

FM210 - Soluzioni Tutorato 6  
Università degli Studi Roma Tre  
Dipartimento di Matematica e Fisica  
Docente: Livia Corsi  
Tutore: Shulamit Terracina

15 Aprile 2020

**Esercizio 1** Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , connesso da un'asta rigida di massa nulla a un punto fisso  $O$  (punto di sospensione) e vincolato a muoversi in un piano e soggetto alla forza di gravità. Si dimostri che il moto del pendolo è regolato dall'equazione  $m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$  con  $g$  accelerazione di gravità e  $l$  lunghezza dell'asta.

**Esercizio 2** Dato un sistema di riferimento  $k = Oxyz$  (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo il profilo di un'equazione  $y = x^2$  in modo tale che la sua componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua il punto  $O'$  varia secondo la legge oraria  $x_{O'}(t) = \sin t$ . L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $k$  mentre l'asse  $\xi$  di  $K$  si mantiene sempre tangente alla curva  $y = y(x)$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove nel sistema  $K$  lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = t$ .

1. Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow k$  come composizione di una traslazione con una rotazione  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .
2. Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema  $k$  e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema  $K$
3. Determinare la velocità assoluta  $v$  e la velocità relativa  $v'$ .
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$
5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$
8. Dimostrare che la traiettoria  $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$  attraversa l'asse  $x$  infinite volte, e calcolare esplicitamente i tempi di attraversamento. [*Suggerimento* Si ha  $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$  per  $|x| < \frac{\pi}{2}$ ]

**Esercizio 3** Si definisca la velocità areolare per un punto materiale che si muova lungo un'orbita piana chiusa. Si dimostri che, se il punto materiale si muove sotto l'azione di una forza centrale gravitazionale, la velocità areolare si conserva.

**Esercizio 4** Si consideri un punto materiale di massa  $\mu$  soggetto a una forza centrale di energia potenziale:

$$V(\rho) = 2 \log(\rho) - \frac{1}{2} \log(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)$$

Si assuma che il momento angolare  $L$  del sistema sia diverso da zero. Al variare di  $L$  si risponda alle seguenti domande

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace e analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$
4. Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$
5. Si discuta come cambia lo scenario per  $L = 0$ .