FM210 - Tutorato 3
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

23 Marzo 2019

Esercizio 1 Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$ un punto di massimo relativo per V. Dimostrare che x_0 è un punto d'equilibrio instabile utilizzando il teorema 17.13 [G].

Esercizio 2 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

1. Si scriva l'equazione del moto e e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato
2. Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità
3. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$
4. Si discutano qualitativamente le curve di livello nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$
5. Verificare che la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x(0)}) = (1, 0)$ è periodica
6. Scriverne il periodo come integrale definito
7. Stimare il periodo
8. Studiare la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x(0)}) = \left(\sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{3}}}, 0\right)$
9. Si discuta cosa succede se, nel caso precedente, si modifica il valore della velocità iniziale in $\dot{x(0)} > 0$

Esercizio 3 In riferimento al paragrafo 28.12 (pagina 235 [G]). Si mostri che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon) = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esercizio 4 Si studi il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In particolare si dimostrino le seguenti proprietà:

- Se $\alpha, \beta > 0$ tutti i moti sono limitati e periodici.
- Se $\alpha, \beta < 0$ tutti i moti sono illimitati.
- Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ il sistema possiede una separatrice ed esistono moti illimitati.
- Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ il sistema possiede una separatrice e tutti i moti sono limitati

In presenza di attrito e con l'aggiunta di un termine forzante $f(\omega t)$, con f periodica, l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 + \gamma \dot{x} = f(\omega t)$$

che è nota come *equazione di Duffing*. L'equazione di Duffing è un'equazione largamente studiata come esempio notevole di sistema nonlineare, al pari del *pendolo forzato* $\ddot{x} + \sin x + \gamma \dot{x} = f(\omega t)$

Esercizio 5 Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione (30.10 [G]) si ha

$$\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} = -F(\rho)(\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{r}})$$

[*Hint*: Si usi (e magari si dimostri) che $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$ e il fatto che $2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (d/dt)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$].

Esercizio 6 Si dimostri che per il campo centrale gravitazionale il vettore di *Laplace-Runge-Lenz* (o vettore di *Runge-Lenz*), definito come

$$\mathbf{A} := \mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - k\mu\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

è una costante del moto.

[*Hint*: Si usi la conservazione del momento angolare, l'esercizio precedente e il fatto che, per il campo centrale gravitazionale, si ha $F(\rho) = -k/\rho^2$].

Esercizio 7 Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso forze centrali. In particolare, se $\mathbf{X}_1$ $\mathbf{X}_2$ sono le coordinate dei punti P_1 e P_2, rispettivamente, le forze che agiscono su P_1 e P_2 sono, rispettivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|}F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|), \qquad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|}F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|)$$

dove

$$F(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho), \qquad V(\rho)) = \rho - \frac{1}{4}\rho^4.$$

1. Si descriva il moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema che si muove in un campo centrale, e si mostri che il sistema che quest'ultimo è un sistema due gradi di libertà, descrivibile attraverso le variabili polari (ρ, θ)
2. Si studi il moto della variabile $\rho(t)$ al variare del momento angolare; in particolare, si determinino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità e si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
3. Si scriva la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.
4. Sempre nel sistema del centro di massa, si individui un moto periodico, se ne trovi il periodo e si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

Esercizio 8 [Da Appello FM1 08/06/2010] Si consideri il sistema costituito da un punto materiale $\mathbb{R}^3$, soggetto a una forza che dipende solo dalla distanza da un asse fissato.

Dimostrare che l'operatore gradiente in coordinate cilindriche (ρ, θ, z) è dato da
$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Utilizzare il risultato per dimostrare che la forza considerata è conservativa.