestimento ramificato di Parshin.



# PUNTI DI WEIERSTRASS SU CURVE SINGOLARI

LETTERIO GATTO

La principale motivazione per tentare un'elaborazione di una teoria dei punti di Weierstrass rispetto a un fibrato lineare definito su una qualunque curva singolare è quella di studiare problemi di degenerazione. La tipica domanda in questo contesto è: *quali punti singolari sono limite di punti di Weierstrass lisci su curve "vicine"?* Diaz, in [1], ha dimostrato che il generico nodo su una generica curva uninodale è limite di $g(g-1)$ punti di Weierstrass lisci su curve "vicine".

In [2] e [3] viene elaborata una teoria di punti di Weierstrass su curve (integre, proiettive, in caratteristica zero) di Gorenstein, attraverso il luogo degli zeri di un *determinante wronskiano* opportunamente definito grazie all'invertibilità del fascio dualizzante.

L'estensione, formulata in [4]-[5], del concetto di *successione dei gaps di Weierstrass* (WGS) per i punti singolari, ha consentito, da un lato, la semplificazione della teoria di Lax e Widland e, dall'altro, ha condotto, in [6], alla definizione generale di punto di Weierstrass rispetto ad un qualsiasi *line bundle* su una curva arbitrarie. Ingra con singolarit particolare, se $\mathcal{V} = span(v_1, \dots, v_r) \subseteq H^0(C, \mathcal{L})$ è un sistema lineare sulla curva $C$, e $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ è la normalizzazione di $C$, i $\mathcal{V}$-punti di Weierstrass sono a) *tutti i punti singolari di* $C$ e b) *tutti i punti lisci $P$ per i quali*:

$$ord_{\pi^{-1}(P)}(\pi^* \boldsymbol{v} \wedge D\pi^* \boldsymbol{v} \wedge \ldots \wedge D^{r-1}\pi^* \boldsymbol{v}) > 0,$$

dove $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_r)$ e $\pi^* \boldsymbol{v} \wedge D\pi^* \boldsymbol{v} \wedge \ldots \wedge D^{r-1}\pi^* \boldsymbol{v}$ è la *r-forma wronskiana* associata a $\pi^* \boldsymbol{v}$ definita in [5] e [6].

Si definisce infine una *sezione wronskiana* sulla curva singolare, utilizzando la piattezza del suo fascio dualizzante, che gode della proprietà di mantenere costante il *peso totale* dei $\mathcal{V}$-punti di Weierstrass sulle fibre di famiglie piatte di curve.

## BIBLIOGRAFIA


1. Steven Diaz, *Exceptional Weierstrass points and the divisor on moduli space that they define*, Memoirs of the American Mathematical Society **56 327** (1985).
2. C. Widland, *Weierstrass Points on Gorenstein Curves*, Ph.D Thesis (Louisiana State University) (1984).
3. C. Widland and R. F. Lax, *Weierstrass Points on Gorenstein Curves*, Pacific Journal of Mathematics. **142 1** (1990), 197–208.
4. L. Gatto, *k-forme wronskiane, successioni di pesi e punti di Weierstraß su curve di Gorenstein*, Tesi di Dottorato-Università di Torino (1993.).
5. L. Gatto, *Weight Sequences versus Gap Sequences at singular Points of Gorenstein Curves*, Geometriae Dedicata, to appear.
6. E. Ballico, L. Gatto, *Weierstrass Points on Singular Curves*, Preprint (1994).


Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

# CALABI YAU THREEFOLDS E FIBRAZIONI ELLITTICHE

*(Perche' Calabi-Yau, perche' ellittiche.)*

ANTONELLA GRASSI

*Collage di lavori in corso, in parte in collaborazione con M. Gross:*

$X$ e' una Calabi-Yau 3-fold se $X$ e' una varieta' algebrica complessa, di dimensione 3, $\mathbb{Q}$-fattoriale, con singolarita' terminali tale che $K_X \sim \mathcal{O}_X$ e $h^1(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 0$. Una fibrazione su una Calabi-Yau deve essere K3, Abeliana o ellittica; $\pi : X \to S$ e' una fibrazione ellittica se la fibra generale e' una curva ellittica.

P.H. Wilson scrisse che le varieta' di Calabi-Yau "slip through the net of birational classification". Infatti e' possibile estendere

la classificazione di Bagnera-de Franchis a 3-folds di dimensione di Kodaira zero (Kawamata, Morrison), con un'eccezione, appunto le varieta' di Calabi-Yau, che appunto sfuggono ai metodi noti di classificazione.

