

FM210 - Tutorato 8
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

4 Maggio 2020

Esercizio 1 Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

Esercizio 2 Si scrivano la lagrangiana che descriva un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

Esercizio 3 Si calcolino le reazioni vincolari del pendolo semplice dell'esercizio precedente. In particolare si determinino in corrispondenza di quale configurazione assumono il valore massimo e il valore minimo.

Esercizio 4 Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo ℓ sospesa a un punto di sospensione O , al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ , dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

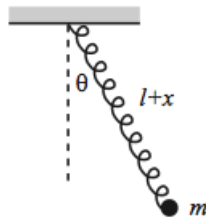


Figura 1:

Esercizio 5 Un sistema meccanico è costituito da tre punti P_1 , P_2 e Q , di masse, rispettivamente $m_1 = m_2 = m$ e $m_3 = 2m$, vincolati su un piano verticale π . I due punti P_1 e P_2 si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse x) e sono entrambi collegati a Q tramite due sbarre rettilinee di lunghezza L e massa trascurabile. Il punto P_1 è collegato a un punto fisso O dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto Q lungo l'asse orizzontale e l'angolo θ che la retta passante per i punti P_1 e Q forma con tale asse.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Per $k = 0$ si discuta qualitativamente il moto.
4. Sempre per $k = 0$, partendo dalla configurazione iniziale

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

si descriva qualitativamente il moto e si determini la forza vincolare nel punto Q in funzione del tempo, in particolare quando tale punto si trova a quota $\frac{L}{\sqrt{2}}$ al di sotto dell'asse x .

5. Si discuta come si modifica la trattazione se entrambe le sbarre hanno massa M e sono omogenee.

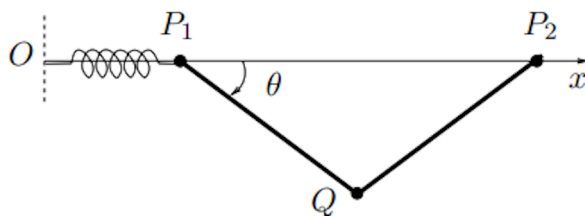


Figura 2: