FM210 - Tutorato 9
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

11 Maggio 2020

Esercizio 1 Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

1. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
2. Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
3. Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

Esercizio 2 Consideriamo un sistema meccanico formato da due punti A e B di massa m in cui A è collegato ad un punto fisso O tramite una sbarretta lunga L di massa M e B è collegato ad A tramite una molla di costante elastica $k > 0$ di lunghezza a riposo nulla.

Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrage. Trovare poi i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

[*Suggerimento*: Conviene usare come coordinate lagrangiane l'angolo φ_1 che il punto A forma con la verticale discendente e le coordinate cartesiane (x, y) del punto B.]

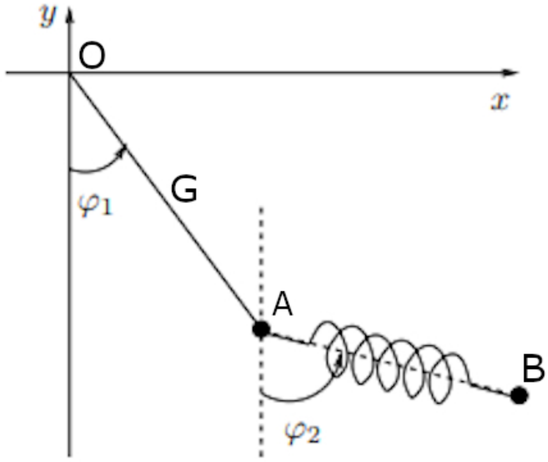
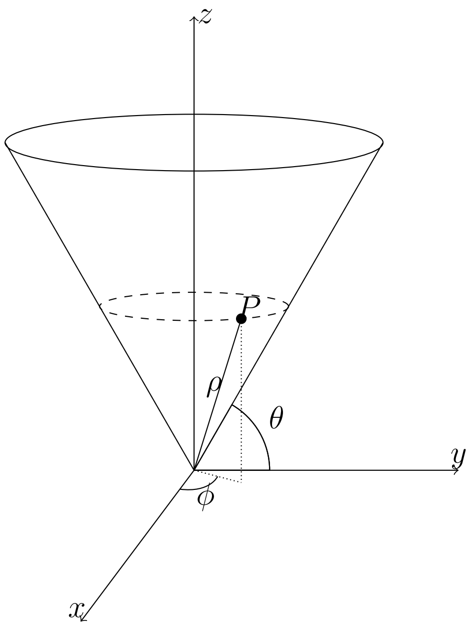


Figura 1:

Esercizio 3 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate

parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ, come in figura.

2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica ϕ, che chiameremo A.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

[*Suggerimento*: θ è un angolo dato e quindi fisso, non dipendete dal tempo]

Esercizio 4 Si consideri una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ sottoposta alla forza $\mathbf{F}$ di componenti $F_x = -a, F_y = 0, F_z = 0$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

1. Si mostri che $B = m\dot{x}t - mx + \frac{1}{2}at^2$ è una costante del moto;

2. Si mostri che B si conserva in virtù del teorema di Noether con la trasformazione $x \to x + \alpha t, y \to y, z \to z$;

3. Descrivere altre costanti del moto.