Proponiamo allora di studiare queste varieta' esaminandone le possibili fibrazioni; questa scelta e' naturale poiche' Calabi-Yau sono il corrispondente in dimensione tre delle delle superfici K3 e di Enriques ed e' noto che ogni superficie di Enriques e' ellittica e ogni K3 puo' puo' essere deformata in una K3 ellittica. Inoltre, negli esempi conosciuti la struttura birazionale di $X$ Calabi-Yau diventa "complicata" proprio quando $X$ ammette una fibrazione.

Sebbene non sia vero che tutte le Calabi-Yau 3-folds siano ellittiche, (per esempio il rango del gruppo di Picard deve essere almeno due), fra gli esempi conosciuti molte sono le varieta' di Calabi Yau che ammettono una fibrazione ellittica. L'esistenza di questi esempi (e risultati preliminari di Nikulin) farebbe congetturare l'esistenza di una fibrazione, su almeno un modello minimale, per tutte le varieta' di Calabi-Yau con numero di Picard sufficientemente grande.

Fra le possibili fibrazioni su varieta' di Calabi-Yau (ellittiche, K3 e Abeliane) quelle ellittiche $\pi : X \to S$ sono le piu' semplici da esaminare: infatti si puo' assumere $X$ minimale, $\pi$ piatta ed e' anche descrivere le possibile superficie $S$. Inoltre le fibre singolari "generali" sono state classificate da Kodaira e nel caso di fibrazioni con sezione, $S$ e' liscia e le fibre singolari da Miranda. In particolare e' possibile calcolare la caratteristica tolopogica di $X$ dalla struttura ellittica, e in molti casi anche il numero di Picard,.

E' congetturato che il numero delle caratteristiche topologiche di Calabi-Yau threefold sia finito. I risultati ottenuti fino ad ora farebbero sperare che questo risultato sia vero almeno nel caso di Calabi-Yau ellittiche.



# SULLA PROFONDITÁ DI ALCUNI ANELLI GRADUATI

ANNA GUERRIERI

Dato $(R, m)$ un anello locale di Cohen-Macaulay, affronto i due seguenti problemi:

(1) Individuare delle condizioni sull'ideale $I$ che permettano di stimare la depth di $\mathrm{gr}_I(R)$, dove $\mathrm{gr}_I(R)$ é l'anello graduato associato all'ideale $I$.
(2) Individuare delle condizioni sull'ideale $I$ che permettano di descrivere in modo semplice le relazioni tra i valori di depth $R(I)$, depth $\mathrm{gr}_I(R)$, depth $S(I)$ e depth $S(I/I^2)$, dove $R(I)$ é l'algebra di Rees di $I$ ed $S(I)$ e $S(I/I^2)$ sono rispettivamente l'algebra simmetrica di $I$ e di $I/I^2$.

Per quel che concerne il primo problema ho dimostrato i due seguenti risultati:

**Theorem 1:** *Sia $(R, m)$ un anello locale, Cohen-Macaulay, di dimensione $d > 0$. Sia $I \subseteq R$ un ideale $m$–primario e $J \subseteq I$ una riduzione minimale di $I$, minimalmente generata da $d$ elementi, tale che*

$$\sum_{k \geq 2} \lambda\left(\frac{I^k \cap J}{I^{k-1}J}\right) = 1.$$

*Allora depth $gr_I(R) = d - 1$.*

(Una dimostrazione di tale risultato apparirá sul Journal of Algebra).

**Theorem 2:** *Sia $(R, m)$ un anello locale, Cohen-Macaulay, di dimensione $d > 0$. Sia $I \subseteq R$ un ideale $m$–primario e $J \subseteq I$ una riduzione minimale di $I$, minimalmente generata da $d$ elementi, tale che $\lambda\left(\frac{I^2 \cap J}{IJ}\right) = 2$ e $I^n \cap J = I^{n-1}J$ per tutti gli $n \geq 3$. Allora abbiamo depth $gr_I(R) \geq d - 2$.*

(Una dimostrazione di tale risultato apparirá sui Proceedings of AMS).

