FM210 - Tutorato 4
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

30 Aprile 2020

Esercizio 1 Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

Esercizio 2 Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.

1. Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.

2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.

4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

6. Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico

Esercizio 3 In classe avete visto che se $L \neq 0$, l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})},$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Ora, verificate che, posto $u = 1/\rho$, tale equazione si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2}\frac{d}{du}\left[V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.