

FM210 - Tutorato 5  
Università degli Studi Roma Tre  
Dipartimento di Matematica e Fisica  
Docente: Livia Corsi  
Tutore: Shulamit Terracina

8 Aprile 2020

**Esercizio 1** Si consideri un punto materiale di massa  $\mu$  soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log(1 + \rho^2) - \log \rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$

**Esercizio 2** Dato un sistema di riferimento  $k = Oxyz$  (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  la cui origine  $O'$  si muove lungo il profilo di un'equazione

$$y = x^2(x + 1)(x + 2)$$

La componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua il punto  $O'$  varia secondo la legge oraria  $x_{O'}(t) = t$ . L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $k$  mentre l'asse  $\xi$  di  $K$  si mantiene sempre tangente alla curva  $y = y(x)$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove nel sistema  $K$  lungo una circonferenza di centro  $O'$  e raggio  $R = 1$  secondo la legge  $\xi(t) = \cos 2t$ .

1. Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow k$  come composizione di una traslazione con una rotazione  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .
2. Scrivere la legge del moto (leggi orarie) nei sistemi  $k$  e  $K$ .
3. Determinare la velocità assoluta  $v$  e la velocità relativa  $v'$ .
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$

5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$

**Esercizio 3** Si consideri l'equazione  $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si mostri che l'equazione si può riscrivere nella forma  $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$ , dove  $A$  è la matrice antisimmetrica con  $A_{12} = -\Omega_3, A_{13} = \Omega_2, A_{23} = -\Omega_1$ .

**Esercizio 4** Nel sistema di riferimento  $K$  considerato nell'esempio del pendolo di Foucault si consideri l'equazione

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$

con  $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \cos \lambda, 0, \Omega \sin \lambda)$ , dove  $\lambda$  è notazione semplificata per  $\lambda_{eff}$ . Si mostri che la soluzione si può scrivere nella forma  $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$ , dove  $U(t) = e^{-At}$ , con  $A = \Omega\Lambda$  e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \\ 0 & -\cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  risolve l'equazione  $\ddot{\mathbf{x}} = U^{-1}\mathbf{F}$ .

**Esercizio 5** Si considerino le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\omega^2\xi + 2\Omega\dot{\eta}\sin\lambda + \omega^2(\zeta\sin\lambda\cos\lambda + \xi\sin^2\lambda) \\ \ddot{\eta} = -\omega^2\eta - 2(\Omega\dot{\zeta}\cos\lambda + \Omega\dot{\xi}\sin\lambda) + \Omega^2\eta \\ \ddot{\zeta} = -\omega^2\zeta + 2\Omega\dot{\eta}\cos\lambda + \omega^2(\xi\sin\lambda\cos\lambda + \zeta\cos^2\lambda) \end{cases}$$

che descrivono il pendolo di Foucault nell'approssimazione  $3\lambda' = -m\omega^2$ . In forma vettoriale, esse diventano

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \omega^2\mathbf{Q} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$

Se ne trovi la soluzione senza compiere alcuna ulteriore approssimazione.