Per quel che concerne il secondo problema ho ottenuto il seguente risultato:

**Theorem 3:** *Sia $(R, m)$ un anello locale di Cohen-Macaulay di dimensione $d \geq 1$. Sia $I = (a_1, \dots, a_n)$ un ideale di $R$ tale che depth $R(I) =$ depth $gr_I(R) + 1$ e $I^e \cap Q_\infty = I^e \cap Q_1$. ($Q_\infty$ é l'ideale di $R[T_1, \dots, T_n]$ generato da tutte le forme che si annullano in $a_1, \dots, a_n$, $Q_1$ é l'ideale di $R[T_1, \dots, T_n]$ generato da tutte le forme lineari che si annullano in $a_1, \dots, a_n$ e $I^e = I\,R[T_1, \dots, T_n]$.) Allora*

$$\begin{cases} o & \text{depth } gr_I(R) = \text{depth } S(I/I^2) \\ o & \text{depth } S(I) \leq \text{depth } R(I). \end{cases}$$

Ho quindi provato che gli ideali generati dalle successioni quadratiche soddisfano sempre la condizione $I^e \cap Q_\infty = I^e \cap Q_1$. (Una dimostrazione di tutti questi risultati si puó anche trovare nella mia tesi di Ph.D. presso la Purdue University).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

## SULLE FAMIGLIE DI SUPERFICIE DI TIPO GENERALE

LUCA MIGLIORINI

Si prova la seguente proposizione

**Proposizione 1.** *Sia $f : X \to \mathbb{P}^1$ una famiglia liscia di superficie di tipo generale minimali. Allora $f$ e' a moduli costatnti.*

Una proposizione di questo tipo segue da argomenti standard se si ha a disposizione un teorema di Torelli infinitesimale.

La dimostrazione della proosizione nel caso generale usa la teoria delle variazioni di strutture di Hodge in modo piu' indiretto, mediante la semipositivita' dell'immagine diretta del fascio dualizzante relativo e dei suoi multipli. La dimostrazione si divide in 3 parti

1) Riduzione dell'enunciato all'annullamento del gruppo di coomologia

$$H^1(X, \Omega^1_X \otimes \omega^{-1}_{X/\mathbb{P}^1})$$

2) Studio della mappa asssociata al fibrato $\omega^n_{X/\mathbb{P}^1}$ per $n \gg 0$.

3) Un lieve miglioramento del Teorema di Kodaira Akizuki Nakano.



## ALCUNE APPLICAZIONI DI METODI DI FIBRATI VETTORIALI A PROBLEMI DI GEOMETRIA PROIETTIVA

ROBERTO PAOLETTI

Diamo due tipi di risultati. Il primo riguarda l'estendibilitá di morfismi definiti su un divisore ampio. Il caso piú importante e' il seguente:
*Sia $Y \subset X$ un divisore ampio, ridotto e irriducibile in una varietá proiettiva non-singolare $X$. Sia $\phi : Y \to P^1$ un morfismo non banale, e sia $F$ la classe numerica di una fibra di $\phi$. Supponiamo che $F \cdot Y^{n-2} < \sqrt{Y^n} - 1$. Allora $\phi$ si estende a un morfismo $\psi : X \to P^1$.*
Esistono varie estensioni di questo asserto in condizioni meno stringenti numericamente e a morfismi verso curve arbitrarie. Vi e' anche una generalizzazione in caratteristica $\neq 0$.

Il secondo tipo di risultato riguarda sottovarietá di codimensione superiore, e in particolar modo curve nello spazio proiettivo. Se $C \subset P^3$ e' una curva integrale, $P_C$ lo scoppiamento di $P^3$ lungo $C$ e $H$ e $E$ denotano, rispettivamente, l'immagine inversa del fibrato iperpiano in $P_C$ e il divisore eccezionale, poniamo $\epsilon(C) = sup\{\eta | H - \eta E$ e' ampio$\}$. $\epsilon(C)$ e' *la costante di Seshadri* di $C$ in $P^3$. Sia $d$ il grado di $C$ e se $C$ e liscia diciamo $N$ il fibrato normale. Poniamo $\delta(C) = \epsilon \cdot deg(N) - d$. Sia $\alpha = min\{1, \sqrt{d}(1 - \epsilon\sqrt{d})\}$.
*Se $C$ e' liscia, allora $gon(C) \geq min\left\{\frac{\delta(C)}{4\epsilon(C)}, \alpha\left(d - \frac{\alpha}{\epsilon(C)}\right)\right\}$.*

La costante di Seshadri si applica anche allo studio della restrizione a $C$ di un fibrato vettoriale stabile su $P^3$. Dato un fibrato stabile di rango due su $P^3$ con $c_1(\mathcal{E}) = 0$, sia $\gamma(\mathcal{E}, C) = sup\{\eta \in [0, \epsilon(C)] | f^*\mathcal{E}$ e' $(H, H_\eta)$-stabile$\}$. Sia $\alpha = min\{1, \sqrt{d}(\sqrt{\frac{3}{4}} - \gamma\sqrt{d})\}$.

*Se $C$ e' liscia e $\mathcal{E}|_C$ non e' stabile, allora $c_2(\mathcal{E}) \geq min\left\{\frac{\delta_\gamma(C)}{4}, \alpha\gamma\left(d - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\right\}$.*

Per esempio, se $C$ e' una intersezione completa nonsingolare di tipo $(a, b)$, con $a \geq \frac{4}{3}b + \frac{10}{3}$ and $b \geq c_2(\mathcal{E}) + 2$, allora $\mathcal{E}|_C$ e' stabile.

## ALCUNE QUESTIONI SULLA DUALE DI UNA VARIETA' PROIETTIVA

ENRICO ROGORA

Sia $X \subseteq P(V)$ una varietà irriducibile, eventualmente singolare, con difetto $\delta > 0$, e sia $\mathbf{G}(\delta, P(V))$ la grassmanniana dei sottospazi $\delta$-dimensionali di $P(V)$.

La *mappa di Bertini* di $X$ è la mappa razionale

$$\beta : X^* - - \rightarrow \mathbf{P}(\wedge^{dif(X)+1}(V))$$

che associa ad un iperpiano tangente $H$ il punto di $\mathbf{G}(\delta, P(V)) \subseteq P(\wedge^{dif(X)+1}(V))$ che rappresenta il luogo di contatto di $H$.

La *prima immagine di Bertini* di $X$, che indicherò con il simbolo $B_1(X)$, è l'immagine di $X^*$ con $\beta$.

I seguenti risultati sono tratti da [E. Rogora *"Metodi proiettivi per lo studio di alcune questioni relative alle varietà immerse"*, tesi per il conseguimento del titolo di dottore di ricerca, IV Ciclo].

**Teorema 1.** Sia $X \subseteq P^N$ una varietà n-dimensionale avente difetto 1, allora

$$(n-1) \leq dim B_1(X) \leq 3(n-1)/2.$$

**Teorema 2.** Sia $X \subseteq P^N$ una varietà n-dimensionale avente difetto 1 e tale che $dim(B_1(X)) = n-1$. Allora per $X$ si verifica una delle seguenti alternative:

i) esiste una varietà $l$-dimensionale $V_l$ con $0 \leq l \leq n-1$, tale che le rette di contatto di $X$ sono rette che intersecano $V_l$, oppure;

ii) esiste una varietà $(n-1)$-dimensionale $V_{n-1}$ tale che le rette di contatto di $X$ sono rette tangenti a $V_{n-1}$.

**Teorema 3.** Sia $X \subseteq \mathbf{P}^N$ una varietà $2m+1$-dimensionale avente difetto 1 e tale che

$$dim(B_1(X)) = 3/2(dim(X)-1) = 3m.$$

Allora, se $r$ è una retta generale di contatto e $p$ e $q$ sono due punti generali di $r$, $T_{\gamma_p, r} = T_{\gamma_q, r}$. In particolare, se $\gamma_p = \gamma_q$, allora $X$ è un $(m, m+1)$ scroll.

**Congettura 1.** Nelle ipotesi del teorema 3, $X$ è sempre un $(m, m+1)$ scroll.

**Teorema 4.** Sia $X \subseteq \mathbf{P}^N$ una varietà 4-dimensionale avente difetto 1 e tale che $dim(B_1(X)) = 4$. Allora, o $X$ è uno scroll di tipo (2,2) molto particolare (*-scroll), oppure $N \leq 6$.

**Congettura 2.**

i) Non esistono *-scroll.

ii) Non esistono varietà $2m$-dimensionali aventi difetto 1 e tali che $dim(B_1(X)) = 3m-2$.

iii) Se $X \subseteq P^N$, è una varietà $2m$-dimensionale avente difetto 1, allora $dim(B_1(X)) \leq 2m-1$. Inoltre, se tale massimo è raggiunto, allora esiste una varietà $V$ tale che $X$ è la varietà degli spazi tangenti a $V$.



## CONGETTURE DI HODGE INFINITESIMALE E GENERALIZZATA PER ALCUNE VARIETÀ DI TIPO GENERALE

MICHELE ROSSI

Si consideri la seguente azione di $\mathbf{Z}_3$ su $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$

$$\alpha_i : \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{P}^4 \longrightarrow \mathbf{P}^4$$
$$(a, (x_0 : \ldots : x_4)) \longmapsto (x_0 : \ldots : \varepsilon^a x_i : \ldots : x_4)$$

con $i = 0, \ldots, 4$ e $\varepsilon := exp(i\frac{2\pi}{3})$.

Siano poi $\mathcal{H}_6$ la componente connessa, dello schema di Hilbert delle ipersuperfici sestiche di $\mathbf{P}^4$, contenente il punto di Fermat (i.e. associato alla sestica $\{\sum x_i^6 = 0\}$), e $\mathcal{H}_6(i) \subset \mathcal{H}_6$ il chiuso di Zariski che parametrizza le sestiche invarianti per $\alpha_i$. Sia $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{H}_6(i)$ l'aperto degli elementi lisci e, detta $\mathcal{X}_6$ la famiglia universale delle sestiche di $\mathbf{P}^4$, si definisca $\mathcal{F}_I := \mathcal{U}_I \times_{\mathcal{H}_6} \mathcal{X}_6$, ove $I \subseteq \{0,1,2,3,4\}$ e $\mathcal{U}_I := \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

**Teorema 1** *Sia $X$ l'elemento generale di $\mathcal{F}_I$, e si indichi con $H_{\max}(X)$ la sottostruttura di Hodge razionale massimale di peso 3 e livello 1. Allora $H_{\max}(X) = \sum_{i \in I} H^3(X, \mathbf{C})^{\alpha_i}$ e $X$ soddisfa la Congettura di Grothendieck-Hodge*[1].

**Teorema 2** *Su ogni elemento $X$ di $\mathcal{F}_I$ esiste una famiglia di curve piane $\mathcal{C}_I \xrightarrow{\gamma} B_I$, la cui fibra generica é liscia ed ellittica. Inoltre, se $X$ é generale e $J_{\max}(X)$ é la sottovarietà abeliana massimale della jacobiana intermedia $J^2(X)$, allora $\mathcal{A}_X(B_I) = J_{\max}(X)$ (ove $\mathcal{A}_X$ é la mappa di Abel–Jacobi) e la congettura che segue é soddisfatta per ogni sottostruttura razionale $W$ di peso 3 e livello 1 di $X$.*

**Congettura Infinitesimale di Hodge**[2] Siano $X$ una varietá liscia e proiettiva e $W$ una sottostruttura razionale di Hodge, di peso $2r-1$ e livello 1 di $X$. Allora

i) esiste una famiglia $\mathcal{C}' \to B'$ di cicli algebrici di codimensione $r$ in $X$ tale che, a meno di una estensione finita di base $\mathcal{C} = B \times_{B'} \mathcal{C}'$, si abbia $\mathcal{A}_X(B) = J_W$ (dove $J_W$ é il sottotoro di $J^r(X)$ associato a $W$);

ii) detta $W'$ la sottostruttura di Hodge razionale associata a $\mathcal{A}_X(B')$, e denotato con $Z_{W'}$ il sottospazio di $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ formato dalle classi di Kodaira–Spencer che, via cup product, conservano la struttura di Hodge e il livello di $W'$, per ogni $G \in Z_{W'}$ esiste $\mathcal{C}_G \in CH^r(X \times B' \times \Delta)$ tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_G & \xrightarrow{pr_{X \times B'}} & \mathcal{C}' \\ \downarrow pr_\Delta & & \\ \Delta & & \end{array}$$

dove $CH^r$ rappresenta il gruppo di Chow delle classi di equivalenza razionale di cicli algebrici di codimensione $r$, mentre $\Delta = \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbf{C}[\varepsilon]}{(\varepsilon^2)}\right)$.

[1] A.Grothendieck, *Hodge general Conjecture is false for trivial reasons*, Topology **8** (1969), 299–303

[2] A.Albano, S.Katz, *Lines on the Fermat quintic threefold and infinitesimal generalized Hodge conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 353–368

# UN'INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE ALTEZZE

VALERIO TALAMANCA

La prima parte di questo seminario è dedicata ad una breve introduzione alla teoria delle altezze in geometria aritmetica. I passi principali sono i seguenti:
1) La costruzione di $ht_q$, l'altezza (logaritmica) $\ell^q$ su $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ $(1 \leq q \leq \infty)$.
2) La costruzione delle altezze canoniche, associate a divisori, sulle varietà abeliane definite su un campo numerico. Dei diversi approci alla costruzione delle altezze canoniche (si veda per esempio [1], [2] e [3]), viene preso in esame quello dovuto a Tate (cfr. [5]), in cui si definsce $ht_{D,can}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} ht_q(\varphi_D([2^n]P))$, dove $\varphi_D$ è un qualsiasi morfismo della varietà abeliana in $\mathbb{P}^n$ associato a $D$ ($D$ un divisore senza punti base).

La ragione dell'importanza delle altezze risiede nel seguente:

**Teorema (Northcott [4]).** *Sia* $\mathbf{K}$ *un campo numerico e* $C$ *una costante. Allora l'insieme* $\{P \in \mathbb{P}^n(\mathbf{K}) \mid ht_q(P) \leq C\}$ *è finito.*

Questo teorema, e le sue estensioni al caso delle altezze canoniche per le varietà abeliane, è fondamentale per quasi tutti i risultati di finitezza in geometria aritmetica per esempio il teorema di Mordell-Weil e il teorema di Faltings (congettura di Mordell).

Nella seconda parte vengono esposti alcuni risultati, facenti parte della mia tesi di dottorato, che riguardano la costruzione di altezze per alcuni gruppi algebrici lineari. Per semplificare le notazioni ci restringiamo al caso di $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$. Dato $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ la funzione $Ht_q^{op}(T) = \sup_{x\neq 0} \frac{Ht_q(T(x))}{Ht_q T(x)}$ è detta l'altezza (operatoriale) $\ell^q$ $(1 \leq q \leq \infty)$. Si può dimostrare che le altezze operatoriali godono di tutte le principali proprietà delle altezze classiche su $\mathbb{P}^n$. Inoltre si ha il seguente:

**Teorema.** *Sia* $\mathbf{K}$ *un campo numerico ed* $\mathcal{M}_{\mathbf{K}}$ *l'insieme dei valori assoluti standard di* $\mathbf{K}$. *Per ogni* $v \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}$ *denotiamo con* $\rho_v(T)$ *il raggio spettrale* $v$*−adico di* $T$. *Si ponga inoltre* $Sh_\infty(T) = \prod_{v\in\mathcal{M}_{\mathbf{K}}} \rho_v(T)^{1/[\mathbf{K}:\mathbb{Q}]}$ *(*$Sh_\infty(T)$*è detta l'altezza spettrale di* $T$*). Allora per ogni* $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ *si ha*

$$\lim_{k\to\infty} Ht_q^{op}(T^k)^{\frac{1}{k}} = Sh_\infty(T)$$

*per ogni* $1 \leq q \leq \infty$.

## Bibliografia


1. S. Bloch, *A note on height pairings Tamawaga numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent.Math. **58** (1980), 65–76.
2. B. Mazur e J. Tate, *Canonical height pairings via biextensions*, Arithmetic and Geometry I eds M. Artin e J. Tate, Prog.Math Vol 35, Birkhäuser, 1983, pp. 195–237.
3. A. Néron, *Quasi-functions et Hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann.of Math. **82** (1965), 249–331.
4. D. G. Northcott, *An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949), 502-509.
5. J. P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, Viehweg, 1989.




# SISTEMI LINEARI SU SUPERFICIE ABELIANE ED ESTENSIONE DEL METODO DI REIDER

FRANCESCA TOVENA

Si riassumono i risultati di un lavoro (non ancora pubblicato) in cui una variante del metodo di Reider (cf. [Rei], [Kot], [CT]) viene applicata allo studio del sistema lineare completo associato ad una polarizzazione $L$ di tipo $(1,4)$ su una superficie abeliana minimale $A$. Questo tipo di polarizzazione è stato studiato da, C.Birkenhake, H.Lange, D.van Straten in [BLvS] tramite la teoria (classica) degli invarianti di Mumford: si vogliono ritrovare risultati simili con un metodo differente. Gli autori di [BLvS] osservano che è possibile determinare un rivestimento ciclico $\pi : A \to B$ di grado 4 di superficie abeliane ed un fibrato lineare $M$ su $B$ (che dà una polarizzazione principale) tali che $\pi^*M = L$. Si indichi con $X$ l'unico divisore in $|M|$ e sia $Y = \pi^{-1}X$. Sotto opportune ipotesi, l'applicazione razionale $\varphi_{|L|} : A \to \varphi_{|L|}(A) = \overline{A} \subset \mathbf{P}^3$ associata al sistema lineare $|L|$ è un morfismo, le cui proprietà vengono dedotte da proprietà di $X$ e $Y$. Più precisamente, Teor.1 di [BLvS] assicura che $\varphi_{|L|}$ è birazionale se e solo se $X$ e $Y$ non ammettono involuzioni, sopra due curve ellittiche, compatibili con l'azione del gruppo di Galois del rivestimento $\pi$. Nel caso eccezionale, $\varphi_{|L|} : A \to \overline{A} \subset \mathbf{P}^3$ è un rivestimento doppio di una quartica singolare $\overline{A}$, che è birazionale ad uno scroll ellittico. In [BLvS] vengono inoltre descritte le equazioni e le singolarità dell'immagine di $\varphi_{|L|}$.

E' possibile ritrovare analoghi risultati usando una estensione del metodo di Reider basata su un teorema di Donaldson sui fibrati stabili con classi di Chern nulle.

Da tale punto di vista, si può osservare che, poiché l'applicazione $\varphi_{|L|}$ non è un embedding, esiste su $A$ uno 0-ciclo $Z$ di lunghezza 2 che non impone condizioni indipendenti al sistema lineare $|L|$. Ricordando che il fibrato canonico su una superficie abeliana è banale, la costruzione dovuta a Serre, Schwarzenberger e Griffiths-Harris dà origine ad un fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ di rango 2 su $A$ (detto estensione di Serre) che nasce come estensione: $0 \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_Z L \to 0$ . Il fibrato $\mathcal{E}$ non viola la disuguaglianza di Bogomolov $c_1^2 - 4c_2 \leq 0$ per fibrati semistabili, ma si ha $c_1^2(\mathcal{E}) - 4c_2(\mathcal{E}) = 0$, ed è possibile discutere esplicitamente la $L$-stabilità di $\mathcal{E}$; se ne ricava:

**Teorema .1** *Sia* $A$ *una superficie abeliana minimale che ammette una polarizzazione* $L$ *di tipo* $(1,4)$ *priva di punti base e sia* $\varphi_{|L|} : A \to \mathbf{P}^3$ *il morfismo associato al sistema lineare* $|L|$. *Ad ogni 0-ciclo* $Z$ *di lunghezza 2 su* $A$ *che impone condizioni dipendenti su* $L$ *risulta associata una estensione di Serre* $\mathcal{E}$ *univocamente individuata.*

*Il morfismo* $\varphi_{|L|}$ *è birazionale se e solo se, per ogni 0-ciclo* $Z$ *come prima, l'estensione di Serre associata* $\mathcal{E}$ *è* $L$*-stabile. In tal caso, l'immagine* $\overline{A} = \varphi_{|L|}(A)$ *è una ottica in* $\mathbf{P}^3$. *In particolare, se* $A$ *è semplice,* $\varphi_{|L|}$ *è sempre birazionale.*

*Altrimenti,* $\varphi_{|L|}$ *è un morfismo di grado 2 su una quartica.*

Lo studio delle estensioni di Serre permette inoltre di descrivere le singolarità della superficie immagine in entrambi i casi isolati dal teorema.

**Bibliografia:** **[BLvS]**: Ch.Birkenhake, H.Lange, D.Van Straten, *Abelian surfaces of type (1,4)*, Math. Ann. **285** (1989), 625–646; **[CT]**: F. Catanese, F. Tovena, *Vector bundles, linear systems and extension of* $\pi_1$, Lecture Notes in Mathematics **1507**, Springer, 51–70; **[Kot]**: D. Kotschick, *Stable and unstable bundles on algebraic surfaces*, Symposia Math. 32, Academic Press,151–166. **[Rei]**: I. Reider, *Vector bundles of rank two and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math., **127** (1988), 309–316.